Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 483, 2019 г.

М. И. Белишев, С. А. Симонов

ОБ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

0. Введение. • Рассматривается абстрактная динамическая система, эволюция которой в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ описывается начально-краевой задачей

$$iu_t + L_0^* u = 0, \qquad t > 0; \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0; \tag{2}$$

$$\Gamma_1 u = f\,, \qquad t \geqslant 0. \tag{3}$$

В ней $L_0 : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ есть замкнутый плотно заданный симметрический оператор с равными ненулевыми индексами дефекта, входящий в состав *системы Грина* – набора $\{\mathscr{H}, \mathscr{B}; L_0, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, в котором $\mathscr{H}$ и $\mathscr{B}$ суть комплексные сепарабельные гильбертовы пространства; $\Gamma_{1,2} : \mathscr{H} \to \mathscr{B}$ – *граничные операторы*. Перечисленные объекты связаны *формулой Грина*

$$(L_0^* u, v)_{\mathscr{H}} - (u, L_0^* v)_{\mathscr{H}} = (\Gamma_1 u, \Gamma_2 v)_{\mathscr{B}} - (\Gamma_2 u, \Gamma_1 v)_{\mathscr{B}}\,;$$

$\mathscr{B}$-значная функция $f = f(t)$ есть *граничное управление*, $u = u^f(t)$ – решение (*траектория)* в $\mathscr{H}$, корректно определенное для надлежащего класса управлений $\mathscr{M}$. Множества $\mathscr{U}^T = \{u^f(T) \,|\, f \in \mathscr{M}\}$ называются *достижимыми*; $\mathscr{U} = \operatorname{span}\{\mathscr{U}^T \,|\, T > 0\}$ – *тотальное достижимое множество.* Говорят, что система (1)–(3) управляема, если $\overline{\mathscr{U}} = \mathscr{H}$.

• Через $n_\pm[A] = \dim \operatorname{Ker}[A^* \pm i\mathbf{1}]$ обозначаются индексы дефекта симметрического оператора A. Определим класс операторов

$$\mathfrak{M}_+ := \{A \,|\, A \subset A^*,\ n_+[A] = 0\}\,.$$

Ключевые слова: симметрический оператор, волновая модель, граничная тройка, максимальная часть, инвариантное подпространство.

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ 18-01-00269А.

Работа второго автора поддержана грантами РФФИ 19-01-00565А, 18-31-00185мол_а, 17-01-00529А.

Мы говорим, что подпространство $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}$ является инвариантным подпространством оператора A, если $\overline{\operatorname{Dom} A \cap \mathscr{G}} = \mathscr{G}$ и $A[\operatorname{Dom} A \cap \mathscr{G}] \subset \mathscr{G}$. При этом оператор $A_{\mathscr{G}} := A|_{\mathscr{G}} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ называется частью A (в подпространстве $\mathscr{G}$).

Главный результат работы состоит в следующем. Система (1)–(3) управляема в том и только в том случае, если оператор L_0 не имеет частей класса $\mathfrak{M}_+$.

Этот результат аналогичен установленному в [2] для систем второго порядка с полуограниченным оператором L_0: в них управляемость равносильна отсутствию *самосопряженных* частей. Задачи для систем второго порядка сводятся к задачам для систем первого порядка [6] и, в этом смысле, результат данной работы сильнее. Кроме того, наши рассмотрения допускают широкий класс систем Грина, в то время как в [2] используется каноническая система, адекватная известному разложению Вишика элементов из $\operatorname{Dom} L_0^*$.

• Работа выполнена в рамках программы по разработке новой функциональной (т.н. *волновой*) модели симметрических операторов [3–5, 10]. Повод для изучения управляемости состоит в предположении, что волновая модель адекватна не самому оператору L_0, а его *волновой части*, действующей в подпространстве $\overline{\mathscr{U}}$. В ряде известных примеров предположение оправдывается: при наличии управляемости волновая модель оказывается фактически тождественной самому оператору [3, 5]. Однако есть основания полагать, что так бывает не всегда и, более того, это заведомо не так, если управляемость отсутствует. Данная работа подготавливает изучение подобного рода эффектов.

1. Система Грина. • Системой Грина мы называем набор

$$\{\mathscr{H}, \mathscr{B}; L_0, \Gamma_1, \Gamma_2\},$$

в котором $\mathscr{H}$ и $\mathscr{B}$ суть комплексные сепарабельные гильбертовы пространства; L_0 – замкнутый плотно заданный симметрический оператор в $\mathscr{H}$ с ненулевыми (возможно, бесконечными) индексами дефекта; Γ_1, Γ_2 суть линейные операторы из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{B}$, $\operatorname{Dom}\Gamma_{1,2} \supset \operatorname{Dom} L_0^*$, для которых выполнено равенство (формула Грина)

$$(L_0^* u, v) - (u, L_0^* v) = (\Gamma_1 u, \Gamma_2 v)_{\mathscr{B}} - (\Gamma_2 u, \Gamma_1 v)_{\mathscr{B}}, \qquad u, v \in \operatorname{Dom} L_0^* \quad (4)$$

(где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathscr{B}}$ – скалярные произведения в $\mathscr{H}$ и $\mathscr{B}$). Пространства $\mathscr{H}$ и $\mathscr{B}$ называются внутренним и граничным пространствами соответственно, оператор L_0 называется основным, $\operatorname{Dom}\Gamma_{1,2}$ суть граничные операторы.

Пусть $A : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ есть линейный оператор, $\mathscr{L}$ – линеал в $\mathscr{F}$. Через $A|_{\mathscr{L}}$ мы обозначаем сужение A на $\operatorname{Dom} A \cap \mathscr{L}$.

Дополнительно примем, что определенная выше система Грина удовлетворяет следующим условиям:
A. $\overline{\operatorname{Ran}\Gamma_1} = \mathscr{B}$;
B. $L_0 = L_0^*\big|_{\operatorname{Ker}\Gamma_1 \cap \operatorname{Ker}\Gamma_2}$;
C. $L_0^*\big|_{\operatorname{Ker}\Gamma_1} =: L = L^*$.
Всюду ниже, если не оговорено противное, они предполагаются выполненными.

• Отметим, что каждому плотно заданному симметрическому оператору L_0 с равными индексами дефекта отвечает семейство систем Грина (со свойствами **A,B,C**), в которых он играет роль основного оператора. Каждая из этих систем определяется некоторым самосопряженным расширением оператора L_0: см. [7], глава 7, раздел 7.1.

2. Свободная динамика. • С системой Грина связана эволюционная задача в $\mathscr{H}$ вида

$$iv_t + Lv = 0, \qquad -\infty < t < \infty\,; \tag{5}$$

$$v|_{t=T} = y \tag{6}$$

с конечным T и $y \in \mathscr{H}$. Пусть E_λ есть спектральная мера (самосопряженного) оператора L. При $y \in \operatorname{Dom} L$ эта задача имеет единственное решение

$$v = v^{y,T}(t) = v^{y,0}(t-T) = e^{i(t-T)L}y = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(t-T)\lambda}dE_\lambda y\,, \tag{7}$$

удовлетворяющее (5), (6) в классическом смысле [6]; при этом $v^{y,T}(t) \in \operatorname{Dom} L$ при всех t [6]. Для $y \notin \operatorname{Dom} L$ функция $v^{y,T}$, задаваемая правой частью (7) понимается как обобщенное решение задачи. Обозначим

$$v^y := v^{y,0}.$$

Мы говорим о задаче (5)–(6) как о системе со свободной динамикой. Ее эволюция определяется унитарной группой $e^{i(\,\cdot\,-T)L}$; v^y есть траектория системы, $v^{y,T}(t)$ – состояние в момент t.

• Наряду с задачей (5)–(6) рассмотрим задачу

$$iw_t + Lw = g, \qquad -\infty < t < \infty\,; \tag{8}$$

$$w|_{t=T} = 0 \tag{9}$$

с правой частью $g \in L_{1,\,\mathrm{loc}}\,((-\infty,\infty);\mathscr{H})$. Ее (обобщенное) решение есть

$$w = w^{g,T}(t) = \frac{1}{i}\int\limits_T^t e^{i(t-s)L} g(s)\,ds = \frac{1}{i}\int\limits_T^t ds \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\lambda}\,dE_\lambda\, g(s)\,. \tag{10}$$

При $g \in C^1_{\mathrm{loc}}\,((-\infty,\infty);\mathscr{H})$ решение $w^{g,T}$ удовлетворяет (8), (9) в классическом смысле. Наметим доказательство этого результата.

Для непрерывно дифференцируемого g имеем соотношение

$$\frac{d}{ds}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{i(t-s)\lambda}}{i\lambda}\,dE_\lambda g(s) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\lambda}\,dE_\lambda g(s) + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{i(t-s)\lambda}}{i\lambda}\,dE_\lambda g'(s).$$

Интегрируя по s в пределах от T до t, получим

$$-\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{i(t-T)\lambda}}{i\lambda}\,dE_\lambda g(T) = \int\limits_T^t ds \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\lambda}\,dE_\lambda g(s)$$

$$+\int\limits_T^t ds \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{i(t-s)\lambda}}{i\lambda}\,dE_\lambda g'(s) = iw^{g,T}(t) + \int\limits_T^t ds \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{i(t-s)\lambda}}{i\lambda}\,dE_\lambda g'(s),$$

что дает возможность записать (10) в форме

$$w^{g,T}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{i(t-T)\lambda}}{\lambda}\,dE_\lambda g(T) + \int\limits_T^t ds \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{i(t-s)\lambda}}{\lambda}\,dE_\lambda g'(s)\,. \tag{11}$$

Это представление более информативно: благодаря наличию λ в знаменателях, оба слагаемых в правой части суть элементы $\operatorname{Dom} L$ и, следовательно, $w^{g,T}(t) \in \operatorname{Dom} L$ при всех t. Это позволяет проверить правильность (10) непосредственной подстановкой $w^{g,T}$ в виде (11) в уравнение (8) и условие (9). Опуская соответствующие вычисления, отметим, что они аналогичны приведенным в [2] для системы второго порядка.

3. Система с граничным управлением. • С системой Грина связана задача

$$iu_t + L_0^* u = 0, \qquad t > 0\,; \tag{12}$$

$$u|_{t=0} = 0\,; \tag{13}$$

$$\Gamma_1 u = f\,, \qquad t \geqslant 0\,, \tag{14}$$

в которой $f = f(t)$ есть $\mathscr{B}$-значная функция времени, называемая граничным управлением. Решение $u = u^f(\,\cdot\,)$ есть траектория динамической системы, $u^f(t)$ – ее состояние в момент t.

• Обсудим разрешимость задачи (12)–(14). Пусть $\mathscr{N}_{\pm i} = \operatorname{Ker}[L_0^* \pm i\mathbf{1}]$ суть дефектные подпространства оператора L_0. Их размерности $n_\pm[L_0] \leqslant \infty$ совпадают поскольку L_0 имеет самосопряженное расширение L. Классическое решение задачи есть $\operatorname{Dom} L_0^*$-значная функция от t, непрерывная при $t \geqslant 0$ и непрерывно дифференцируемая при $t > 0$ [8]. Как видно из (14), необходимым условием ее разрешимости является наличие представления $f = \Gamma_1\phi(t)$ через функцию ϕ, принимающую значения в $\operatorname{Dom} L_0^*$. По формуле Неймана имеем $\operatorname{Dom} L_0^* \ni u = u_0 + \phi^+ + \phi^-$ с $u_0 \in \operatorname{Dom} L_0$ и $\phi^\pm \in \mathscr{N}_{\pm i}$; кроме того, по условию **B**, наложенному выше на систему Грина, выполнено $\Gamma_1 u_0 = 0$. В силу сказанного в "граничном" условии (14) можно считать $f = \Gamma_1\,[\phi^+(t) + \phi^-(t)]$, что всюду ниже предполагается.

Подстановка $u = p + \phi^+ + \phi^-$ в (12)–(14) с учетом $L_0^*\phi^\pm = \pm i\phi^\pm$ и дополнительным требованием $\phi^\pm|_{t=0} = 0$ приводит к задаче

$$ip_t + L_0^* p = -i\psi, \qquad t > 0\,; \tag{15}$$

$$p|_{t=0} = 0\,; \tag{16}$$

$$\Gamma_1 p = 0\,, \qquad t \geqslant 0\,, \tag{17}$$

где $\psi := \phi_t^+ + \phi^+ + \phi_t^- - \phi^-$. С учетом (17) имеем $p \in \operatorname{Dom} L$, в силу чего $L_0^* p = Lp$ и задача приобретает вид

$$ip_t + Lp = -i\psi, \qquad t > 0\,;$$

$$p|_{t=0} = 0\,.$$

Применяя (10), получаем:

$$p(t) = -\int_0^t e^{i(t-s)L}\psi(s)\,ds = -\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\lambda}\,dE_\lambda\,\psi(s)\,,$$

что ведет к представлению

$$u = u^f(t) = \phi^+(t) + \phi^-(t) - \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\lambda}\, dE_\lambda\, \psi(s) \qquad (18)$$

с управлением $f = \Gamma_1[\phi^+ + \phi^-]$.

Введем класс "гладких" управлений

$$\mathscr{M} := \left\{ f = \Gamma_1[\phi^+ + \phi^-] \,\middle|\, \phi^\pm \in C^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); \mathscr{N}_{\pm i}),\ \operatorname{supp}\phi^\pm \subset (0,\infty) \right\};$$

при этом выполнено

$$\psi = \phi^+_t + \phi^+ + \phi^-_t - \phi^- \in C^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty); \mathscr{N}_{\pm i}), \quad \operatorname{supp}\psi \subset (0,\infty).$$

Используя прием, вполне аналогичный переходу от (10) к (11) в системе (8)–(9), можно показать, что при $f \in \mathscr{M}$ функция u^f, определяемая правой частью (18), доставляет единственное классическое решение задаче (12)–(14) с управлением $f = \Gamma_1[\phi^+ + \phi^-]$.

Легко видеть, что правая часть (18) имеет смысл и при менее ограничительных условиях на f (на $\phi^\pm$). В этом случае определяемую правой частью функцию u^f считают обобщенным решением задачи (12)–(14).

4. Управляемость. • В динамической системе с граничным управлением множества вида

$$\mathscr{U}^T := \{u^f(T) \mid f \in \mathscr{M}\}$$

называются достижимыми (к моменту времени T). Множество

$$\mathscr{U} := \operatorname{span}\{\mathscr{U}^T \mid T > 0\}$$

называется тотальным достижимым множеством. Система (12)–(14) называется управляемой, если

$$\overline{\mathscr{U}} = \mathscr{H}. \qquad (19)$$

В случае $\overline{\mathscr{U}} \neq \mathscr{H}$ подпространство $\mathscr{D} := \mathscr{H} \ominus \overline{\mathscr{U}}$ называется недостижимым.

• Скажем, что подпространство $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}$ является инвариантным подпространством оператора A, если $\overline{\mathscr{G} \cap \operatorname{Dom} A} = \mathscr{G}$ и $A[\mathscr{G} \cap \operatorname{Dom} A] \subset \mathscr{G}$. Сужение $A|_{\mathscr{G}\cap\operatorname{Dom} A} =: A_{\mathscr{G}}$, рассматриваемое как оператор из $\mathscr{G}$ в $\mathscr{G}$, называется частью A в $\mathscr{G}$. Отметим, что из замкнутости A следует замкнутость любой его части.

$*$ Сделаем замечание по поводу терминов. Традиционное определение инвариантного подпространства для неограниченного оператора не требует плотности $\overline{\mathscr{G} \cap \operatorname{Dom} A} = \mathscr{G}$ [1,7]. На наш взгляд, это недостаток, так как у оператора может оказаться много "лишних" инвариантных подпространств. В самом деле, если оператор таков, что $\operatorname{Dom} A \setminus \operatorname{Dom} A^2 \neq \varnothing$, то, по определению [1, 7], для любого набора $y_1, \dots, y_n \subset \operatorname{Dom} A \setminus \operatorname{Dom} A^2$ подпространство $\operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n, Ay_1, \dots, Ay_n\}$ будет инвариантным. Наше определение представляется более естественным; в то же время оно позволяет получить все нужные результаты.

• Напомним, что $n_{\pm}[A] = \dim \operatorname{Ker}[A^* \pm i\mathbf{1}]$ суть индексы дефекта симметрического оператора A. По принятому во Введении определению мы относим оператор A к классу $\mathfrak{M}_+$, если $n_+[A] = 0$. Добавим, операторы этого класса либо являются самосопряженными (при $n_-[A] = 0$), либо не имеют самосопряженных расширений (при $n_-[A] \neq 0$). Такие операторы называют максимальными [1, 6].

Напомним, что свободная динамическая система и система с граничным управлением определяются системой Грина $\{\mathscr{H}, \mathscr{B}; L_0, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, удовлетворяющей условиям **A,B,C**.

Теорема 1. *Система* (12)–(14) *является управляемой, если и только если оператор* L_0 *не имеет в* $\mathscr{H}$ *частей класса* $\mathfrak{M}_+$.

Доказательство состоит из двух частей.

1. *Необходимость.* Пусть L_0 имеет часть $L_{0\mathscr{G}} \in \mathfrak{M}_+$ в подпространстве $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}$. Покажем, что $\mathscr{G} \subset \mathscr{D}$, а, значит, $\mathscr{D} \neq \{0\}$, т.е. система (12)–(14) не управляема.

$*$ Выберем $y \in \mathscr{G} \cap \operatorname{Dom} L_0 = \operatorname{Dom} L_{0\mathscr{G}}$ и рассмотрим систему *в подпространстве* $\mathscr{G}$:

$$iv_t + L_{0\mathscr{G}} v = 0, \qquad t < 0\,; \tag{20}$$

$$v|_{t=0} = y\,. \tag{21}$$

Так как $n_+[L_{0\mathscr{G}}] = 0$, полуплоскость $\mathbb{C}_+$ состоит из регулярных точек оператора $L_{0\mathscr{G}}$. Как следствие, задача (20)–(21) имеет классическое решение $v^y_{\mathscr{G}}(t) \in \operatorname{Dom} L_{0\mathscr{G}}$ при $t \leqslant 0$. Этот факт следует из теоремы Люмера–Филлипса [9, теор. X.48], примененной к аккретивному оператору $A = iL_{0\mathscr{G}}$, для которого полуплоскость $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ не содержит точек спектра. Отметим, что такая задача разрешима именно при временах $t < 0$ и может не иметь решения при $t > 0$.

В силу $L_{0\mathscr{G}} \subset L$ решения задач (20)–(21) и (5)–(6) (с $T = 0$) удовлетворяют одному и тому же уравнению и, следовательно, при одинаковых y совпадают в $\mathscr{H}$ при всех $t \leqslant 0$. Таким образом, при $y \in \operatorname{Dom} L_{0\mathscr{G}}$ траектория v^y системы (5)–(6) лежит в $\mathscr{G}$ и, более того, не покидает линеала $\operatorname{Dom} L_{0\mathscr{G}}$. Из последнего в силу $\operatorname{Dom} L_{0\mathscr{G}} \subset \operatorname{Dom} L_0$ и условия **B** следует

$$\Gamma_1 v^y(t) = \Gamma_2 v^y(t) = 0, \qquad t \leqslant 0. \tag{22}$$

$*$ Выведем вспомогательное соотношение. Пусть $y \in \operatorname{Dom} L$ и $f \in \mathscr{M}$, так что v^y и u^f суть классические решения задач (5)–(6) и (12)–(14). В приводимой ниже выкладке, упрощая запись, мы пишем v и u вместо $v^{y,T}$ и u^f и опускаем аргумент t. Интегрируя по частям с учетом $\Gamma_1 u = f$, $\Gamma_1 v = 0$ и $iv_t + L_0^* v = iv_t + Lv = 0$, имеем:

$$0 = \int_0^T (iu_t + L_0^* u, v)\,dt = \int_0^T (iu_t, v)\,dt + \int_0^T (L_0^* u, v)\,dt = \langle \text{см. } (13), (6), (4) \rangle$$

$$= i(u(T), v(T)) + \int_0^T (u, iv_t)\,dt + \int_0^T (u, L_0^* v)\,dt + \int_0^T (\Gamma_1 u, \Gamma_2 v)_{\mathscr{B}}\,dt$$

$$- \int_0^T (\Gamma_2 u, \Gamma_1 v)_{\mathscr{B}}\,dt = i(u(T), y) + \int_0^T (u, iv_t + L_0^* v)\,dt + \int_0^T (f, \Gamma_2 v)_{\mathscr{B}}\,dt$$

$$= i(u(T), y) + \int_0^T (f, \Gamma_2 v)_{\mathscr{B}}\,dt,$$

откуда

$$(u^f(T), y) = i \int_0^T (f(t), \Gamma_2 v^{y,T}(t))_{\mathscr{B}}\,dt = i \int_0^T (f(t), \Gamma_2 v^y(t - T))_{\mathscr{B}}\,dt\,. \tag{23}$$

$*$ Пусть опять $y \in \mathscr{G} \cap \operatorname{Dom} L_0 = \operatorname{Dom} L_{0\mathscr{G}}$. В силу (22) и (23) имеем $(u^f(T), y) = 0$, откуда по произвольности f заключаем, что $y \perp \mathscr{U}^T$. Поскольку $T > 0$ тоже произвольно, приходим к $y \perp \mathscr{U}$.

Множество использованных выше элементов $y \in \mathscr{G} \cap \operatorname{Dom} L_0 = \operatorname{Dom} L_{0\mathscr{G}}$ плотно в $\mathscr{G}$. Следовательно $\mathscr{G} \perp \mathscr{U}$, т.е. $\mathscr{G} \subset \mathscr{H} \ominus \overline{\mathscr{U}} = \mathscr{D} \neq \{0\}$.

2. *Достаточность.* Покажем, что в случае $\mathscr{D} \neq \{0\}$ оператор L_0 имеет часть $L_{0\,\mathscr{D}} \in \mathfrak{M}_+$.

$*$ Интегрируя по времени в (7), легко получим

$$w = w^{y,T}(t) := \int\limits_T^t v^{y,T}(s)\,ds = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(t-T)\lambda}-1}{i\lambda}\,dE_\lambda y = w^{y,0}(t-T)\,.$$

Наличие λ в знаменателе обеспечивает включение $w^{y,T}(t) \in \operatorname{Dom} L$ (так что $\Gamma_1 w(t) = 0$) при всех t и $y \in \mathscr{H}$. Интегрируя по времени в (5)–(6), приходим к системе

$$iw_t + Lw = iy, \qquad -\infty < t < \infty\,; \tag{24}$$

$$w|_{t=T} = 0\,. \tag{25}$$

Обозначим

$$w^y := w^{y,0}.$$

Для $f \in \mathscr{M}$, соответствующего классического решения $u = u^f$ и произвольного $y \in \mathscr{H}$, с учетом $L \subset L_0^*$, $\Gamma_1 w = 0$ и $\Gamma_1 u = f$, имеем:

$$\int\limits_0^T (iy, u(t))\,dt = \int\limits_0^T (iw_t + Lw, u)\,dt = i\int\limits_0^T (w_t, u)\,dt + \int\limits_0^T (L_0^* w, u)\,dt$$

$$= i(w,u)\big|_{t=0}^{t=T} + \int\limits_0^T (w, iu_t + L_0^* u)\,dt + \int\limits_0^T \left[(\Gamma_1 w, \Gamma_2 u)_{\mathscr{B}} - (\Gamma_2 w, \Gamma_1 u)_{\mathscr{B}}\right]\,dt$$

$$= -\int\limits_0^T (\Gamma_2 w, f)_{\mathscr{B}}\,dt\,.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^T \left(y, u^f(t)\right)\,dt = i\int\limits_0^T \left(\Gamma_2 w^{y,T}(t), f(t)\right)_{\mathscr{B}}\,dt\,. \tag{26}$$

$*$ Пусть $y \in \mathscr{D}$ и, следовательно, интеграл в левой части (26) равен 0 при любом управлении f. Выберем последовательность функций $\delta_j \in C_0^\infty(0,T)$, сходящуюся к мере Дирака с носителем в точке $t_0 \in (0,T)$. Выберем $h \in \operatorname{Ran}\Gamma_1$. Положив $f = \delta_j(t)h \in \mathscr{M}$ в (26) и устремляя $j \to \infty$, получим $0 = (\Gamma_2 w^{y,T}(t_0), h)_{\mathscr{B}}$. Значит, в силу плотности $\operatorname{Ran}\Gamma_1$ в $\mathscr{B}$ (см. свойство **A**) выполнено $\Gamma_2 w^{y,T}(t) = \Gamma_2 w^y(t-T) = 0$ при всех

$t \in [0,T]$. Вспоминая, что $w^y(t) \in \operatorname{Dom} L$ (а, значит, $\Gamma_1 w^y(t) = 0$), мы видим, что $w^y(t) \in \operatorname{Ker}\Gamma_1 \cap \operatorname{Ker}\Gamma_2$ при $t \leqslant 0$, т.е.

$$w^y(t) \in \operatorname{Dom} L_0\,, \quad t \leqslant 0\,. \tag{27}$$

$*$ Выведем еще одно вспомогательное соотношение. Для $f \in \mathscr{M}$ и $y \in \mathscr{H}$, с учетом

$$iw_t + Lw = iw_t + L_0^* w = iy, \quad \Gamma_1 w = 0, \quad u|_{t=0} = 0\,,$$

для $T > 0$ и $t \leqslant 0$ имеем:

$$\begin{aligned}
0 &= \int\limits_0^T (iu_t(s) + L_0^* u(s), w(s+t))\, ds = (iu(T), w(T+t)) \\
&+ \int\limits_0^T \left(u(s), \left[i\frac{d}{dt} + L_0^*\right] w(s+t)\right)\, ds \\
&+ \int\limits_0^T \left[(\Gamma_1 u(s), \Gamma_2 w(s+t))_{\mathscr{B}} - (\Gamma_2 u(s), \Gamma_1 w(s+t))_{\mathscr{B}}\right]\, ds \\
&= (iu(T), w(T+t)) + \int\limits_0^T (u(s), iy)\, ds + \int\limits_0^T (f(s), \Gamma_2 w(s+t))_{\mathscr{B}}\, ds,
\end{aligned}$$

откуда

$$(u^f(T), w^y(t)) = \int\limits_0^T (u^f(s), y)\, ds - i \int\limits_0^T (f(s), \Gamma_2 w^y(s+t-T))_{\mathscr{B}}\, ds\,. \tag{28}$$

$*$ В силу (28), из $y \in \mathscr{D}$, $T > 0$ и $t \leqslant 0$ следует $w^y(s+t-T) \in \operatorname{Ker}\Gamma_2$ при всех $s \in [0,T]$ и $(u^f(T), w^y(t)) = 0$. Следовательно, $w^y(t) \perp \mathscr{U}$, т.е. траектория $w^y(t)$ содержится в $\mathscr{D}$ при $t \leqslant 0$. Более того, согласно (27), множество состояний

$$\mathscr{S} := \{w^y(t) \mid y \in \mathscr{D},\ t \leqslant 0\}$$

вложено в $\mathscr{D} \cap \operatorname{Dom} L_0$.

Множество $\mathscr{S}$ плотно в $\mathscr{D}$. В самом деле, если $d \in \mathscr{D}$ и $d \perp \mathscr{S}$, то $(d, w^y(t))|_{t\leqslant 0} = 0$ и, следовательно, $(d, w_t^y(t))|_{t \leqslant 0} = 0$. Из последнего согласно (24)–(25) (с $T = 0$) имеем

$$0 = (d, iw_t^y(0)) = (d, -Lw^y(0) + iy) = -i(d, y).$$

В силу произвольности $y \in \mathscr{D}$ имеем $d = 0$.

Из плотности $\mathscr{S}$ заключаем:

$$\overline{\mathscr{D} \cap \operatorname{Dom} L_0} \supset \overline{\mathscr{S}} = \mathscr{D}\,. \tag{29}$$

$*$ Как было установлено выше, при $y \in \mathscr{D}$ траектория $w^y(t)$ лежит в $\mathscr{D}$ при $t \leqslant 0$. Значит, и траектория $v^y(t) = w^y_t(t)$ тоже находится в $\mathscr{D}$. Если при этом $y \in \mathscr{D} \cap \operatorname{Dom} L_0$, то траектория $v^y(t)$ классическая и согласно (5) выполнено $L_0 y = Ly = Lv^y(0) = -iv^y_t(0) \in \mathscr{D}$, т.е.

$$L_0[\mathscr{D} \cap \operatorname{Dom} L_0] \subset \mathscr{D}\,. \tag{30}$$

Сопоставляя (29) и (30), заключаем, что оператор L_0 имеет в $\mathscr{D}$ (замкнутую симметрическую) часть $L_{0\mathscr{D}} = L_0|_{\mathscr{D}\cap\operatorname{Dom} L_0}$.

$*$ Покажем, что $L_{0\mathscr{D}} \in \mathfrak{M}_+$. Для этого проверим равенство $n_+[L_{0\mathscr{D}}]=0$.

Пусть $y \in \mathscr{D} \cap \operatorname{Dom} L_0 = \operatorname{Dom} L_{0\mathscr{D}}$; в этом случае, как отмечалось выше, при $t \leqslant 0$ выполнено $v^y(t) \in \mathscr{D} \cap \operatorname{Dom} L_0 = \operatorname{Dom} L_{0\mathscr{D}}$. Для элемента $z \in \operatorname{Ker}[L^*_{0\mathscr{D}} + i\mathbf{1}] = \mathscr{N}_i[L_{0\mathscr{D}}]$ дефектного подпространства оператора $L_{0\mathscr{D}}$ имеем:

$$\begin{aligned}0 &= ([L^*_{0\mathscr{D}} + i\mathbf{1}]z, v^y(t)) = (z, L_{0\mathscr{D}} v^y(t)) - (z, iv^y(t)) = \\ &= (z, Lv^y(t)) - (z, iv^y(t)) = \langle \text{см. } (5) \rangle = (z, -iv^y_t(t)) - (z, iv^y(t))\,,\end{aligned}$$

откуда

$$(z, v^y(t))_t + (z, v^y(t)) = 0\,, \qquad t \leqslant 0.$$

С учетом (6) получаем $(z, v^y(t)) = (z, y)e^{-t}$ или

$$(z, e^{itL}y) = (z, y)\, e^{-t}\,, \qquad t \leqslant 0\,.$$

Поскольку $|(z, e^{itL}y)| \leqslant \|z\|\|y\|$, а правая часть не ограничена, последнее равенство возможно лишь при $(z, y) = 0$. По произвольности выбора y из плотного в $\mathscr{D}$ множества $\mathscr{D} \cap \operatorname{Dom} L_0$ заключаем, что $z = 0$. Следовательно, $\mathscr{N}_i[L_{0\mathscr{D}}] = \{0\}$ и $n_+[L_{0\mathscr{D}}] = 0$.

Таким образом, оператор L_0 имеет в $\mathscr{D}$ часть $L_{0\mathscr{D}} \in \mathfrak{M}_+$. Теорема 1 доказана.

• Эволюция системы с граничным управлением при отрицательных временах описывается задачей

$$iu_t + L^*_0 u = 0, \qquad t < 0\,; \tag{31}$$

$$u|_{t=0} = 0\,; \tag{32}$$

$$\Gamma_1 u = f\,, \qquad t \leqslant 0\,. \tag{33}$$

Ее достижимые множества суть

$$\mathscr{U}^T := \{u^f(T) \mid f(-t) \in \mathscr{M}\}\,, \qquad \mathscr{U}_- := \operatorname{span}\{\mathscr{U}^T \mid T < 0\}\,.$$

Система (31)–(33) управляема (при отрицательных временах), если

$$\mathscr{D}_- := \mathscr{H} \ominus \overline{\mathscr{U}}_- = \{0\}\,. \tag{34}$$

Доказательство, вполне аналогичное приведенному выше для теоремы 1, ведет к аналогичному результату: система (31)–(33) управляема в том и только в том случае, если оператор L_0 не имеет в $\mathscr{H}$ частей $L_{0\mathscr{G}}$ с индексом дефекта $n_-[L_{0\mathscr{G}}] = 0$.

Пусть $\mathscr{D}_+$ и $\mathscr{D}_-$ суть недостижимые подпространства систем (12)–(14) и (31)–(33). В (гипотетическом) случае $\mathscr{D}_+ \cap \mathscr{D}_- \neq \{0\}$ оператор L_0 имеет в $\mathscr{D}_+ \cap \mathscr{D}_-$ самосопряженную часть.

Напомним, что симметрические операторы, у которых хотя бы один из индексов дефекта равен 0, называют максимальными. Резюмируя наши рассмотрения, заключаем, что система с граничным управлением управляема при *всех* временах (т.е. $\mathscr{D}_+ = \mathscr{D}_- = \{0\}$), если и только если оператор L_0 не имеет максимальных частей.

- В качестве иллюстрации рассмотрим систему Дирака на полуоси.

Элементы соответствующей системы Грина суть

$$\begin{gathered}\mathscr{H} = L_2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2); \quad \mathscr{B} = \mathbb{C}; \quad L_0 = J\tfrac{d}{dx},\\ \operatorname{Dom} L_0 = \{y \in \mathscr{H} \mid y \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+),\ y' \in \mathscr{H},\ y(0) = 0\};\\ \Gamma_1 y = y^1(0), \quad \Gamma_2 y = y^2(0),\end{gathered}$$

где $y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. При этом

$$L_0^* = J\frac{d}{dx}, \quad \operatorname{Dom} L_0^* = \{y \in \mathscr{H} \mid y \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+),\ y' \in \mathscr{H}\},$$

а формула Грина есть (4).

Система с граничным управлением имеет вид

$$\begin{aligned}& iu_t + L_0^* u = 0, \qquad x \in \mathbb{R}_+,\ t > 0\,;\\ & u|_{t=0} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}_+\,;\\ & \Gamma_1 u = u^1(0,t) = f(t)\,, \qquad t \geqslant 0\,;\end{aligned}$$

управления берутся из класса $\mathscr{M} = \{f \in C^\infty_{\rm loc}([0,\infty);\mathbb{C}) \mid \operatorname{supp} f \subset (0,\infty)\}$. Ее траектория находится явно: доопределяя $f|_{t<0} \equiv 0$, имеем

$$u = u^f(x,t) = \begin{pmatrix} u^1(x,t) \\ u^2(x,t) \end{pmatrix} = f(t-x)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}_+,\ t \geqslant 0.$$

Далее легко находим:

$$\overline{\mathscr{U}^T} = \left\{\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \;\Big|\; \varphi \in L_2(\Omega^T;\mathbb{C})\right\}, \quad \overline{\mathscr{U}} = \left\{\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \;\Big|\; \varphi \in L_2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})\right\},$$

где $\Omega^T = (0,T) \subset \mathbb{R}_+$. Как следствие, получаем

$$\mathscr{D} = \mathscr{H} \ominus \overline{\mathscr{U}} = \left\{\psi\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \;\Big|\; \psi \in L_2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})\right\}.$$

В согласии с нашими результатами, оператор L_0 имеет в $\mathscr{D}$ максимальную часть

$$L_{0\mathscr{D}} = J\frac{d}{dx},$$
$$\operatorname{Dom} L_{0\mathscr{D}} = \left\{\psi\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \;\Big|\; \psi \in AC_{\rm loc}(\mathbb{R}_+),\ \psi,\psi' \in L_2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}),\ \psi(0)=0\right\}.$$

Она унитарно эквивалентна скалярному оператору $i\frac{d}{dx}$ в $L_2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$ с областью определения

$$\{f \in H^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}) \mid f(0) = 0\}.$$

Как следствие, имеем: $n_+[L_{0,\mathscr{D}}] = 0$, $n_-[L_{0,\mathscr{D}}] = 1$ (см. [6]).

Список литературы

1. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* М., Наука, 1966.
2. М. И. Белишев, М. Н. Демченко, *Динамическая система с граничным управлением, ассоциированная с симметрическим полуограниченным оператором.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 17–39.
3. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Волновая модель оператора Штурма-Лиувилля на полуоси.* — Алгебра и анализ **29**, No. 2 (2017), 3–33.
4. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Волновая модель метрического пространства с мерой.* — Матем. сб., принято к публикации в 2019 г.
5. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Волновая модель метрических пространств.* — Функц. анализ прил. **53**, No. 2 (2019), 3–10.
6. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* С.-Петербург, Москва, Краснодар. Лань, 2010.

7. В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи.* ПРАЦИ Інституту математики НАН України. Математика та ii застосування. Том 104, 2017.
8. С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* М., Наука, 1967.
9. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* Том 2, М., Мир, 1978.
10. M. I. Belishev. *A unitary invariant of a semi-bounded operator in reconstruction of manifolds.* — J. Operator Theory, **69**, No. 2 (2013), 299–326.

Belishev M. I., Simonov S. A. On an evolutionary dynamical system of the first order with boundary control.

The work is carried out as part of a program to construct a new functional (so-called *wave*) model of symmetric operators. It is shown that an abstract evolutionary dynamic system of the first order (w.r.t. time) with boundary control, which is determined by a symmetric operator $L_0 : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, is controllable if and only if L_0 has no maximal symmetric parts in $\mathscr{H}$.

С.-Петербургское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023, С.-Петербург, Россия
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru

Поступило 7 ноября 2019 г.

С.-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27, 191023, С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: sergey.a.simonov@gmail.com