

Е. А. Злобина, А. П. Киселев

ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ СПЛЭШ МОДЫ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Как показал Хёрмандер [1], у волнового уравнения с двумя пространственными переменными и постоянной скоростью $c > 0$,

$$\square U := U_{xx} + U_{zz} - c^{-2}U_{tt} = 0, \quad (1)$$

есть решения во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, которые имеют сингулярность в одной пространственной точке (x, z) , бегущей вдоль пространственной прямой со скоростью c . Хёрмандер построил пример такого решения (тесно связанный, как выяснилось в [2], с классическим некомплексифицированным решением Бейтмена [3]). Мы приводим простой пример решения с сингулярностью в бегущей точке, основанный на обобщении комплексифицированного решения Бейтмена на двумерный случай, см. [4, 5]:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\beta - ia}} f(\theta), \quad (2)$$

где f – произвольная функция одной комплексной переменной, а

$$\theta = \alpha + \frac{x^2}{\beta - ia}, \quad \alpha = z - ct, \quad \beta = z + ct, \quad (3)$$

и $a > 0$ – произвольная фиксированная постоянная. Ветвь квадратного корня в (2) можно выбрать любым образом. При аналитических в верхней полуплоскости f , гладких на вещественной оси, (2) удовлетворяет уравнению (1) при всех x, z и t .

Мы выбираем

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{-\theta}}, \quad (4)$$

тогда (2) превращается в

$$V = \frac{1}{\sqrt{-\alpha(\beta - ia) - x^2}}. \quad (5)$$

Ключевые слова: волновое уравнение, точные решения.
Работа частично поддержана грантом РФФ 17-11-01126.

Мы называем функцию (5) двумерной сплэш модой (splash mode) по аналогии с являющейся спецификацией комплексифицированного трехмерного решения Бейтмена функцией $v = f(\Theta)/(\beta - ia)$, $\Theta = \alpha + (x^2 + y^2)/(\beta - ia) + \text{Const}$ с $f(\Theta) = 1/\Theta$, рассматривавшейся под этим именем в [6, 7] и др. Эта функция сингулярна при $\text{Im Const} = 0$. В [8] доказано, что она удовлетворяет трехмерному однородному волновому уравнению $c^{-2}v_{tt} - v_{xx} - v_{yy} - v_{zz} = 0$ во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Функция (5) обращается в бесконечность в бегущей пространственной точке $\{z = ct, x = 0\}$. Тем не менее, в разделе 2 доказано, что (5) удовлетворяет однородному уравнению (1) в смысле обобщенных функций. Однако некомплексифицированная функция (5)

$$V_0 = V|_{a=0} = \frac{1}{\sqrt{-\alpha\beta - x^2}} \quad (6)$$

однородному уравнению (1) в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ не удовлетворяет. Это установлено в разделе 3.

§2. КОМПЛЕКСИФИЦИРОВАННАЯ СПЛЭШ МОДА

Теорема 1. *Функция (5) удовлетворяет однородному волновому уравнению (1) во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ в смысле обобщенных функций.*

Доказательство следует тому же плану, что и проведенное для трехмерного случая в [8], но несколько сложнее.

Доказательство. Для определенности фиксируем ветвь квадратного корня так, что $\arg \sqrt{\beta - ia} > 0$.

Действуя как в [8] нетрудно доказать, что V локально абсолютно интегрируема в \mathbb{R}^3 . Поэтому наше утверждение равносильно равенству

$$(\square V, \phi) = (V, \square \phi) = \int_{\mathbb{R}^3} dx dz dt V \square \phi = 0 \quad (7)$$

для произвольной основной функции $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Перейдем от переменных z, t к переменным α, β , см. (3). Рассмотрим область $\Omega_\varepsilon = \{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 : |\alpha| \geq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, в которой V , очевидно, удовлетворяет

уравнению (1). Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^3} dx dz dt V \square \phi = \frac{1}{2c} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} dx d\alpha d\beta V \square \phi. \quad (8)$$

Интегрируя по частям, с учетом финитности ϕ получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} dx d\alpha d\beta V \square \phi &= \int_{\Omega_\varepsilon} dx d\alpha d\beta \phi \square V \\ &+ 4 \int_{\mathbb{R}^2} d\beta dx ((V_\beta \phi)(x, \varepsilon, \beta) - (V_\beta \phi)(x, -\varepsilon, \beta)). \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку V удовлетворяет уравнению (1) в области Ω_ε , то первый интеграл в правой части равен нулю. Покажем, что второй интеграл стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассмотрим интеграл по x и сделаем в нём замену переменных $x = \sqrt{\varepsilon} \xi$.

$$\begin{aligned} &2 \int_{\mathbb{R}} dx ((V_\beta \phi)(x, \varepsilon, \beta) - (V_\beta \phi)(x, -\varepsilon, \beta)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{\phi(\sqrt{\varepsilon} \xi, \varepsilon, \beta)}{(-\xi^2 - \beta + ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\phi(\sqrt{\varepsilon} \xi, -\varepsilon, \beta)}{(-\xi^2 + \beta - ia)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{\phi(\sqrt{\varepsilon} \xi, 0, \beta)}{(-\xi^2 - \beta + ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\phi(\sqrt{\varepsilon} \xi, 0, \beta)}{(-\xi^2 + \beta - ia)^{\frac{3}{2}}} \right) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (10)$$

поскольку $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Последний интеграл в (10) можно записать как

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{\phi(\sqrt{\varepsilon} \xi, 0, \beta)}{(-\xi^2 - \beta + ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\phi(\sqrt{\varepsilon} \xi, 0, \beta)}{(-\xi^2 + \beta - ia)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{1}{(-\xi^2 - \beta + ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(-\xi^2 + \beta - ia)^{\frac{3}{2}}} \right) (\phi(\sqrt{\varepsilon} \xi, 0, \beta) - \phi(0, 0, \beta)) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{1}{(-\xi^2 - \beta + ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(-\xi^2 + \beta - ia)^{\frac{3}{2}}} \right) \phi(0, 0, \beta). \end{aligned} \quad (11)$$

Ввиду компактности носителя ϕ , первый интеграл стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Покажем, что

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{1}{(-\xi^2 - \beta + ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(-\xi^2 + \beta - ia)^{\frac{3}{2}}} \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(-\xi^2 - \beta + ia)^{\frac{3}{2}}} + \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(-\xi^2 + \beta - ia)^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (12)$$

В первом интеграле сделаем замену переменных

$$\xi = p \sqrt[4]{\beta^2 + a^2} \exp(i\varphi + i\frac{\pi}{2}),$$

а во втором

$$\xi = p \sqrt[4]{\beta^2 + a^2} \exp(i\varphi),$$

где $2\varphi = \arg(\beta - ia)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{1}{(-\xi^2 - \beta + ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(-\xi^2 + \beta - ia)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{1}{\beta - ia} \int_C \frac{dp}{(1 - p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (13)$$

где контур интегрирования C состоит из двух перпендикулярных прямых, см. Рис. 1; разрезы корня изображены волнистыми линиями.

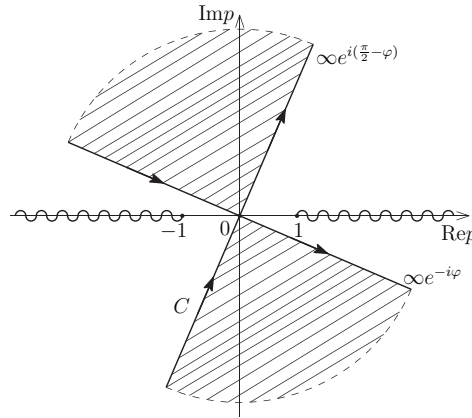


Рис. 1. Контур интегрирования C в (13) и разрезы корня $\sqrt{1 - p^2}$.

Поскольку подынтегральная функция достаточно быстро убывает при $|p| \rightarrow \infty$ и аналитична в заштрихованных секторах, интеграл в левой части (12) равен нулю. Следовательно, второе слагаемое в правой части (11) равно нулю.

Теорема доказана. \square

§3. НЕКОМПЛЕКСИФИЦИРОВАННАЯ СПЛЭШ МОДА

Рассмотрим функции

$$E_+ = \frac{1}{2\pi c} \frac{H(-\alpha\beta - x^2)}{\sqrt{-\alpha\beta - x^2}}, \quad E_- = \frac{1}{2\pi c} \frac{H(\alpha\beta + x^2)}{\sqrt{\alpha\beta + x^2}}, \quad (14)$$

где H – функция Хевисайда, $H(s) = 1$ при $s \geq 0$ и $H(s) = 0$ при $s < 0$, а ветвь корня выбрана так, что $\sqrt{1} = 1$. Несмотря на внешнее сходство функций E_{\pm} , они удовлетворяют разным уравнениям: функция E_+ является фундаментальным решением волнового уравнения, а E_- удовлетворяет однородному волновому уравнения :

$$\square E_+ = \delta(x)\delta(z)\delta(t), \quad \square E_- = 0. \quad (15)$$

Это следует из результата Хёрмандера, см. [1], стр. 169, теорема 6.2.1.

Теперь заметим, что некомплексифицированная функция (6) представима в виде линейной комбинации E_+ и E_- :

$$\begin{aligned} 2\pi c(E_+ - iE_-) &= \frac{H(-\alpha\beta - x^2)}{\sqrt{-\alpha\beta - x^2}} + \frac{H(\alpha\beta + x^2)}{i\sqrt{\alpha\beta + x^2}} \\ &= \frac{H(-\alpha\beta - x^2) + H(\alpha\beta + x^2)}{\sqrt{-\alpha\beta - x^2}} = V_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Следовательно,

$$\square V_0 = 2\pi c\delta(x)\delta(z)\delta(t). \quad (17)$$

§4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как и в трехмерном случае, см. [8], Теорема 1 легко обобщается на комплексифицированные решения Бейтмена, имеющие такую же сингулярность, что и (5). Например, выбрав в (2) в соответствии с [9]

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{-\theta}} \exp\left(2ka\left(1 - \sqrt{1 - \frac{i\theta}{a}}\right)\right), \quad (18)$$

где $k > 0$ фиксировано, а ветвь корня выбрана так, чтобы $\operatorname{Re}\sqrt{1 - i\theta/a} \geq 0$, приходим к решению, экспоненциально убывающему по всем переменным с удалением от сингулярной точки.

Авторы благодарят А. С. Благовещенского и А. Б. Плаченова за критику и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, Т. I, Мир, М., 1986
2. А. С. Благовещенский, А. П. Киселев, *Двумерные волны Бейтмена–Хёрмандера с сингулярностью в бегущей точке*. — Матем. заметки. **106**, (2019) 793–796.
3. H. Bateman, *The conformal transformations of space of four dimensions and their applications to geometrical optics*. — Proc. London Math. Soc. **7**, (1909) 70–89.
4. А. П. Киселев, М. В. Перель, *Относительно неискажающиеся решения m -мерного волнового уравнения*. — Дифференциальные уравнения **38** (2002), 1128–1129.
5. А. П. Киселев, М. В. Плаченков, *Точные решения m -мерного волнового уравнения из параксиальных. Дальнейшее обобщение решения Бейтмена*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **393**, (2011) 167–177.
6. R. W. Ziolkowski, *Localized transmission of electromagnetic energy*. — Phys. Rev. A. **39**, (1989) 2005–2011.
7. S. Feng, H. G. Winful, R. W. Hellwarth, *Spatiotemporal evolution of focused single-cycle electromagnetic pulses*. — Phys. Rev. E. **59**, (1999) 4630–4649.
8. А. С. Благовещенский, А. П. Киселев, А. М. Тагирджанов, *Простые решения волнового уравнения с сингулярностью в бегущей точке, основанные на комплексифицированном решении Бейтмена*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **438**, (2015) 73–82.
9. A. P. Kiselev, M. P. Perel, *Highly localized solutions of the wave equation*. — J. Math. Phys. **41**, (2000) 1934–1955.

Zlobina E. A., Kiselev A. P. Two-dimensional singular splash modes.

It is proved that a certain simple specification of the 2D Bateman-type complexified solution with a singularity at a running point satisfies the homogeneous wave equation, while the respective non-complexified function does not.

С.-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург 199034, Россия

Поступило 7 ноября 2019 г.

E-mail: ezlobina2@yandex.ru

E-mail: aleksei.kiselev@gmail.com

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН;
Институт проблем
машиноведения РАН,
С.-Петербург 199178, Россия
E-mail: kiselev@pdmi.ras.ru