

М. Н. Демченко

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В
ГОРИЗОНТАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ПО
ГРАНИЧНЫМ ДАННЫМ**

К юбилею Михаила Игоревича Белишева

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть функция $u(x, y, t)$ удовлетворяет гиперболическому уравнению

$$\partial_t^2 u - \Delta u + qu = 0 \quad (1)$$

при $(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ (полуплоскость), $t \in \mathbb{R}$, и условиям

$$u|_{y=0} = f, \quad \partial_y u|_{y=0} = g. \quad (2)$$

В работе изучается задача определения решения u по данным Коши f, g . Рассматривается частный случай, когда коэффициент q в уравнении (1) является функцией переменной x . В этом случае уравнение (1) моделирует нестационарный волновой процесс в горизонтально неоднородной среде. Мы получим соотношение, позволяющее определить решение u в любой точке (x_0, y_0, t_0) по значениям функций f, g на некотором ограниченном множестве точек (x, t) , зависящем от (x_0, y_0, t_0) . Будет показано, что это соотношение применимо также в случае, когда уравнение (1) выполняется в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$, где Ω – подмножество полуплоскости. Предполагается, что пересечение границы $\partial\Omega$ с границей полуплоскости непусто, а данные Коши f, g известны в точках, пространственные проекции которых лежат в этом пересечении.

Задача Коши (1), (2) не является корректной по Адамару [1]. Однако, решение u однозначно определяется в некоторой части пространственно-временного цилиндра, зависящей от множества, на котором известны f, g . Это следует из единственности продолжения решения уравнения (1) через нехарактеристическую поверхность. Свойство

Ключевые слова: волновое уравнение, задача Коши, продолжение волнового поля, горизонтально неоднородная среда.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00529-а.

единственности продолжения доказано для широкого класса линейных уравнений в частных производных [1, 2]. Для гиперболических уравнений наиболее полные результаты получены в работе [3]. В частности, эти результаты гарантируют единственность продолжения решения уравнения вида (1), если q – достаточно гладкая функция, зависящая от x, y .

В случае $q \equiv 0$ в ряде работ предложены алгоритмы решения изучаемой здесь задачи Коши. Одним из первых является классический результат Р. Куранта для ультрагиперболических уравнений в полупространстве (см. [4]). В работах [5, 6] рассмотрена задача Коши для волнового уравнения в области. В работе [7] для задачи в трехмерном полупространстве получена формула, позволяющая определить решение волнового уравнения по данным Коши, известным на неограниченном подмножестве пространственно-временной границы.

Задачи определения решения гиперболических уравнений по граничным данным возникают в таких приложениях как геофизика [8], фотоакустическая томография [9], определение источников волн цунами [10], а также в коэффициентных обратных задачах [11].

§2. СВЕДЕНИЯ ОБ ОПЕРАТОРЕ ШРЕДИНГЕРА НА ОСИ

Для решения задачи Коши (1), (2) мы воспользуемся разложением решения u по собственным функциям оператора Шредингера $\mathcal{L} = -\partial_x^2 + q(x)$ на оси. В случае $q \equiv 0$ это разложение сводится к преобразованию Фурье по переменной x

$$\hat{u}(k, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} u(x, y, t) dx,$$

которое удовлетворяет равенствам

$$\partial_t^2 \hat{u} - \partial_y^2 \hat{u} + k^2 \hat{u} = 0, \quad \hat{u}|_{y=0} = \hat{f}, \quad \partial_y \hat{u}|_{y=0} = \hat{g}.$$

В случае произвольного q мы получим такую же задачу Коши со спектральным параметром. Решив эту задачу и сделав обратное преобразование по k , мы получим соотношение, связывающее u с данными f, g . После этого мы покажем, что для применения полученного соотношения достаточно данных Коши на ограниченном множестве.

Нам понадобятся некоторые факты об операторе Шредингера [12]. Для того, чтобы этот оператор был корректно определен, нужны некоторые ограничения на потенциал q . Мы будем рассматривать оператор

Шредингера только с C^∞ -гладким финитным вещественнозначным потенциалом q . В этом случае оператор \mathcal{L} , определенный на функциях из $L_2(\mathbb{R})$, имеющих вторую производную из $L_2(\mathbb{R})$ (пространство Соболева $W_2^2(\mathbb{R})$), является самосопряженным оператором в $L_2(\mathbb{R})$. Оператор \mathcal{L} имеет абсолютно непрерывный спектр кратности два, заполняющий полурось $\{\lambda \geq 0\}$. Кроме того, \mathcal{L} может иметь дискретный спектр, состоящий из конечного числа отрицательных простых собственных чисел, которые нам удобно обозначить $\{-\varkappa_l^2\}_{l=1}^M$, $\varkappa_l > 0$.

Пусть A – достаточно большое число, такое что $\text{supp } q \subset [-A, A]$. Любое решение уравнения Шредингера

$$-\partial_x^2 \varphi + q\varphi = k^2 \varphi \quad (3)$$

при $|x| > A$ равно линейной комбинации экспонент $e^{\pm ikx}$:

$$\varphi(x) = \alpha_+ e^{ikx} + \alpha_- e^{-ikx}, \quad x > A, \quad (4)$$

$$\varphi(x) = \beta_+ e^{ikx} + \beta_- e^{-ikx}, \quad x < -A. \quad (5)$$

Для вещественных k , отличных от нуля, определим функцию $\varphi_1(x, k)$ как решение уравнения (3) на всей оси, для которого коэффициенты в представлениях (4),(5) удовлетворяют равенствам $\alpha_- = 1/\sqrt{2\pi}$, $\beta_+ = 0$. Далее определим функцию $\varphi_2(x, k)$ как решение уравнения (3), для которого выполнено $\alpha_- = 0$, $\beta_+ = 1/\sqrt{2\pi}$. При $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ пара функций $\varphi_{1,2}(x, k)$ (так же, как и пара функций $\varphi_{1,2}(x, -k)$) образует базис обобщенных собственных функций, отвечающих точке непрерывного спектра k^2 . В дальнейшем мы будем рассматривать $\varphi_{1,2}(x, k)$ только при $k > 0$.

Наряду с функциями $\varphi_{1,2}(x, k)$ мы введем функцию $\varphi_0(x, k)$, определенную при $x \in \mathbb{R}$ и k из конечного набора мнимых чисел $\{i\varkappa_l\}_{l=1}^M$, связанных с дискретным спектром. Для $k = i\varkappa_l$ положим функцию $\varphi_0(\cdot, i\varkappa_l)$ равной нормированной собственной функции оператора \mathcal{L} , отвечающей собственному значению $-\varkappa_l^2$. Нормированная собственная функция определена однозначно с точностью до множителя вида $e^{i\alpha}$, который мы выбираем произвольным образом.

Произвольная функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ допускает разложение $\hat{\psi} = (\hat{\psi}_0, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$ по собственным функциям оператора \mathcal{L} ,

$$\hat{\psi}_j(k) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \varphi_j(x, k)^* dx, \quad j = 0, 1, 2 \quad (6)$$

(здесь и далее * означает комплексное сопряжение), где функции $\widehat{\psi}_{1,2}(k)$ определены при $k > 0$, а функция $\widehat{\psi}_0(k)$ – при $k \in \{i\kappa_l\}_{l=1}^M$. Указанное преобразование является унитарным отображением в следующих пространствах

$$L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^M, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L_2(\mathbb{R}_+). \quad (7)$$

Обратное преобразование записывается в виде

$$\psi(x) = \sum_{j=1,2} \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{\psi}_j(k) \varphi_j(x, k) dk + \sum_{l=1}^M \widehat{\psi}_0(i\kappa_l) \varphi_0(x, i\kappa_l). \quad (8)$$

Диагональное представление оператора \mathcal{L} реализуется с помощью разложения по собственным функциям. А именно, если ψ принадлежит области определения оператора \mathcal{L} и $\tau = \mathcal{L}\psi$, то

$$\widehat{\tau}_j(k) = k^2 \widehat{\psi}_j(k), \quad j = 0, 1, 2. \quad (9)$$

Как видно из данных выше определений, в равенствах, подобных (9), переменная k может быть любым положительным числом при $j = 1, 2$ и $k \in \{i\kappa_l\}_{l=1}^M$ при $j = 0$.

Для функции вещественной переменной $\Phi(\lambda)$ действие функции от оператора $\Phi(\mathcal{L})$ может быть описано равенством

$$\widehat{\tau}_j(k) = \Phi(k^2) \widehat{\psi}_j(k), \quad j = 0, 1, 2, \quad (10)$$

где $\tau = \Phi(\mathcal{L})\psi$. Нам также понадобится следующее представление для $\Phi(\mathcal{L})$ в случае, когда $\Phi(\lambda)$ – аналитическая функция комплексной переменной,

$$\Phi(\mathcal{L}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi(\lambda) (\mathcal{L} - \lambda I)^{-1} d\lambda, \quad (11)$$

где интеграл берется по подходящему контуру Γ , который охватывает спектр оператора \mathcal{L} и ориентирован по часовой стрелке. Резольвента $(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1}$ в этом представлении является интегральным оператором с непрерывным ядром, равным функции Грина $G_\lambda(x_0, x)$ для уравнения (3) при $\lambda = k^2$. В дальнейшем нам понадобится следующая оценка (см., например, [12])

$$|G_{k^2}(x_0, x)| \leq C(q) e^{-\operatorname{Im} k |x-x_0|} / |k| \quad (12)$$

для любого $k \in \mathbb{C}$, такого что $\operatorname{Im} k \geq 1 + \max\{\kappa_l\}_{l=1}^M$.

§3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ u

В этом параграфе мы опишем схему решения рассматриваемой задачи Коши в предположении, что q имеет компактный носитель. Мы также будем предполагать, что решение $u(x, y, t)$ уравнения (1) (а значит, и данные Коши f, g) финитны по x : для любого $T > 0$ сужение u на множество $\{0 \leq y \leq T, |t| \leq T\}$ финитно. Заметим, что такие решения существуют – достаточно взять решение начально-краевой задачи для уравнения (1) с финитными начальными данными (это следует из конечности скорости распространения волн, описываемых данным уравнением). В п. 5 требования финитности потенциала q и решения u будут сняты.

Применив к уравнению (1) преобразование (6), мы получим ($j = 0, 1, 2$)

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, k)^* (\partial_t^2 - \partial_y^2 + \mathcal{L})u(x, y, t) dx = (\partial_t^2 - \partial_y^2 + k^2)\hat{u}_j(k, y, t).$$

Здесь мы воспользовались перестановочностью производных по y, t и знака интеграла, которая следует из гладкости u и финитности функции $u(\cdot, y, t)$, а также из ограниченности φ_j по x при фиксированном k . Мы также применили соотношение (9). Поступая аналогичным образом с соотношениями (2), мы приходим к следующей задаче Коши для $\hat{u}_j(k, y, t)$, $j = 0, 1, 2$:

$$\partial_t^2 \hat{u}_j - \partial_y^2 \hat{u}_j + k^2 \hat{u}_j = 0, \quad \hat{u}_j|_{y=0} = \hat{f}_j, \quad \partial_y \hat{u}_j|_{y=0} = \hat{g}_j. \quad (13)$$

Фундаментальное решение этой задачи имеет вид

$$\theta(y - |t|) r(k, y, t), \quad r(k, y, t) = \frac{1}{2} J_0 \left(ik \sqrt{y^2 - t^2} \right)$$

(θ – функция Хевисайда, J_0 – функция Бесселя). Это можно проверить непосредственно или вывести из результатов [4, гл. 5]. В дальнейшем нам понадобятся оценки роста функций $r(k, y, t)$ и $\partial_y r(k, y, t)$ при больших (в том числе, комплексных) k . Эти оценки мы получим из следующего представления для функции Бесселя [4]

$$J_0(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\zeta \sin s} ds,$$

которое означает, что

$$r(k, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{k\sqrt{y^2-t^2} \cdot \sin s} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{ch} \left(k\sqrt{y^2-t^2} \cdot \sin s \right) ds,$$

$$\partial_y r(k, y, t) = \frac{ky}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sh} \left(k\sqrt{y^2-t^2} \cdot \sin s \right)}{\sqrt{y^2-t^2}} \sin s ds$$

(заметим, что $\partial_y r(k, y, t)$ не имеет сингулярности при $|t| = y$). Отсюда следуют нужные нам неравенства для произвольного $k \in \mathbb{C}$:

$$|r(k, y, t)| \leq \frac{1}{2} e^{|k'|\sqrt{y^2-t^2}}, \quad |\partial_y r(k, y, t)| \leq Ck^2 y e^{|k'|\sqrt{y^2-t^2}}, \quad (14)$$

где $k' = \operatorname{Re} k$. Во второй оценке мы воспользовались неравенством $|\zeta^{-1} \operatorname{sh} \zeta| \leq C e^{|\operatorname{Re} \zeta|}$. Отметим, что полученные оценки не оптимальны. Однако, их будет достаточно для наших целей.

Запишем решение задачи (13) с помощью фундаментального решения

$$\begin{aligned} \hat{u}_j(k, y_0, t_0) &= \frac{1}{2} \left(\hat{f}_j(k, t_0 + y_0) + \hat{f}_j(k, t_0 - y_0) \right) \\ &+ \int_{|t-t_0| \leq y_0} \left[\partial_{y_0} r(k, y_0, t-t_0) \hat{f}_j(k, t) + r(k, y_0, t-t_0) \hat{g}_j(k, t) \right] dt. \end{aligned}$$

Умножив обе части равенства на e^{-hk^2} , $h > 0$, мы получим

$$\begin{aligned} e^{-hk^2} \hat{u}_j(k, y_0, t_0) &= \frac{1}{2} e^{-hk^2} \left(\hat{f}_j(k, t_0 + y_0) + \hat{f}_j(k, t_0 - y_0) \right) \\ &+ \int_{|t-t_0| \leq y_0} e^{-hk^2} \left[\partial_{y_0} r(k, y_0, t-t_0) \hat{f}_j(k, t) + r(k, y_0, t-t_0) \hat{g}_j(k, t) \right] dt. \end{aligned}$$

При фиксированных y_0, t_0 функция $\hat{u}_j(k, y_0, t_0)$ переменной k принадлежит \mathcal{H}_j (см. (7)), поэтому обе части полученного равенства также принадлежат \mathcal{H}_j . Поскольку индекс j может принимать все возможные значения $0, 1, 2$, мы можем рассматривать обе части равенства как элементы \mathcal{H} . В силу оценок (14) подинтегральное выражение в правой части быстро убывает при больших k благодаря регуляризирующему множителю e^{-hk^2} . Поэтому подинтегральное выражение можно рассматривать как элемент пространства \mathcal{H} , непрерывно зависящий

от t , а интеграл по t – как интеграл от непрерывной функции переменной t со значениями в \mathcal{H} . Применим теперь обратное преобразование (8) к обеим частям равенства. Это преобразование, примененное к последнему слагаемому в правой части, может быть внесено под знак интеграла. С учетом (10) мы получим следующее равенство в $L_2(\mathbb{R})$

$$e^{-h\mathcal{L}}u(\cdot, y_0, t_0) = \frac{1}{2}e^{-h\mathcal{L}}(f(\cdot, t_0 + y_0) + f(\cdot, t_0 - y_0)) \\ + \int_{|t-t_0| \leq y_0} [\Phi_h^D(\mathcal{L}; y_0, t-t_0) f(\cdot, t) + \Phi_h^N(\mathcal{L}; y_0, t-t_0) g(\cdot, t)] dt. \quad (15)$$

Здесь

$$\Phi_h^D(\lambda; y, t) = e^{-h\lambda} \partial_y r(\sqrt{\lambda}, y, t), \quad \Phi_h^N(\lambda; y, t) = e^{-h\lambda} r(\sqrt{\lambda}, y, t). \quad (16)$$

В обеих частях равенства (15) функции от оператора \mathcal{L} применяются к элементам $L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что соответствующие операторы ограничены в $L_2(\mathbb{R})$, поскольку функции $e^{-h\lambda}$, $\Phi_h^D(\lambda; y, t)$, $\Phi_h^N(\lambda; y, t)$ переменной λ ограничены на спектре оператора \mathcal{L} .

Перейдем к пределу $h \rightarrow 0$ в равенстве (15). Для $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ функция $e^{-h\mathcal{L}}\psi$ при $h \rightarrow 0$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к ψ . Применив это правило к $\psi = u(\cdot, y_0, t_0)$ и $\psi = f(\cdot, t_0 \pm y_0)$, мы получим

$$u(\cdot, y_0, t_0) = \frac{1}{2}(f(\cdot, t_0 + y_0) + f(\cdot, t_0 - y_0)) \\ + \lim_{h \rightarrow 0} \int_{|t-t_0| \leq y_0} [\Phi_h^D(\mathcal{L}; y_0, t-t_0) f(\cdot, t) + \Phi_h^N(\mathcal{L}; y_0, t-t_0) g(\cdot, t)] dt \quad (17)$$

(предел понимается в смысле $L_2(\mathbb{R})$).

Соотношение (17) позволяет найти решение u по данным Коши f, g . Это соотношение локально по t – при фиксированных y_0, t_0 решение $u(\cdot, y_0, t_0)$ определяется данными Коши на конечном временном интервале $|t-t_0| \leq y_0$. В п. 4 мы покажем, что соотношение (17) может быть локализовано по обоим переменным x, t в том смысле, что можно найти u в фиксированной точке (x_0, y_0, t_0) по значениям функций f, g на ограниченном множестве, зависящем от (x_0, y_0, t_0) . Однако, сначала нужно убедиться, что равенство (17) выполняется поточечно. Для этого мы вновь обратимся к слагаемым вида $e^{-h\mathcal{L}}\psi$ в равенстве (15).

Заметим, что $e^{-h\mathcal{L}}\psi = \Psi(\cdot, h)$, где Ψ является решением параболического уравнения

$$\partial_h \Psi = \Delta \Psi - q\Psi,$$

в котором h играет роль времени, с начальными данными $\Psi|_{h=0} = \psi$. Поэтому при любом $h > 0$ функция $e^{-h\mathcal{L}}\psi$ непрерывна на \mathbb{R} . Кроме того, в нашем случае в качестве начальных данных ψ берутся гладкие финитные функции, поэтому

$$(e^{-h\mathcal{L}}\psi)(x_0) = \Psi(x_0, h) \rightarrow \psi(x_0), \quad h \rightarrow 0$$

при всех $x_0 \in \mathbb{R}$ (см., например, [13, гл. IV]). Из этих наблюдений следует, что левая часть и первое слагаемое в правой части (15) являются непрерывными функциями на \mathbb{R} , которые имеют поточечные пределы при $h \rightarrow 0$. Следовательно, это же верно для интеграла в правой части (15). Таким образом, равенство (17) выполнено поточечно:

$$u(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{2} (f(x_0, t_0 + y_0) + f(x_0, t_0 - y_0)) + \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{|t-t_0| \leq y_0} [\Phi_h^D(\mathcal{L}; y_0, t-t_0) f(\cdot, t) + \Phi_h^N(\mathcal{L}; y_0, t-t_0) g(\cdot, t)] dt \Big|_{x_0} \right\} \quad (17')$$

для любых $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 > 0$. В фигурных скобках стоит значение интеграла, понимаемого как функция на \mathbb{R} , в точке x_0 .

§4. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СООТНОШЕНИЯ (17')

Обратимся к функциям от оператора \mathcal{L} , входящим в правую часть соотношения (17'). Согласно (11) имеем ($|t| \leq y_0$)

$$\Phi_h^N(\mathcal{L}; y_0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi_h^N(\lambda; y_0, t) (\mathcal{L} - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Сделаем замену переменной $k = \sqrt{\lambda}$. Можно выбрать ветвь корня, так чтобы на контуре интегрирования выполнялось $\text{Im } k > 0$. Продеформировав контур интегрирования, получаем

$$\Phi_h^N(\mathcal{L}; y_0, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty+ic/h}^{+\infty+ic/h} \Phi_h^N(k^2; y_0, t) (\mathcal{L} - k^2 I)^{-1} k dk.$$

Здесь c, h – любые положительные числа, такие что $c/h > \varkappa_l$, $l = 1, \dots, M$. Для ядра $K_h^N(x_0, x; y_0, t)$ оператора $\Phi_h^N(\mathcal{L}; y_0, t)$ это равенство означает, что

$$K_h^N(x_0, x; y_0, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty+ic/h}^{+\infty+ic/h} \Phi_h^N(k^2; y_0, t) G_{k^2}(x_0, x) k dk$$

(напомним, что $G_{k^2}(x_0, x)$ – функция Грина для уравнения (3) при $\lambda = k^2$). Функция Φ_h^N быстро убывает при больших k . Учитывая также, что ядро $G_{k^2}(x_0, x)$ ограничено на контуре интегрирования в силу (12) и непрерывно по x_0, x , ядро K_h^N также непрерывно по x_0, x .

Сделав замену переменной интегрирования в полученной формуле для K_h^N , с учетом определения (16) для $|t| \leq y_0$ мы получим

$$K_h^N(x_0, x; y_0, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} e^{-k^2/h} r(k/h, y_0, t) G_{(k/h)^2}(x_0, x) h^{-2} k dk. \quad (18)$$

При фиксированном c и достаточно малых h модуль подинтегрального выражения оценивается с помощью (12) и (14) величиной (с точностью до множителя $C(q)$)

$$h^{-1} e^{-c|x-x_0|/h} e^{(|k'|z - \operatorname{Re} k^2)/h} = h^{-1} e^{-c|x-x_0|/h} e^{(|k'|z - k'^2 + c^2)/h},$$

где $z = \sqrt{y_0^2 - t^2}$. В силу оценки $e^{|k'|z/h} < e^{k'z/h} + e^{-k'z/h}$ полученное выражение не превосходит

$$h^{-1} e^{(-c|x-x_0| + z^2/4 + c^2)/h} \sum_{\pm} e^{-(k' \pm z/2)^2/h}.$$

Взяв $c = |x - x_0|/2$ и проинтегрировав по k' , мы получим, что интеграл (18) по абсолютной величине не превосходит

$$Ch^{-1/2} e^{(y_0^2 - t^2 - (x-x_0)^2)/(4h)}.$$

Отсюда видно, что если $(x - x_0)^2 + t^2 > y_0^2$, то интеграл (18) стремится к нулю при $h \rightarrow 0$. Таким образом,

$$\lim_{h \rightarrow 0} K_h^N(x_0, x; y_0, t) = 0, \quad (x - x_0)^2 + t^2 > y_0^2, \quad (19)$$

причем предел достигается равномерно по x, y_0, t на компактах, лежащих в

$$\{(x, y_0, t) \mid (x - x_0)^2 + t^2 > y_0^2, |t| \leq y_0\}.$$

Для ядра $K_h^D(x_0, x; y_0, t)$ оператора $\Phi_h^D(\mathcal{L}; y_0, t)$ верно утверждение, аналогичное (19).

Нам удобно ввести обозначения

$$K_h = (K_h^D, K_h^N), \quad F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Соотношение (19) и его аналог для K_h^D в этих обозначениях принимают вид

$$\lim_{h \rightarrow 0} K_h(x_0, x; y_0, t) = 0, \quad (x - x_0)^2 + t^2 > y_0^2, \quad (19')$$

причем предел достигается равномерно в смысле, указанном в (19).

Запишем соотношение (17') в терминах K_h

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, t_0) &= \frac{1}{2} (f(x_0, t_0 + y_0) + f(x_0, t_0 - y_0)) \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \int_{|t-t_0| \leq y_0} dt \int_{\mathbb{R}} K_h(x_0, x; y_0, t - t_0) F(x, t) dx. \end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношением (19'), в котором предел достигается равномерно на компактах, а также нашим предположением финитности функций u, f, g по x , мы можем сузить множество интегрирования в интеграле по x до интервала $|x - x_0| \leq y_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, t_0) &= \frac{1}{2} (f(x_0, t_0 + y_0) + f(x_0, t_0 - y_0)) \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \int_{|t-t_0| \leq y_0} dt \int_{|x-x_0| \leq y_0 + \varepsilon} K_h(x_0, x; y_0, t - t_0) F(x, t) dx, \quad (20) \end{aligned}$$

которое является локальной версией соотношения (17') – для определения u требуются данные Коши на ограниченном множестве.

Вывод формулы (20) из соотношения (17') основан на том, что ядро K_h стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, если (x, t) лежит вне некоторого ограниченного множества. Однако, необходимо отметить, что если (x, t) принадлежит этому множеству, ядро K_h , вообще говоря, экспоненциально быстро растет при $h \rightarrow 0$. В случае $q \equiv 0$ это следует из достаточно явной формулы для ядра, полученной в [5]. Таким образом, подинтегральное выражение в правой части (20) быстро растет, и предел интеграла, вообще говоря, не существует, если f, g – произвольные гладкие функции, не являющиеся данными Коши. Поэтому

если данные известны с погрешностью, этот предел следует аппроксимировать значением интеграла при некотором положительном h .

§5. ОБОБЩЕНИЕ СООТНОШЕНИЯ (20)

В этом параграфе мы покажем, что для применимости формулы (20) не обязательно, чтобы уравнение (1) было выполнено на всей полуплоскости. Мы рассмотрим случай, когда решение $u(x, y, t)$ определено при $(x, y) \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, где Ω – ограниченное открытое (в относительной топологии) подмножество полуплоскости $\{y \geq 0\}$. Мы будем считать, что граница $\partial\Omega$ пересекается с прямой $\{y = 0\}$. Данные Коши будут считаться известными на множестве, пространственная проекция которого лежит в этом пересечении.

Уравнение (1) имеет смысл, когда коэффициент $q(x)$ определен на достаточно большом интервале, зависящем от Ω . Мы будем считать, что $q(x)$ допускает гладкое продолжение на всю ось. Ясно, что это продолжение можно выбрать финитным. В этом случае оператор Шредингера \mathcal{L} , а вместе с ним и ядро K_h в правой части (20), корректно определены. Из следующей теоремы вытекает, в частности, что выбор продолжения потенциала q не влияет на значение правой части в (20).

Теорема 1. *Предположим, что C^∞ -гладкая функция $u(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (1) в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$. Коэффициент q в уравнении предполагается C^∞ -гладкой финитной вещественнозначной функцией переменной $x \in \mathbb{R}$. Пусть для точки $(x_0, y_0) \in \Omega$ замкнутое множество*

$$\{(x, y) \mid |x - x_0| \leq y_0 - y, y \geq 0\} \quad (21)$$

содержится в Ω (см. рис. 1). Тогда для любого достаточно малого положительного ε имеет место соотношение (20), в котором f, g – данные Коши, определяемые равенствами (2).

Для доказательства теоремы выберем гладкую функцию $\chi(x, y)$ на полуплоскости $\{y \geq 0\}$ с носителем в Ω , равную единице в окрестности множества (21). Положим $\tilde{u}(x, y, t) = \chi(x, y)u(x, y, t)$, если $(x, y) \in \Omega$, и $\tilde{u}(x, y, t) = 0$ в противном случае. Тем самым мы получим гладкую функцию, определенную при (x, y) из полуплоскости и $t \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} + q\tilde{u} = \rho, \quad \tilde{u}|_{y=0} = \tilde{f}, \quad \partial_y \tilde{u}|_{y=0} = \tilde{g}, \quad (22)$$

где

$$\rho = -2\partial_x \chi \partial_x u - u\Delta \chi, \quad \tilde{f} = \chi f, \quad \tilde{g} = \chi g + f\partial_y \chi$$

(во втором и третьем равенствах подразумеваются сужения χ и $\partial_y \chi$ на $\{y = 0\}$).

К задаче Коши (22) применимо рассуждение, приведенное в пп. 3, 4. Единственная модификация связана с наличием функции ρ в правой части волнового уравнения. В результате мы получаем следующий аналог равенства (20)

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_0, y_0, t_0) &= \frac{1}{2} \left(\tilde{f}(x_0, t_0 + y_0) + \tilde{f}(x_0, t_0 - y_0) \right) \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{|t-t_0| \leq y_0} dt \int_{|x-x_0| \leq y_0 + \varepsilon} K_h(x_0, x; y_0, t - t_0) \tilde{F}(x, t) dx \right. \\ &\left. + \int_0^{y_0} dy \int_{|t-t_0| \leq y_0 - y} dt \int_{\mathbb{R}} K_h^N(x_0, x; y_0 - y, t - t_0) \rho(x, y, t) dx \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{F} = (\tilde{f}, \tilde{g})^T$, ε – любое положительное число. Соотношение (19) показывает, что в последнем слагаемом в фигурных скобках внутренний интеграл по \mathbb{R} можно заменить на интеграл по любой окрестности интервала $|x - x_0| \leq y_0 - y$. После этого кратный интеграл по x, y, t будет зависеть только от значений функции ρ в точках (x, y, t) , таких что (x, y) принадлежит соответствующей окрестности множества (21). Однако, если эта окрестность выбрана достаточно малой, выполнено $\chi = 1$, а значит, $\rho = 0$. Таким образом, слагаемое в (23), содержащее ρ , можно отбросить. Аналогичным образом в первом слагаемом в фигурных скобках можно заменить \tilde{F} на F , если ε выбрано таким малым, что граница $\partial\Omega$ содержит интервал $[x_0 - y_0 - \varepsilon, x_0 + y_0 + \varepsilon]$.

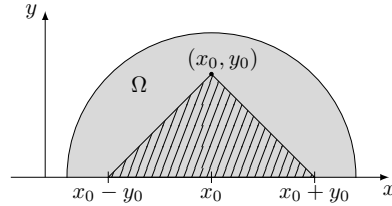


Рис. 1. Область Ω и множество (21) (заштрихованная часть).

Остается заметить, что $\tilde{f}(x_0, t_0 \pm y_0) = f(x_0, t_0 \pm y_0)$ и $\tilde{u}(x_0, y_0, t_0) = u(x_0, y_0, t_0)$, так как в соответствующих точках выполнено $\chi = 1$. Таким образом, мы приходим к соотношению (20).

Доказанная теорема, в частности, позволяет избавиться от требования финитности решения u и потенциала q по координате x , которое накладывалось в задаче на полуплоскости в пп. 3, 4. В самом деле, для данных x_0, y_0 мы можем выбрать ограниченную область Ω , содержащую множество (21), а также любой гладкий финитный потенциал \tilde{q} , такой что $\tilde{q}(x) = q(x)$, как только $(x, y) \in \Omega$. Тогда согласно теореме 1 значение $u(x_0, y_0, t_0)$ может быть найдено с помощью соотношения (20), в котором потенциал q следует заменить на \tilde{q} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, М. 1980.
2. V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations (2nd Edition)*, Appl. Math. Sci., Vol. 127, Springer, 2006.
3. D. Tataru, *Unique Continuation for Solutions to PDE's; Between Hörmander's Theorem and Holmgren's Theorem*. — Communications in Partial Differential Equations **20**, No. 5–6 (1995), 855–884.
4. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики, том II: Уравнения с частными производными*, Мир, М. 1964.
5. М. N. Demchenko, *Reconstruction of solution to the wave equation from Cauchy data on the boundary*. — In: Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2018, 66–70.
6. М. Н. Демченко, *О задаче Коши для волнового уравнения с данными на границе*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **471** (2018), 99–112.
7. A. S. Blagoveshchensky, F. N. Podymaka, *On a Cauchy problem for the wave equation with data on a time-like hyperplane*. — In: Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2016, 31–34.
8. S. I. Kabanikhin, D. B. Nurseitov, M. A. Shishlenin, B. B. Sholpanbaev, *Inverse problems for the ground penetrating radar*. — J. Inverse Ill-Posed Probl. **21** (2013), 885–892.
9. F. Natterer, *Photo-acoustic inversion in convex domains*. — Inverse Probl. Imaging **6**, No. 2 (2012), 1–6.
10. Т. А. Voronina, V. A. Tcheverda, V. V. Voronin, *Some properties of the inverse operator for a tsunami source recovery*. — Siberian Electronic Mathematical Reports **11** (2014), 532–547.
11. М. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method*. — Inverse problems **23** No. 5 (2007), R1–R67.
12. Л. Д. Фаддеев, *Обратная задача квантовой теории рассеяния. II*. — Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. **3**, М., ВИНТИ, (1974), 93–180.

13. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М. 1967.

Demchenko M. N. Determination of a wave field in a laterally inhomogeneous medium from boundary data.

We deal with the Cauchy problem for a perturbed wave equation in the half-plane with data given on a part of the space-time boundary. The equation in consideration describes a wave process in a laterally inhomogeneous medium. We propose a reconstruction algorithm, which is applicable to the problem of determining nonstationary wave field from boundary data arising in geophysics.

Санкт-Петербургское Отделение
Математического Института
им. В. А. Стеклова РАН,
Наб. р. Фонтанки д. 27,
191023 С.Петербург, Россия
E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 1 ноября 2019 г.