

М. А. Лялинов

## КОММЕНТАРИЙ О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В УГЛЕ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ РОБЭНА

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Цель данной заметки показать, что техника Зоммерфельда–Малюжинца может быть использована для построения собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа с условиями Робэна в угле [1].<sup>1</sup> В частности, собственные числа и собственные функции могут быть найдены явно и, более того, в терминах элементарных функций. В этом смысле, наш комментарий может рассматриваться как естественное дополнение результатов в [1]. Мы используем самосогласованный подход, основанный на интегральном представлении Зоммерфельда для решения, сводя его вычисление к решению функциональных уравнений Малюжинца [2, 3]. Хотя способ вывода формул для собственных функций и собственных чисел является, по-видимому, новым, сами элементарные выражения могут быть получены простыми манипуляциями из известных результатов, описанных, например, в [4], в разделе 5.2.

Действительно, существуют задачи, которые в математическом смысле тесно связаны с рассматриваемой и касаются локализованных волн вблизи наклонного берега в теории малых линейных колебаний жидкости, [4–6], раздел 5.2. Удовлетворительный обзор по данному вопросу можно найти в [4], в разделе 5.2. Известные локализованные моды (Урсела) напрямую соответствуют собственным функциям, получаемым с помощью техники Зоммерфельда–Малюжинца в настоящей работе, см. также [6].

---

*Ключевые слова:* дискретный спектр, собственные функции, техника Зоммерфельда–Малюжинца.

Работа частично поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, РФФИ 17-01-00668а.

<sup>1</sup>Данная работа может также служить ответом на вопрос К. Панкрашкина в его письме 2017 года к автору данной работы и к В. М. Бабичу по поводу возможности найти все собственные функции и собственные числа явно. Тогда у нас не было определенного ответа.

## §2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуется дискретный спектр, который отрицателен, и собственные функции оператора Лапласа  $(-\Delta)$

$$-\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

где  $\lambda$  спектральный параметр,  $\Omega := \{(x, y) \in R^2 : x > 0, |y| < x \tan \Phi\}$  угловая область в  $R^2$ , Рис. 1, с граничными условиями Робэна на сторонах  $l_{\pm} := \{(x, y) \in R^2 : x > 0, y = \pm x \tan \Phi\}$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} - \gamma u \right) \Big|_{l_{\pm}} = 0, \quad (2)$$

$\gamma > 0$ ,  $n$  нормаль направленная во внешность  $\Omega$ . Далее мы рассмотрим случай  $\Phi < \pi/2$ , так как в этом случае оказывается, что задача имеет как существенный так и дискретный спектр.

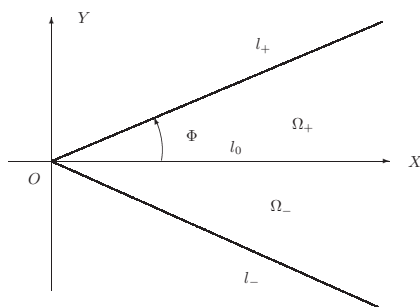


Рис. 1. Угловая область.

Самосопряженный оператор  $A_{\gamma}$ , связанный с задачей (1), (2), определяется стандартным образом посредством полуторалинейной формы, которая полуограничена и замыкаема,<sup>2</sup>

$$(A_{\gamma}u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, dx dy - \gamma \int_{l_+ \cup l_-} u \bar{v} \, ds, \quad u, v \in H^1(\Omega).$$

<sup>2</sup>В работах [4–6], раздел 5.2. параметр  $\gamma$  в граничном условии играет роль спектрального параметра вместо  $\lambda = -k^2$ , который предполагается фиксированным вместе с волновым числом  $k$ .

Дополнительные детали могут быть найдены в [1]. Спектр  $\sigma$  этого оператора состоит из двух частей: конечной дискретной части  $\sigma_d \subset (-\infty, -\gamma^2)$  и существенного спектра  $\sigma_e = [-\gamma^2, \infty)$ . Здесь мы рассмотрим дискретный спектр, который может быть только отрицательным. Число собственных чисел конечно, мы найдем их и собственные функции явно.

Для этого удобно, но не обязательно, расщепить искомые решения на четную и нечетную части, рассмотрев две задачи для них соответственно,

$$-\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_+, \quad (3)$$

где  $\Omega_+ := \{(x, y) \in R^2 : x > 0, 0 < y < x \tan \Phi\}$ , Рис. 1, с условием Робэна на стороне  $l_+$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} - \gamma u \right) \Big|_{l_+} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{l_0} = 0, \quad (5)$$

с условием Неймана на  $l_0 := \{(x, y) \in R^2 : x > 0, y = 0\}$  и

$$-\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_+ \quad (6)$$

с условием Робэна на стороне  $l_+$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} - \gamma u \right) \Big|_{l_+} = 0, \quad (7)$$

и

$$u|_{l_0} = 0, \quad (8)$$

т.е. с условием Дирихле на  $l_0$ . Построив собственные функции задач (3)–(5) и (6)–(8), мы очевидно получим собственные функции и спектр оператора  $A_\gamma$  посредством продолжения по четности. Задачи (3)–(5) и (6)–(8) соответственно называются задачами Неймана и Дирихле. Соответствующие собственные функции оператора  $A_\gamma$  четные по  $y$  [1] и, значит, удовлетворяют граничному условию Неймана на  $l_0$ .

§3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗОММЕРФЕЛЬДА И  
НЕТРИВИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ  
НЕЙМАНА

Введем полярные координаты в  $\Omega$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Интегральное представление Зоммерфельда для решения уравнения Гельмгольца (3), где  $\lambda = -\kappa^2 < 0$ , принимает вид

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} f(z + \varphi), \quad \kappa > 0, \quad (9)$$

где  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$  состоит из двух петель, показанных на Рис. 2. Концы контура  $\Gamma_+$  уходят на  $i\infty$  вдоль линий  $\pm\pi + iR$ ,  $\Gamma_+ = (i\infty + \pi, id + \pi) \cup (id + \pi, id - \pi) \cup (id - \pi, i\infty - \pi)$ ,  $d > 0$ . Контур  $\Gamma_-$  симметричен  $\Gamma_+$  относительно начала координат. Экспонента в подын-

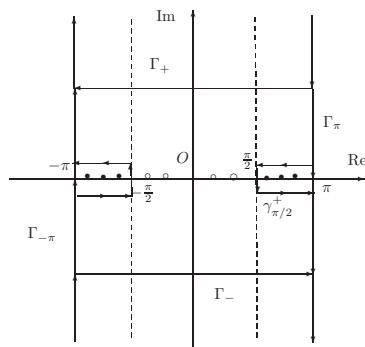


Рис. 2. Контурные интегрирования и полюсы подынтегрального выражения.

тегральном выражении быстро убывает на бесконечности в полосах  $|\operatorname{Re}(z) \pm \pi| < \pi/2$ . Тогда для  $r > 0$  интеграл сходится, если функция  $f(\cdot)$  в подынтегральном выражении непрерывна на  $\Gamma$  и удовлетворяет оценке  $|f(z)| < C e^{a|\operatorname{Im}(z)|}$ ,  $a > 0$  на контуре  $\Gamma$  на бесконечности. Стоит отметить, однако, что допустимый рост  $f(\cdot)$  на бесконечности ведет к расходимости интеграла при  $r \rightarrow 0$ .

Для описания некоторых возможных решений уравнения (3), которые удовлетворяют краевому условию (4), мы воспользуемся следующей Леммой.

**Лемма 1.** Пусть функция  $f$  мероморфна и имеет полюса, которые расположены в полосе  $|\operatorname{Im}(z)| < d$  для некоторого  $d > 0$ , ограничена на  $\pm i\infty$  при  $|\operatorname{Re}(z)| < 2\pi$ . Кроме того, она решает функциональные уравнения

$$\begin{aligned} [\sin z - \gamma/\kappa]f(z + \Phi) - [-\sin z - \gamma/\kappa]f(-z + \Phi) &= 0, \\ [\sin z + \gamma/\kappa]f(z - \Phi) - [-\sin z + \gamma/\kappa]f(-z - \Phi) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда интегралы

$$u_{\pm}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} f(z \pm \varphi), \quad \kappa > 0 \quad (11)$$

являются классическими решениями уравнения (3) в  $\Omega_+$ , удовлетворяющими условию (4), где верхние знаки в представлении (11) отвечают первому функциональному уравнению в (10), а нижние знаки второму.

Мы проверим это утверждение, предполагая, что  $f$  в подынтегральном выражении для  $u_+$  в (11) удовлетворяет первому уравнению (10). Для  $u_-$  вычисления такие же. Если  $r > 0$ , интеграл для  $u_+$  быстро и равномерно (по  $r, \varphi$ ) сходится и можно подставить в уравнение (3) и проверить его. Действительно,  $e^{\kappa r \cos(z-\varphi)}$  является классическим решением уравнения для всех  $z \in C$ , и мы имеем

$$u_+(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos[z-\varphi]} f(z).$$

Теперь обратимся к краевому условию на  $l_+$  при  $\varphi = \Phi$ . Имеем  $\frac{\partial}{\partial n}|_{l_+} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}|_{\varphi=\Phi}$  и

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{\kappa r} \frac{\partial u_+}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{\kappa} u_+ \right) \Big|_{\varphi=\Phi} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz \left( \frac{e^{\kappa r \cos z}}{\kappa r} \frac{\partial}{\partial \varphi} f(z + \varphi) \Big|_{\varphi=\Phi} - e^{\kappa r \cos z} \frac{\gamma}{\kappa} f(z + \varphi) \Big|_{\varphi=\Phi} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz \left( \frac{e^{\kappa r \cos z}}{\kappa r} \frac{\partial}{\partial z} f(z + \varphi) \Big|_{\varphi=\Phi} - e^{\kappa r \cos z} \frac{\gamma}{\kappa} f(z + \varphi) \Big|_{\varphi=\Phi} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} [\sin z - \gamma/\kappa] f(z + \Phi) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} dz e^{\kappa r \cos z} ([\sin z - \gamma/\kappa] f(z + \Phi) - [-\sin z - \gamma/\kappa] f(-z + \Phi)) = 0,
\end{aligned}$$

где мы проинтегрировали по частям и воспользовались симметрией контура  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ .

Стоит прокомментировать полученный результат. Пусть функция  $f$  нечетная в дополнение к условиям Леммы 1,  $f(z) = -f(-z)$ , тогда второе функциональное уравнение в (10) следует из первого и наоборот. В этих предположениях мы можем найти искомого решение уравнения (3) в  $\Omega_+$ , удовлетворяющее краевому условию (4), в виде  $u(r, \varphi) = u_+(r, \varphi) + u_-(r, \varphi)$ ,

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} [f(z + \varphi) + f(z - \varphi)]. \quad (12)$$

Решение (12) четное по  $\varphi$  и, значит, удовлетворяет краевому условию Неймана (5). Однако, полученное решение (12), вообще говоря, не ограничено в вершине ( $r = 0$ ) и на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ). Поведение решения зависит соответственно от поведения  $f$  при  $z \rightarrow i\infty$  и от положения полюсов.

Замечательно, что искомого решение функциональных уравнений (10) в предписанном классе функций может быть найдено явно.<sup>3</sup>

**Лемма 2.** Пусть нечетная функция  $f$  мероморфна, имеет полюса лишь в полосе  $|\operatorname{Im}(z)| < d$  для некоторого  $d > 0$ , ограничена в  $\pm i\infty$  при  $|\operatorname{Re}(z)| < 2\pi$  и решает функциональные уравнения (10). Тогда она может быть представлена в явной форме

$$f(z) = \frac{f_0(z)}{\sin(\mu z)}, \quad (13)$$

<sup>3</sup>Функциональные уравнения и техника их решения были рассмотрены Г.Д. Маложинцем, см. [2, 3].

где

$$f_0(z) = C\psi_\Phi(z + \Phi + \pi/2 + \vartheta)\psi_\Phi(z + \Phi - \pi/2 - \vartheta) \\ \times \psi_\Phi(z - \Phi + \pi/2 + \vartheta)\psi_\Phi(z - \Phi - \pi/2 - \vartheta),$$

$\mu = \frac{\pi}{2\Phi}$ ,  $C$  произвольная постоянная,

$$\sin \vartheta = \frac{\gamma}{\kappa} < 1, \quad \vartheta \in (0, \pi/2).$$

Функция Малюжинца  $\psi_\Phi(\cdot)$  является “минимальным” мероморфным решением функционального уравнения Малюжинца,

$$\frac{\psi_\Phi(z + 2\Phi)}{\psi_\Phi(z - 2\Phi)} = \cot\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

которое четно, регулярно в полосе  $|\operatorname{Re}(z)| < 2\Phi + \pi/2$  и

$$\psi_\Phi(z) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty dt \frac{\cosh(zt) - 1}{t \cosh(\pi t/2) \sinh(2\Phi t)},$$

имеет асимптотику  $\psi_\Phi(z) = C_0 \exp(-i\frac{\mu z}{4})(1 + o(1))$  в ней при  $\operatorname{Im} z \rightarrow \infty$ , см. раздел 6.2.2 в [3].

Проверка этого утверждения непосредственная и традиционная, см. раздел 6.1 в [3]. Заметим, что  $1/\sin \mu z$  решает простые уравнения  $F(z \pm \Phi) - F(-z \pm \Phi) = 0$ . Область изменения параметра  $\vartheta \in (0, \pi/2)$  соответствует спектральному интервалу  $\lambda < \gamma$ , где расположены собственные числа изучаемого лапласиана. Решение  $f$  стремится к константам при  $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$  в полосе  $|\operatorname{Re}(z)| < 2\pi$ .

#### §4. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Мы сначала немного упростим выражение для  $f$ . Воспользуемся тождеством  $\psi_\Phi(z + \Phi)\psi_\Phi(z - \Phi) = \psi_\Phi^2(\Phi)\psi_{\Phi/2}(z)$ , таким образом, имеем

$$f_0(z) = \psi_\Phi^4(\Phi)\psi_{\Phi/2}(z + \pi/2 + \vartheta)\psi_{\Phi/2}(z - \pi/2 - \vartheta).$$

Возьмем  $C = \psi_\Phi^{-4}(\Phi)$  и из (13) получим

$$f(z) = \frac{f_0(z)}{\sin(\mu z)}, \quad f_0(z) = \psi_{\Phi/2}(z + \pi/2 + \vartheta)\psi_{\Phi/2}(z - \pi/2 - \vartheta)$$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz e^{\kappa r \cos z} \left( \frac{\psi_{\Phi/2}(z + \varphi + \pi/2 + \vartheta) \psi_{\Phi/2}(z + \varphi - \pi/2 - \vartheta)}{\sin(\mu[z + \varphi])} + \frac{\psi_{\Phi/2}(z - \varphi + \pi/2 + \vartheta) \psi_{\Phi/2}(z - \varphi - \pi/2 - \vartheta)}{\sin(\mu[z - \varphi])} \right). \quad (14)$$

Основная идея в следующем. Мы изучим поведение интеграла в (14) при  $\kappa r \rightarrow \infty$ . Для этого, необходимо деформировать контур интегрирования  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$  в контуры наибоыстрейшего спуска (КНС)  $\Gamma_{\pi}$  и  $\Gamma_{-\pi}$ , Рис. 2. Заметим, что фазовая функция  $\cos z$  имеет две седловые точки  $z = \pm\pi$ , ( $z = 0$  не дает вклада в асимптотику). В процессе деформации несколько полюсов подынтегрального выражения могут быть захвачены. Эти полюсы показаны на Рис. 2 кружками при  $|\operatorname{Re}z| \leq \pi/2$  и заштрихованными кружками в противном случае. Вклады полюсов, показанных кружками, экспоненциально растут или лишь ограничены при  $\kappa r \rightarrow \infty$ . Другие полюсы приводят к вкладам, которые быстро убывают на бесконечности. Мы выберем параметр  $\vartheta$ , который пока не определен, надлежащим образом, чтобы компенсировать нежелательные полюса некоторыми нулями числителя в подынтегральном выражении (14), т.е. нулями  $f_0(z \pm \varphi) = \psi_{\Phi/2}(z \pm \varphi + \pi/2 + \vartheta) \psi_{\Phi/2}(z \pm \varphi - \pi/2 - \vartheta)$ . Это определит дискретное множество значений для  $\lambda_n = -\frac{\gamma^2}{\sin^2 \vartheta_n}$ , т.е. набор возможных собственных значений. На этом пути мы также вычислим соответствующие собственные функции.

Теперь мы обратимся к запрещенным полюсам, которые находятся в нулях  $\sin \frac{\pi}{2}(z \pm \varphi)$ , так как полюсы числителя находятся вне полосы  $|\operatorname{Re}z| \leq \pi/2$ . Обозначим  $z_m^{\pm}$  запрещенные полюса,

$$z_m^{\pm} \pm \varphi = 2\Phi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Предполагается, что они находятся на отрезке  $[-\Phi - \pi/2, \pi/2 + \Phi]$ .

Стоит напомнить, что нули функции Малюжинца  $\psi_{\Phi/2}(z)$  (см. раздел 6.1 в [3]) заданы выражением

$$\alpha_{mn}^{\pm} = \pm \left( \frac{\pi}{2} [2m - 1] + \Phi [2n - 1] \right), \quad m = 1, 3, 5, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

тогда как полюсы

$$\beta_{pq}^{\pm} = \pm \left( \frac{\pi}{2} [2p - 1] + \Phi [2q - 1] \right), \quad p = 2, 4, 6, \dots, \quad q = 1, 2, 3, \dots$$



Нули  $f_0(z)$ , которые могут быть использованы для компенсации, описываются

$$\begin{aligned}\zeta_n^+ &= \Phi[2n-1] - \vartheta, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \zeta_n^- &= \vartheta - \Phi[2n-1], \quad n = 1, 2, 3, \dots.\end{aligned}$$

Если  $\frac{\pi}{6} \leq \Phi < \frac{\pi}{2}$ , только один запрещенный полюс должен быть компенсирован, и мы возьмем  $\vartheta = \Phi$ . В случае  $\frac{\pi}{10} \leq \Phi < \frac{\pi}{6}$  имеется три таких полюса, и мы берем  $\vartheta$  из множества  $\{-3\Phi, \Phi, 3\Phi\}$ . В общем случае

$$-\frac{\pi}{2} - \Phi \leq 2\Phi m \leq \frac{\pi}{2} + \Phi$$

и

$$\frac{\pi}{2} \frac{1}{[2m+1]} \leq \Phi < \frac{\pi}{2} \frac{1}{[2m-1]}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Число  $N$  соответствующих значений  $\vartheta_n = \Phi(2n-1)$ , ( $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $\Phi < \pi/2$ ) для  $\vartheta$  равно  $N(\Phi) = \text{ent}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\Phi} - 1\right)\right) + 1$ , ( $\text{ent}(\cdot)$  – целая часть числа).

Введем обозначение

$$\lambda_m = -\frac{\gamma^2}{\sin^2(\Phi[2m-1])}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

Теперь мы построим гладкую функцию  $v_m(r, \varphi)$ , отвечающую  $\lambda_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$  в (15), которая принадлежит  $H^1(\Omega)$  и решает задачу. Тогда  $\lambda_m$ , является действительно собственным значением рассматриваемой задачи с собственной функцией  $v_m(r, \varphi)$ .

Продеформируем контур интегрирования в КНС как описано выше, тогда только полюсы вне полосы  $|\text{Re}z| \leq \pi/2$  дадут вклад (заштрихованные кружки на Рис. 2). Имеем ( $\vartheta = \vartheta_n$ )

$$\begin{aligned}u_n(r, \varphi) &= v_n(r, \varphi) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n \cup \Gamma_{-\pi}} dz e^{\kappa_n r \cos z} \left( \frac{f_0^n(z + \varphi)}{\sin(\mu[z + \varphi])} + \frac{f_0^n(z - \varphi)}{\sin(\mu[z - \varphi])} \right), \\ \kappa_n &= \sqrt{-\lambda_n},\end{aligned} \quad (16)$$

$$f_0^n(z) = \psi_{\Phi/2}(z + \pi/2 + \vartheta_n) \psi_{\Phi/2}(z - \pi/2 - \vartheta_n) \quad (17)$$

и

$$v_n(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\pi/2}^+ \cup \gamma_{-\pi/2}^-} dz e^{\kappa_n r \cos z} \left( \frac{f_0^n(z + \varphi)}{\sin(\mu[z + \varphi])} + \frac{f_0^n(z - \varphi)}{\sin(\mu[z - \varphi])} \right), \quad (18)$$

где контуры интегрирования  $\gamma_{\pi/2}^+ \cup \gamma_{-\pi/2}^-$  это прямоугольники, охватывающие захваченные полюсы (заштрихованные кружки на Рис. 2).

Интеграл в (16) по  $\Gamma_\pi \cup \Gamma_{-\pi}$  имеет порядок  $O(\exp(-\kappa_n r)/\sqrt{\kappa_n r})$  при  $\kappa_n r \rightarrow \infty$  ввиду метода перевала. Интеграл в (18) по контурам  $\gamma_{\pi/2}^+ \cup \gamma_{-\pi/2}^-$  вычисляется по теореме о вычетах в полюсах  $z_m^\pm = \pm\pi \mp \vartheta_n \pm \Phi(2m-1)$  функции  $f_0^n$ , которые соответственно расположены внутри контуров

$$v_n(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{n-1} C_m \left( e^{-\kappa_n r \cos[2\Phi m - \varphi]} + e^{-\kappa_n r \cos[2\Phi m + \varphi]} \right) \quad (19)$$

с

$$C_m = 2 \operatorname{res}_{z_m} \left( \frac{f_0^n(z + \varphi)}{\sin(\mu[z + \varphi])} + \frac{f_0^n(z - \varphi)}{\sin(\mu[z - \varphi])} \right).$$

Отметим, что решения (19) очевидно гладкие и ограниченные при  $\kappa_n r \rightarrow 0$ . Следующая лемма содержит основной результат этого параграфа и дает элементарное альтернативное выражение для коэффициентов  $C_m$  в (19).

**Лемма 3.** Пусть  $C_0 \neq 0$ , тогда  $\lambda_n = -\frac{\gamma^2}{\sin^2(\Phi[2n-1])}$  является собственным значением  $A_\gamma$  с собственной функцией  $v_n$ , задаваемой (19), где коэффициенты вычисляются рекуррентно

$$C_m = \frac{\sin(\Phi[2m-1]) - \gamma/\kappa_n}{\sin(\Phi[2m-1]) + \gamma/\kappa_n} C_{m-1}, \quad (20)$$

$$m = 1, 2, \dots, n-1, \quad C_0 = \frac{1}{2}.$$

Для любого фиксированного  $\Phi < \pi/2$  число собственных значений равно  $N(\Phi) = \operatorname{ent}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\Phi} - 1\right)\right) + 1$ . Конечное множество  $\{\lambda_n\}_{n=1,2,\dots,N(\Phi)}$  является множеством собственных значений, а  $v_n$ , задаваемые (19), (20), соответствующими собственными функциями.

Очевидно, что экспоненты в (19) это решения уравнения. Так как  $v_n$  является четной по  $\varphi$ , рассмотрим только краевое условие при  $\varphi = \Phi$

$$\left( \frac{1}{\kappa r} \frac{\partial v_n}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{\kappa} v_n \right) \Big|_{\varphi=\Phi} = 2C_0 \sin \Phi e^{-\kappa_n r \cos \Phi}$$

$$- 2C_0 \frac{\gamma}{\kappa_n} e^{-\kappa_n r \cos \Phi} - C_1 \sin \Phi e^{-\kappa_n r \cos \Phi} + C_1 \sin 3\Phi e^{-\kappa_n r \cos 3\Phi}$$

$$- C_1 \frac{\gamma}{\kappa_n} e^{-\kappa_n r \cos \Phi} - C_1 \frac{\gamma}{\kappa_n} e^{-\kappa_n r \cos 3\Phi} - C_2 \sin 3\Phi e^{-\kappa_n r \cos 3\Phi}$$

$$\begin{aligned}
& + C_2 \sin 5\Phi e^{-\kappa_n r \cos 5\Phi} - C_2 \frac{\gamma}{\kappa_n} e^{-\kappa_n r \cos 3\Phi} - C_2 \frac{\gamma}{\kappa_n} e^{-\kappa_n r \cos 5\Phi} - \dots \\
& \quad \dots - C_{n-2} \sin(\Phi[2n-5]) e^{-\kappa_n r \cos(\Phi[2n-5])} \\
& + C_{n-2} \sin(\Phi[2n-3]) e^{-\kappa_n r \cos(\Phi[2n-3])} - C_{n-2} \frac{\gamma}{\kappa_n} e^{-\kappa_n r \cos(\Phi[2n-5])} \\
& - C_{n-2} \frac{\gamma}{\kappa_n} e^{-\kappa_n r \cos(\Phi[2n-3])} - C_{n-1} \sin(\Phi[2n-3]) e^{-\kappa_n r \cos(\Phi[2n-3])} \\
& + C_{n-1} \sin(\Phi[2n-1]) e^{-\kappa_n r \cos(\Phi[2n-1])} - C_{n-1} \frac{\gamma}{\kappa_n} e^{-\kappa_n r \cos(\Phi[2n-3])} \\
& \quad - C_{n-1} \frac{\gamma}{\kappa_n} e^{-\kappa_n r \cos(\Phi[2n-1])} = 0,
\end{aligned}$$

где  $\frac{\gamma}{\kappa_n} = \sin(\Phi[2n-1])$ .

Заметим, что

$$C_m = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^m \frac{\sin(\Phi[2k-1]) - \gamma/\kappa_n}{\sin(\Phi[2k-1]) + \gamma/\kappa_n}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1. \quad (21)$$

Можно напрямую проверить, что  $\lambda = -\kappa^2 := -\gamma^2/\sin^2 \Phi$ ,  $v(r, \varphi) = e^{-\kappa r \cos \varphi}$  являются соответственно собственным числом и собственной функцией без применения Леммы 3. Вообще говоря, если анзац (19) для построения собственных функций угадан, то вычисление коэффициентов  $C_m$  в Лемме 3 является элементарной задачей. По-видимому, можно было предвидеть структуру собственных функций (19), исходя из физических соображений, рассматривая многократные отражения ‘падающей волны’ вида  $e^{-\kappa_1 r \cos \varphi}$  на сторонах угла в соответствии с геометрической оптикой.

Поучительно было бы рассмотреть случай  $\Phi \ll 1$ , считая, что число слагаемых  $n \sim N(\Phi) \gg 1$  в (19) велико. В этом случае  $C_{n-1}$  в (21) ( $m = n-1$ ) содержит большое число множителей в произведении, которые зависят от  $\Phi \ll 1$ . Такое произведение может быть вычислено асимптотически. Содержательным также является вопрос о том, все ли собственные функции найдены и, следовательно, имеют вид (19). Скорее всего, ответ на этот вопрос положительный.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Khalile, K. Pankrashkin, *Eigenvalues of Robin Laplacians in infinite sectors*. — *Mathematische Nachrichten* (2018), 928–965, DOI: 10.1002/mana.201600314

2. G. D. Maliuzhinets [Malyuzhinets], *Excitation, reflection and emission of surface waves from a wedge with given face impedances*. — Soviet Physics: Doklady, **3**, No. 4 (1958), 752–755.
3. V. M. Babich, M. A. Lyalinov, V. E. Grikurov: *Diffraction Theory. The Sommerfeld-Malyuzhinets Technique*, Alpha Science Ser. Wave Phenom. (Alpha Science, Oxford 2008)
4. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear Water Waves*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002).
5. F. Ursell, *Waves on a sloping beach*. — Proc. Royal Soc. London A, **214** (1952), 79–97.
6. M. Roseau, *Short waves parallel to the shore over a sloping beach*. — Comm. Pure Appl. Math. **11** A958 (1958), 433–493.

Lyalinov M. A. A comment on eigenvalues and eigenfunctions of Laplace operator in an angle with Robin boundary conditions.

The eigenvalues and eigenfunctions of the discrete spectrum for Robin Laplacians in an angle are constructively computed by means of the Sommerfeld integral and of the Malyuzhinets functional equations.

С.-Петербургский  
государственный университет  
E-mail: lyalinov@yandex.ru

Поступило 21 октября 2019 г.