

М. И. Белишев, А. С. Благовещенский, Н. А. Каразеева

ПРОСТЕЙШИЙ ТЕСТ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (ВС-МЕТОД)

§1. ВВЕДЕНИЕ

• ВС-метод (метод граничного управления) это подход к обратным задачам, использующий их связи с теорией управления [1, 5]. Его “локальный” вариант, рассматриваемый в данной работе, ориентирован на приложения в геофизике (сейсмике), где требуется восстановить зависящие от глубины параметры среды по данным на дневной поверхности. Волновой процесс инициируется источниками (управлениями), расположенными на части границы зондируемой области; на этой же части снимаются данные [1–4].

Численные алгоритмы, созданные на базе локального варианта, успешно протестированы в ряде экспериментов [1, 7–12]. Их дальнейшая разработка и возможное использование для работы с реальными данными – важная перспективная задача.

• Одна из главных проблем апробации алгоритмов состоит в подготовке надежного теста. Подготовка состоит в решении соответствующей прямой задачи и нахождении данных (здесь – оператора реакции), которые затем используются алгоритмом для восстановления параметров (скорости звука, плотности среды и др.). В работе предлагается простейший из возможных тестов, отвечающий *постоянной* скорости. При кажущейся тривиальности этот случай, тем не менее, вполне содержателен: имеющийся опыт показывает, что алгоритм, успешно восстанавливающий константы, хорошо справляется с восстановлением гладких переменных скоростей (по крайней мере вблизи границы). Цель статьи – сделать численное тестирование доступным возможно более широкому кругу пользователей ВС-метода.

Ключевые слова: трехмерная динамическая обратная задача, ВС-метод, численная реализация, простейший тест.

Работа подготовлена при поддержке программы Президиума РАН “Новейшие методы математического моделирования в изучении нелинейных динамических систем” (целевая субсидия 08-04), РФФИ No. 18-01-00269, 17-01-00529.

• В первой части дается сжатое описание локального варианта ВС-метода. Оно следует работе [3], в которой теория подхода изложена во всех подробностях. Особенность случая, рассматриваемого здесь (и в [3]), состоит в использовании граничных управлений *Неймана* – в отличие от упоминавшихся выше работ, в которых тестировались алгоритмы для управлений Дирихле. Неймановские управления более реалистичны в геофизических приложениях.

Во второй части описан тест, отвечающий постоянной скорости и приводится подробная схема его использования. Программирование по этой схеме не составит большого труда. Проблемой, как всегда в многомерных обратных задачах, будет регуляризация алгоритма [7, 8, 10].

Изложение следует схеме работы [6], в которой описан аналогичный тест для двумерной обратной задачи.

• Авторы признательны А. А. Тимонову за полезные обсуждения.

§2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Постановка. В полупространстве $\mathbb{R}_+^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ ставится начальная-краевая задача

$$u_{tt} - \Delta u - \langle \nabla \ln \rho, \nabla u \rangle = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^3 \times (0, T), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \overline{\mathbb{R}_+^3}, \quad (2)$$

$$u_z|_{z=0} = f \quad \text{при } 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $\langle \nabla \ln \rho, \nabla u \rangle = (\ln \rho)_x u_x + (\ln \rho)_y u_y + (\ln \rho)_z u_z$, $\rho = \rho(x, y, z)$ – гладкая положительная функция (*приведенная скорость звука*), $f = f(x, y, t)$ – граничное управление (Неймана), $T > 0$ – финальный момент времени, $u = u^f(x, y, z, t)$ – решение (*волна*). Приведем некоторые известные свойства решения.

• Следствием стационарности системы (независимости коэффициентов уравнения (1) от t) является инвариантность решений относительно сдвигов по времени. Для его формулировки удобно принять соглашение, действующее всюду ниже.

Соглашение 1. Все зависящие от времени функции полагаются равными 0 при $t < 0$.

Если f есть управление, а

$$f^\xi(\dots, t) := f(\dots, t - (T - \xi)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

– оно же, включенное с задержкой $T - \xi$ (так что время действия управления f^ξ равно ξ), то

$$u^{f^\xi}(\dots, T) = u^f(\dots, \xi), \quad 0 < \xi \leq T, \quad (4)$$

т.е. задержка управления приводит к такой же задержке волны. Из той же стационарности следуют равенства

$$u^{f^t}(\dots, t) = u_t^f(\dots, t), \quad u^F(\dots, t) = \int_0^t u^f(\dots, s) ds, \quad 0 < \xi \leq T, \quad (5)$$

где $F(\dots, t) := \int_0^t f(\dots, s) ds$.

• Решения гиперболического уравнения (1) подчиняются принципу конечности области влияния. Пусть σ есть конечная область на плоскости $z = 0$, ограниченная кусочно-гладкой кривой,

$$\Omega^r[\sigma] := \{p \in \mathbb{R}_+^3 \mid \text{dist}(p, \sigma) < r\}$$

– ее метрическая окрестность радиуса $r > 0$ (dist – евклидово расстояние). Если $\text{supp } f \subset \sigma \times [0, T]$, т.е. управление действует с σ , то

$$\text{supp } u^f(\dots, t) \subset \Omega^t[\sigma], \quad 0 < t \leq T, \quad (6)$$

т.е. соответствующая волна локализована в пространственной t -окрестности σ . Соотношение (6) означает, что волны распространяются в полупространстве \mathbb{R}_+^3 с единичной скоростью.

Динамическая система. Задаче (1)–(3) сопоставляются стандартные атрибуты динамической системы: пространства и операторы. Упрощая обозначения, мы опускаем указание на носитель управлений σ , который пока предполагается фиксированным.

• *Внешнее пространство* есть гильбертово пространство \mathcal{F}^T управлений, действующих с σ , со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{F}^T} = \int_{\sigma \times [0, T]} f(x, y, t) g(x, y, t) \rho(x, y, 0) dx dy dt. \quad (7)$$

В нем выделено семейство подпространств

$$\mathcal{F}^{T, \xi} := \{f^\xi \mid f \in \mathcal{F}^T\}, \quad 0 < \xi \leq T,$$

образованных задержанными управлениями. Здесь $T - \xi$ есть задержка, ξ – время действия; $\mathcal{F}^{T, T} = \mathcal{F}^T$.

- *Внутреннее пространство состояний* (волн) есть пространство \mathcal{H}^T со скалярным произведением

$$(v, w)_{\mathcal{H}^T} = \int_{\Omega^T[\sigma]} v(x, y, z) w(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (8)$$

В силу (6) волны $u^f(\dots, \cdot, t)$ суть его элементы (функции переменных x, y и z , зависящие от t как от параметра). В \mathcal{H}^T выделено семейство подпространств

$$\mathcal{H}^\xi := \left\{ v \in \mathcal{H}^T \mid \text{supp } v \subset \overline{\Omega^\xi[\sigma]} \right\}, \quad 0 < \xi \leq T,$$

которые содержат запаздывающие волны: в силу (4) и (6) выполнено $u^{f^\xi}(\dots, T) = u^f(\dots, \xi) \in \mathcal{H}^\xi$.

- *Оператор управления* $W^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{H}^T$,

$$(W^T f)(x, y, z) := u^f(x, y, z, T), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \quad (9)$$

есть оператор, разрешающий задачу (1)–(3). Он непрерывен и инъективен при всех $T > 0$ [3].

- *Оператор реакции* $R^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$,

$$(R^T f)(x, y, t) := u^f(x, y, 0, t), \quad (x, y, 0) \in \sigma, \quad 0 \leq t \leq T \quad (10)$$

описывает реакцию системы на воздействие, производимое управлением. Он также непрерывен. Правая часть в этом определении имеет смысл величины давления, наблюдаемого на границе полупространства. Отметим, что реакция регистрируется на том же множестве σ , с которого действуют управления.

Оператор $C^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$,

$$C^T := (W^T)^* W^T \quad (11)$$

называется *связывающим*. Для управлений $f, g \in \mathcal{F}^T$ выполнено

$$(u^f(\dots, T), u^g(\dots, T))_{\mathcal{H}^T} \stackrel{(9)}{=} (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}^T} \stackrel{(11)}{=} (C^T f, g)_{\mathcal{F}^T}, \quad (12)$$

так что C^T связывает метрики внешнего и внутреннего пространств. По инъективности W^T , оператор C^T также инъективен: из $C^T f = 0$ следует $f = 0$.

- Одним из центральных фактов ВС-метода является простое и явное представление связывающего оператора через оператор реакции (см. [1–3]). Для его описания введем:

операторы четного и нечетного продолжений $S^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$,

$$(S_{\pm}^T f)(\dots, t) := \begin{cases} f(\dots, t), & 0 \leq t < T, \\ \pm f(\dots, 2T - t), & T \leq t \leq 2T; \end{cases}$$

оператор интегрирования $J^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$,

$$(J^{2T} f)(\dots, t) := \int_0^t f(\dots, s) ds, \quad 0 \leq t \leq 2T;$$

операторы выделения четной и нечетной частей $P_{\pm}^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$,

$$(P_{\pm}^{2T} f)(\dots, t) := \frac{1}{2} [f(\dots, t) \pm f(\dots, 2T - t)], \quad 0 \leq t \leq 2T;$$

оператор редукции $N^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^T$,

$$(N^{2T} f)(\dots, t) := f(\dots, t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Отметим легко проверяемое соотношение $(S_-^T)^* = 2N^{2T}P_-^{2T}$.

Пусть $R^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$ есть оператор реакции системы (1)–(3) с финальным моментом $t = 2T$, ∂_t - производная по времени.

Лемма 1. *Справедливы представления*

$$C^T = \frac{1}{2}(S_-^T)^* J^{2T} R^{2T} S_-^T, \quad \partial_t C^T = \frac{1}{2}(S_+^T)^* R^{2T} S_-^T = N^{2T} P_+^{2T} R^{2T} S_-^T. \quad (13)$$

Вывод представления для C^T см. в [3]; второе представление легко следует из первого. Первое представление влечет

$$\begin{aligned} (C^T f)(x, y, t) &= -\frac{1}{2} \int_t^{2T-t} u^{f-}(x, y, 0, s) ds \\ &\stackrel{(5)}{=} \frac{1}{2} [u^{F-}(x, y, 0, t) - u^{F-}(x, y, 0, 2T - t)], \quad (x, y) \in \sigma, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (14)$$

где $F_-(\dots, t) := \int_0^t f_-(\dots, s) ds$, $f_- := S_-^T f$ и

$$\begin{aligned} (u^f(\dots, T), u^g(\dots, T))_{\mathcal{H}^T} &\stackrel{(12)}{=} (C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} \stackrel{(13)}{=} \frac{1}{2} (R^{2T} S_-^T f, (J^{2T})^* S_-^T g)_{\mathcal{F}^{2T}} \\ &\stackrel{(10)}{=} \frac{1}{2} \int_{\sigma \times [0, 2T]} u^{f-}(x, y, 0, t) \left[\int_t^{2T} g_-(x, y, s) ds \right] dx dy dt, \end{aligned} \quad (15)$$

где $g_- := S_-^T g$. Из второго следует

$$(\partial_t C^T f)(x, y, t) = \frac{1}{2} [u^{f^-}(x, y, 0, t) + u^{f^-}(x, y, 0, 2T - t)], \quad (16)$$

$$(x, y) \in \sigma, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Волновой базис. • Напомним, что полнота системы элементов в гильбертовом пространстве означает возможность аппроксимировать элементы этого пространства линейными комбинациями элементов системы (сколь угодно точно по норме пространства). Если \mathcal{S} – гильбертово пространство, а ϕ_1, ϕ_2, \dots – полная линейно независимая система, то для любого $s \in \mathcal{S}$ справедливо представление

$$s = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k^N \phi_k, \quad (17)$$

в котором коэффициенты находятся из системы Грама

$$\sum_{k=1}^N G_{ik} \alpha_k^N = \beta_i; \quad G_{ik} := (\phi_i, \phi_k)_{\mathcal{S}}, \quad \beta_i := (s, \phi_i)_{\mathcal{S}}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Принципиальным для ВС-метода оказывается свойство *приближенной локальной граничной управляемости* динамической системы (1)–(3): см. [1–9].

Приведем одну из эквивалентных формулировок.

Лемма 2. Пусть множество σ и момент $T > 0$ выбраны произвольно и пусть f_1, f_2, \dots – полная линейно независимая система управлений в пространстве \mathcal{F}^T . Тогда волны $u^{f_1}(\dots, T), u^{f_2}(\dots, T), \dots$ образуют полную линейно независимую систему в пространстве \mathcal{H}^T .

Таким образом, любую функцию, заданную в области $\Omega^T[\sigma]$, заметенной волнами к финальному моменту, можно аппроксимировать волнами, которые инициированы управлениями, действующими с σ . Систему волн $u^{f_1}(\dots, T), u^{f_2}(\dots, T), \dots$ мы называем *волновым базисом* пространства \mathcal{H}^T .

• Поскольку момент $T > 0$ в Лемме 2 произволен, по свойству (4) заключаем: если f_1^ξ, f_2^ξ, \dots – полная линейно независимая система управлений в $\mathcal{F}^{T, \xi}$, то инициированные ими волны $u^{f_1^\xi}(\dots, T), u^{f_2^\xi}(\dots, T), \dots$ образуют волновой базис в подпространстве \mathcal{H}^ξ при каждом $0 < \xi \leq T$.

Пусть $h \in \mathcal{H}^T$ – функция, заданная в области $\Omega^T[\sigma]$, а функция

$$h^\xi := \begin{cases} h & \text{в } \Omega^\xi[\sigma], \\ 0 & \text{в } \Omega^T[\sigma] \setminus \Omega^\xi[\sigma] \end{cases}$$

есть ее срезка на подобласть $\Omega^\xi[\sigma]$, заметаемую волнами к моменту $t = \xi$. Тогда для срезки имеем представление (17) в виде разложения по волновому базису

$$h^\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k^N u_k^\xi, \quad (18)$$

в котором $u_k^\xi := u^{f_k^\xi}(\dots, T)$, а коэффициенты находятся из системы Грама

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N G_{ik} \alpha_k^N &= \beta_i; \quad G_{ik} := (u_i^\xi, u_k^\xi)_{\mathcal{H}^T} \stackrel{(12)}{=} (C^T f_i^\xi, f_k^\xi)_{\mathcal{F}^T}; \\ \beta_i &:= (h, u_i^\xi)_{\mathcal{H}^T}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (19)$$

Матричные элементы G_{ik} , правые части β_i и решения α_k^N , конечно, зависят от ξ . Мы опускаем эту зависимость в обозначениях, чтобы не перегружать их.

- Если $h = 1$ в $\Omega^T[\sigma]$, то правые части β_i находятся явно:

$$\beta_i = \int_{\sigma \times [T-\xi, T]} (T-t) f_i^\xi(x, y, t) dx dy dt \quad (20)$$

(вывод см. в [3]). В этом случае разложение (18) принимает вид

$$1^\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k^N u_k^\xi, \quad (21)$$

где коэффициенты α_k^N определяются из системы (19) с матрицей

$$G_{ik} \stackrel{(15)}{=} \frac{1}{2} \int_{\sigma \times [0, 2T]} u^{f_i^\xi}(x, y, 0, t) \left[\int_t^{2T} f_k^\xi(x, y, s) ds \right] dx dy dt \quad (22)$$

и правыми частями (20).

§3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Постановка. В области $\Omega^T[\sigma]$, заполненной волнами к финальному моменту $t = T$, выделена подобласть

$$B^T[\sigma] := \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \sigma, 0 \leq z < T\}, \quad (23)$$

которая покрывается лучами, исходящими из точек σ ортогонально границе.

Обратная задача состоит в определении функции ρ в подобласти $B^T[\sigma]$ по заданному оператору реакции R^{2T} . Дополнительно считаются известными значения $\rho|_\sigma$.

Напомним, что задание оператора R^{2T} равносильно следующему: для любого управления f , действующего с σ при временах $0 \leq t \leq 2T$, известны значения волны $u^f(x, y, 0, t)$ при всех $(x, y) \in \sigma$ и $0 \leq t \leq 2T$. Добавим, что, за счет некоторого усложнения приводимой ниже процедуры решения обратной задачи, по R^{2T} можно определить и значения $\rho|_\sigma$, так что в принципе задавать их излишне.

Амплитудная формула. • Основным средством решения обратной задачи ВС-методом является *амплитудная формула* (АФ), которая выводится средствами геометрической оптики [1–9].

Здесь мы используем версию АФ из работы [3]:

$$\sqrt{\frac{\rho(x, y, \xi)}{\rho(x, y, 0)}} = \left\{ \left[\partial_t \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k^N \left(C^T f_k^\xi \right) \right] (x, y, t) \right\} \Big|_{t=T-\xi-0}^{t=T-\xi+0}, \quad (24)$$

где $\xi \in (0, T)$ фиксировано, точка (x, y) пробегает область σ , а f_1^ξ, f_2^ξ, \dots – полная система управлений в $\mathcal{F}^{T, \xi}$. Коэффициенты α_k^N определяются из системы Грама (19)

$$\sum_{k=1}^N G_{ik} \alpha_k^N = \beta_i \quad (25)$$

с матрицей

$$G_{ik} = \frac{1}{2} \int_{\sigma \times [0, 2T]} u^{f_i^\xi}(x, y, 0, t) \left[\int_t^{2T} f_k^\xi(x, y, s) ds \right] dx dy dt \quad (26)$$

(см. (22)) и правыми частями

$$\beta_i = \int_{\sigma \times [T-\xi, T]} (T-t) f_i^\xi(x, y, t) dx dy dt, \quad (27)$$

(см. (20)).

Решение. Амплитудная формула позволяет определить скорость ρ в подобласти $B^T[\sigma]$ с помощью следующей процедуры.

Шаг 1. Фиксируем $\xi \in (0, T)$.

Выберем полную линейно независимую систему управлений f_1^ξ, f_2^ξ, \dots в подпространстве $\mathcal{F}^{T, \xi}$. Располагая оператором реакции, найдем граничные значения отвечающих им волн $u^{f_k^\xi}(x, y, 0, t)$ при всех $(x, y) \in \sigma$ и $0 < t \leq 2T$. Определим функции

$$\begin{aligned} (C^T f_k^\xi)(x, y, t) &= -\frac{1}{2} \int_t^{2T-t} u^{f_k^\xi}(x, y, 0, s) ds \\ &\stackrel{(14)}{=} \frac{1}{2} \left[u^{F_k^\xi}(x, y, 0, t) - u^{F_k^\xi}(x, y, 0, 2T-t) \right], \quad (x, y) \in \sigma, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (28)$$

где $F_k^\xi(x, y, t) := \int_0^t f_k^\xi(x, y, s) ds$, $0 \leq t \leq 2T$.

Шаг 2. Для каждого $N = 1, 2, \dots$ составим систему Грама (25)–(27) и найдем ее решения α_k^N , $k = 1, \dots, N$.

Шаг 3. Используя (28), определим функцию

$$\Phi(x, y, t) := \left[\partial_t \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k^N (C^T f_k^\xi) \right] (x, y, t), \quad (x, y) \in \sigma, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (29)$$

имеющую разрыв при $t = T - \xi$. По (24) найдем

$$\rho(x, y, \xi) = \rho(x, y, 0) \left\{ \lim_{\delta \rightarrow +0} \left[\Phi(x, y, t) \Big|_{t=T-\xi-\delta}^{t=T-\xi+\delta} \right] \right\}^2, \quad (x, y) \in \sigma. \quad (30)$$

Шаг 4. Выполняя Шаги 1–3 для различных $\xi \in (0, T)$, восстановим $\rho(x, y, \xi)$ при $(x, y) \in \sigma$, $0 < \xi < T$, т.е. всюду в $B^T[\sigma]$.

Обратная задача решена.

Комментарии. • При численной реализации процедуры 1-4 вместо (29) и (30) используются приближения

$$\Phi(x, y, t) \approx \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left[\sum_{k=1}^N \alpha_k^N (C^T f_k^\xi) \right] (x, y, t + \varepsilon) - \left[\sum_{k=1}^N \alpha_k^N (C^T f_k^\xi) \right] (x, y, t) \right\}; \quad (31)$$

$$\rho(x, y, \xi) \approx \rho(x, y, 0) [\Phi(x, y, T - \xi + \delta) - \Phi(x, y, T - \xi - \delta)]^2 \quad (32)$$

с “большим” N и “малыми” ε, δ . К сожалению, какие-либо оценки качества этих приближений не известны.

• Формальная перестановка $\lim_{N \rightarrow \infty}$ и ∂_t в (29) приводит к представлению

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k^N (\partial_t C^T f_k^\xi) \right] (x, y, t) \\ &\stackrel{(16)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k^N}{2} \left[u^{f_k^\xi} - (x, y, 0, t) + u^{f_k^\xi} - (x, y, 0, 2T - t) \right]. \end{aligned}$$

Однако, оправдать ее удается лишь при весьма специальном выборе управлений f_k^ξ . Тем не менее, вместо (31) можно попытаться использовать приближение

$$\Phi(x, y, t) \approx \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k^N}{2} \left[u^{f_k^\xi} - (x, y, 0, t) + u^{f_k^\xi} - (x, y, 0, 2T - t) \right], \quad (33)$$

не содержащее параметра ε .

• При численной реализации значения функций, участвующих в процедуре 1-4, вычисляются на конечных наборах точек (x_i, y_j) и времен ξ_1, \dots, ξ_M . Таким образом, в алгоритме задействованы “большие” параметры – количество ячеек решетки и количество шагов по времени, и “малые” параметры ε, δ – размер ячейки и размер шага. Успешная работа алгоритма зависит от того, насколько удачно согласованы эти параметры. Основных проблем две:

1) с ростом N ухудшается обусловленность матрицы Грама (26). Ее наименьшее собственное значение быстро стремится к нулю, что осложняет решение системы (25)–(27);

2) вычисление разрыва в (32) с использованием дискретной сетки требует привлечения дополнительных регуляризационных процедур.

Надо, однако, иметь ввиду, что указанные осложнения типичны и неизбежны при решении сильно некорректных задач. Многомерные обратные задачи – в их числе.

- Отметим, что успешные примеры реализации ВС-алгоритмов относятся к задаче с управлением Дирихле: см. [6–9].

Можно ожидать, что в задаче с управлением Неймана наличие производной ∂_t в (29) привнесет дополнительные осложнения.

§4. ТЕСТ

Тестом мы называем задачу (1)–(3), в которой $\rho \equiv 1$, а носители управлений покрывают квадрат $D = [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$. Но во вспомогательных вычислениях нам понадобятся функции с носителем на круге

$$\sigma = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = a^2\}.$$

Если не оговорено противное, речь идет именно об этом случае.

Прямая задача. Приведем решение прямой тестовой задачи. Пусть

$$E(x, y, z, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \delta(t^2 - x^2 - y^2 - z^2), & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

есть фундаментальное решение волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0$ в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Пусть u^f – решение (1)–(3), а функция

$$u^+(x, y, z, t) := \begin{cases} u^f(x, y, z, t), & z > 0, \\ u^f(x, y, -z, t), & z < 0 \end{cases}$$

– его четное продолжение (по z). Для него имеем

$$\begin{aligned} u_{tt}^+ - u_{xx}^+ - u_{yy}^+ - u_{zz}^+ &= r \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u^+|_{t < 0} &= 0 \end{aligned}$$

с правой частью

$$r(x, y, z, t) = -2u^f(x, y, 0, t)\delta(z) \stackrel{(3)}{=} -2f(x, y, t)\delta(z),$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. Отсюда $u^+ = E * r$, что легко ведет к представлению

$$u^f(x, y, z, t) = u^+(x, y, z, t)|_{z \geq 0} = \begin{cases} 0, & z > t, \\ -\frac{1}{2\pi} \int_{W_t(x, y, z)} \frac{f(\xi, \eta, t - \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} d\xi d\eta, & z < t, \end{cases} \quad (34)$$

где $W_t(x, y, z)$ есть пересечение шара

$$\{(\xi, \eta, \zeta) \mid (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \leq t^2\}$$

с плоскостью $z = 0$.

Основное решение. • Пусть

$$\chi_\sigma(x, y) := \begin{cases} 0, & (x, y) \notin \sigma, \\ 1, & (x, y) \in \sigma. \end{cases}$$

есть характеристическая функция круга σ . Рассмотрим задачу (1)–(3) с $T = \infty$ и управлением $f = \chi_\sigma(x, y)\theta(t)$, где $\theta(t)$ – функция Хевисайда

$$\theta(t) := \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Решение задачи обозначим $U(x, y, z, t) = u^f(x, y, z, t)$ и будем называть его *основным*. Используя (34) и осевую симметрию задачи, это решение удастся найти в квадратурах. Опуская вполне стандартные вычисления, приведем результат.

• Для описания основного решения выделим в \mathbb{R}_+^3 множества: окружность радиуса a $S := \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = a^2\}$, $\Omega^t[S]$ – t -окрестность S , лежащая в \mathbb{R}_+^3 и $B^t[\sigma] := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq t\}$ – цилиндр с основанием σ . Кроме того, введем пространственные области (зоны) специальной формы: см. рис. 1. Все они являются телами вращения вокруг оси z , так что их описание сводится к описанию вертикальных сечений.

Зона $I = \mathbb{R}_+^3 \setminus \{\Omega^t[S] \cup B^t[\sigma]\}$; при всех временах ее сечением является дополнение к части верхней полуплоскости, ограниченной контуром $\{5, 2, 3, 4\}$. Это "зона покоя": в ней $U \equiv 0$.

Зона $II = B^t[\sigma] \setminus \Omega^t[S]$; при временах $t < a$ ее сечение ограничено контуром $\{1, 3, 4, 6\}$, а при $t > a$ – контуром $\{3, 4, 7\}$.

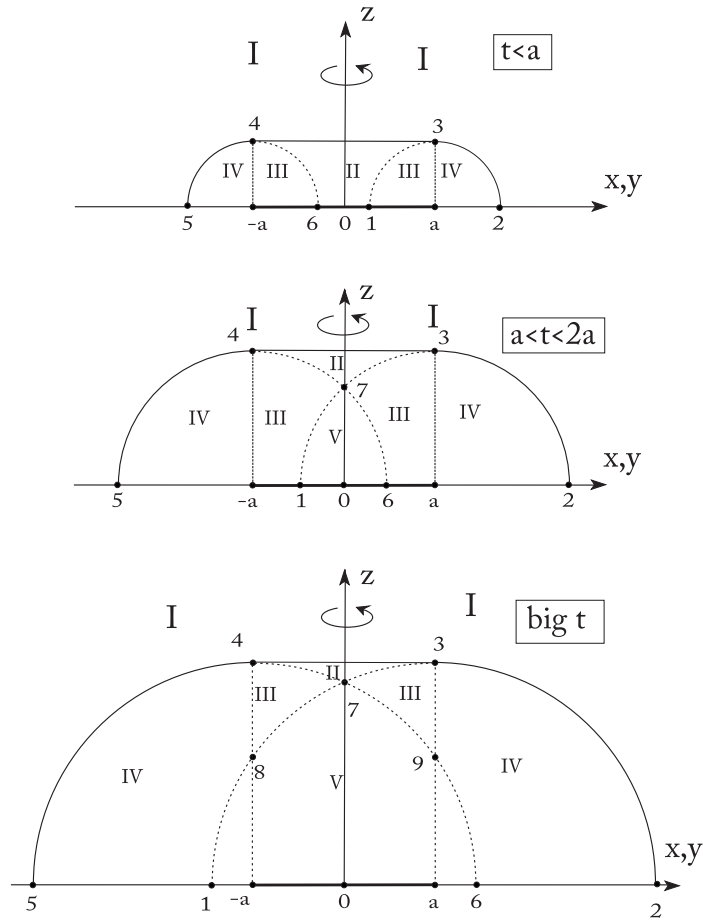


Рис. 1. Зоны.

Зона $III = \Omega^t[S] \cap B^t[\sigma]$; при $t < a$ ее сечение состоит из двух треугольников, ограниченных контурами $\{-a, 6, 4\}$ и $\{1, a, 3\}$; при $a < t < 2a$ – из двух четырехугольников ограниченных контурами $\{-a, 1, 7, 4\}$ и $\{6, a, 3, 7\}$; при $t > 2a$ – из двух треугольников, ограниченных контурами $\{8, 7, 4\}$ и $\{9, 3, 7\}$.

Зона $IV = \Omega^t[S] \setminus B^t[\sigma]$; при $t < 2a$ ее сечение состоит из двух треугольников, ограниченных контурами $\{5, -a, 4\}$ и $\{a, 2, 3\}$; при $t > 2a$ – из двух четырехугольников ограниченных контурами $\{5, 1, 8, 4\}$ и $\{6, 2, 3, 9\}$.

При $t > a$ появляется зона V , сечением которой служит треугольник, ограниченный контуром $\{1, 6, 7\}$.

Опишем основное решение:

1. при $t < a$ справедливо представление

$$U(x, y, z, t) = \begin{cases} 0, & (x, y, z) \in I, \\ -(t-z)\theta(t-z), & (x, y, z) \in II, \\ -\frac{1}{2\pi} \frac{a^2+z^2+R^2-t^2}{R-\sqrt{t^2-z^2}} \int_{R-\sqrt{t^2-z^2}}^a \ln \left| \frac{\sqrt{t^2-z^2-(\xi-R)^2+t}}{-\sqrt{t^2-z^2-(\xi-R)^2+t}} \right| d\xi, & (x, y, z) \in III \cup IV, \\ -\frac{1}{2\pi} \frac{a^2+z^2+R^2-t^2}{2R} \int_{\frac{a^2+z^2+R^2-t^2}{2R}}^a \ln \left| \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}+\sqrt{a^2-\xi^2+(R-\xi)^2+z^2}}{-\sqrt{a^2-\xi^2}+\sqrt{a^2-\xi^2+(R-\xi)^2+z^2}} \right| d\xi, & (x, y, z) \in III \cup IV, \end{cases} \quad (35)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$;

2. при $t > a$ в зонах I, II, III и IV решение U дается теми же формулами (35), что и при $t < a$, а в появившейся зоне V справедливо представление

$$U(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \ln \left(\sqrt{a^2 - \xi^2} + \sqrt{a^2 - \xi^2 + (R - \xi)^2 + z^2} \right) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \ln \left(-\sqrt{a^2 - \xi^2} + \sqrt{a^2 - \xi^2 + (R - \xi)^2 + z^2} \right) d\xi, \quad (x, y, z) \in V. \quad (36)$$

Можно показать, что основное решение непрерывно по всем своим переменным. Кроме того, при каждом $t > 0$ нормальная производная (по пространственным переменным) решения при переходе через поверхность, образованную вращением полуокружностей $\{1, 3, 2\}$ и $\{5, 4, 6\}$, также сохраняет непрерывность, а вторая производная по нормали в точке перехода терпит разрыв.

Дополнительно отметим, что при независимом от x, y управлении $f = \theta(t)$ задача (1)–(3) имеет решение $u^\theta(x, y, z, t) = -(t-z)\theta(t-z)$.

В зоне II основное решение U при всех временах совпадает с u^θ по принципу конечности области влияния.

Реакция системы (1)–(3) на действие управления $\chi_\sigma \theta$ есть

$$(R[\chi_\sigma \theta])(x, y, t) = u^{\chi_\sigma \theta}(x, y, 0, t) = U(x, y, 0, t), \quad (x, y) \in \sigma, t \geq 0.$$

• В ходе подготовки теста весьма полезен промежуточный контроль вычислений. Имеется ввиду возможность находить решения не только из представлений (35)–(36), но и каким-либо альтернативным способом и, затем, сравнивать одни и те же решения, полученные разными способами. Для определенности мы будем говорить о методе сеток для решения задачи (1)–(3) и помечать сеточные решения значком (\sim). На данном этапе следует сравнить U с \tilde{U} и $R[\chi_\sigma \theta] = U|_{z=0}$ с $\tilde{U}|_{z=0}$, вычисляя их значения в узлах общей сетки.

Источники. • Используемое управление $f(x, y, t) = \chi_\sigma(x, y) \theta(t)$ мы называем *источником конечной апертуры*, а радиус a круга σ – *апертурой*.

Фиксируем $\delta > 0$. Управление

$$f^\delta(x, y, t) := \chi_\sigma(x, y) [\theta(t) - \theta(t - 2\delta)],$$

действующее с круга σ в течение $0 \leq t \leq 2\delta$, назовем *импульсным источником* длительности 2δ . По линейности соответствия “управление \mapsto волна” имеем:

$$U^\delta(x, y, z, t) := u^{f^\delta}(x, y, z, t) = U(x, y, z, t) - U(x, y, z, t - 2\delta), \\ (x, y) \in \sigma, z \geq 0, t \geq 0,$$

где $U(\dots, t - 2\delta)$ понимается в соответствии с Соглашением 1. Это решение также выражается явно через формулы (35)–(36). При каждом $t > 0$ волна $U^\delta(\dots, t)$ локализована в области $\Omega^t[\sigma]$, но ее форма сложнее чем у $U(\dots, t)$.

Реакция системы на импульсный источник есть

$$(Rf^\delta)(x, y, t) = U^\delta(x, y, 0, t) = U(x, y, 0, t) - U(x, y, 0, t - 2\delta) \\ = (Rf)(x, y, t) - (Rf)(x, y, t - 2\delta), \quad (x, y) \in \sigma, t \geq 0;$$

ее также можно выразить в квадратурах с использованием формул (35)–(36).

Для контроля вычислений полезно сравнить $U^\delta, U^\delta|_{z=0}$ с $\tilde{U}^\delta, \tilde{U}^\delta|_{z=0}$ при различных x, y, z, t .

- Пусть $\tau \geq 0$ и $(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$. Об управлении

$$\begin{aligned} f_{\zeta\eta\tau}(x, y, t) &:= f^\delta(x - \zeta, y - \eta, t - \tau) = \\ &= \chi_\sigma(x - \zeta, y - \eta) [\theta(t - \tau + \delta) - \theta(t - \tau - \delta)] \end{aligned}$$

будем говорить как об импульсном источнике с центром в (ζ, η, τ) . Ему отвечают волна

$$\begin{aligned} U_{\zeta\eta\tau}(x, y, z, t) &:= u^{f_{\zeta\eta\tau}}(x, y, z, t) = U_\sigma^\delta(x - \zeta, y - \eta, z, t - \tau + \delta), \\ &(x, y) \in \mathbb{R}^2, z \geq 0, t \geq 0, \end{aligned}$$

и реакция

$$\begin{aligned} (Rf_{\zeta\eta\tau})(x, y, t) &= U_{\zeta\eta\tau}(x, y, 0, t) = U_\sigma^\delta(x - \zeta, y - \eta, 0, t - \tau + \delta), \\ &(x, y) \in \mathbb{R}^2, t \geq 0, \end{aligned}$$

которые могут быть найдены с использованием формул (35)–(36).

При контроле вычислений значения $U_{\zeta\eta\tau}$, $U_{\zeta\eta\tau}|_{z=0}$ сравниваются с $\tilde{U}_{\zeta\eta\tau}$, $\tilde{U}_{\zeta\eta\tau}|_{z=0}$ при различных x, y, z, t .

Произведения волн. Приведем два способа нахождения скалярных произведений волн, отвечающих импульсным источникам. Для простоты рассматриваются источники одинаковой апертуры a и длительности 2δ с центрами (ζ, η, τ) и (ζ', η', τ') соответственно, причем $\delta \leq \tau \leq T - \delta$ и $\delta \leq \tau' \leq T - \delta$.

- Источник $f_{\zeta\eta\tau}$ действует с круга

$$\sigma_{\zeta\eta} := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | (x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 \leq a^2\}$$

и включается в момент $t = \tau - \delta$. В силу (6) инициированная им волна $u^{f_{\zeta\eta\tau}} = U_{\zeta\eta\tau}$ в финальный момент $t = T$ локализована в соответствующей окрестности круга:

$$\text{supp } u^{f_{\zeta\eta\tau}}(\dots, T) \subset \Omega^{T-\tau+\delta}[\sigma_{\zeta\eta}].$$

Вполне аналогично для второго источника $f_{\zeta'\eta'\tau'}$ имеем

$$\text{supp } u^{f_{\zeta'\eta'\tau'}}(\dots, T) \subset \Omega^{T-\tau'+\delta}[\sigma_{\zeta'\eta'}].$$

Как следствие, согласно (8) получаем

$$\begin{aligned} &(u^{f_{\zeta\eta\tau}}(\dots, T), u^{f_{\zeta'\eta'\tau'}}(\dots, T))_{\mathcal{H}^T} \\ &= \int_{\Omega_{\zeta\eta\zeta'\eta'}^{\tau, \tau'}} U_{\zeta\eta\tau}(x, y, z, T) U_{\zeta'\eta'\tau'}(x, y, z, T) dx dy dz, \end{aligned} \quad (37)$$

где $\Omega_{\zeta\eta\zeta'\eta'}^{\tau\tau'} := \Omega^{T-\tau+\delta}[\sigma^{\zeta\eta}] \cap \Omega^{T-\tau'+\delta}[\sigma^{\zeta'\eta'}]$. Произведение $U_{\zeta\eta\tau}U_{\zeta'\eta'\tau'}$ под интегралом можно выразить через формулы (35) - (36), но соответствующие выражения очень громоздки. Кроме того, область $\Omega_{\zeta\eta\zeta'\eta'}^{\tau\tau'}$ может иметь весьма сложную форму. В силу сказанного, представляется целесообразным вычислять интеграл по значениям $U_{\zeta\eta\tau}$ и $U_{\zeta'\eta'\tau'}$ на сетке в \mathbb{R}_+^3 .

• Второй способ состоит в нахождении скалярного произведения по данным обратной задачи, т.е. через реакцию: используется представление (15). Отметим, что при его выводе предполагалось, что управления f и g действуют с общего множества σ . Полагая

$$\sigma = \sigma^{\zeta\eta} \cup \sigma^{\zeta'\eta'}$$

так что $\sigma^{\zeta\eta}, \sigma^{\zeta'\eta'} \subset \sigma$, мы обеспечиваем это условие для импульсных источников.

Нечетное продолжение $f_{\zeta\eta\tau}^- := S_-^T f_{\zeta\eta\tau}$ импульсного источника имеет вид

$$f_{\zeta\eta\tau}^-(x, y, t) = f_{\zeta\eta\tau}(x, y, t) - f_{\zeta\eta\tau}(x, y, t - 2(T - \tau)), \quad 0 \leq t \leq 2T,$$

откуда

$$u_{\zeta\eta\tau}^{f^-}(x, y, z, t) = U_{\zeta\eta\tau}(x, y, z, t) - U_{\zeta\eta\tau}(x, y, z, t - 2(T - \tau)), \quad 0 \leq t \leq 2T,$$

и, соответственно,

$$u_{\zeta\eta\tau}^{f^-}(x, y, 0, t) = \left(R^{2T} f_{\zeta\eta\tau}^-\right)(x, y, t) = U_{\zeta\eta\tau}(x, y, 0, t) - U_{\zeta\eta\tau}(x, y, 0, t - 2(T - \tau)).$$

Внутренний интеграл в (15) в нашем случае имеет вид

$$\int_t^{2T} f_{\zeta'\eta'\tau'}^-(x, y, s) ds = \chi_{\sigma^{\zeta'\eta'}}(x, y) \lambda^{\tau'}(t), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq t \leq 2T, \quad (38)$$

где

$$\chi_{\sigma^{\zeta'\eta'}}(x, y) := \begin{cases} 1, & (x, y) \in \sigma^{\zeta'\eta'}, \\ 0, & (x, y) \notin \sigma^{\zeta'\eta'} \end{cases}$$

есть характеристическая функция множества $\sigma^{\zeta'\eta'}$, а $\lambda^{\tau'}$ – кусочно-линейная функция вида

$$\lambda^{\tau'}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \tau' - \delta, \\ -t + \tau' - \delta, & \tau' - \delta \leq t \leq \tau' + \delta, \\ -2\delta, & \tau' + \delta \leq t \leq 2T - \tau' - \delta, \\ t - 2T + \tau' - \delta, & 2T - \tau' - \delta \leq t \leq 2T - \tau' + \delta, \\ 0, & 2T - \tau' + \delta \leq t \leq 2T. \end{cases}$$

Подставляя (4) и (38) в (15), получаем

$$\begin{aligned} & (u^{f_{\zeta\eta\tau}(\dots, T)}, u^{f_{\zeta'\eta'\tau'}(\dots, T)})_{\mathcal{H}^T} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\sigma^{\zeta'\eta'} \times [0, 2T]} [U_{\zeta\eta\tau}(x, y, 0, t) - U_{\zeta\eta\tau}(x, y, 0, t - 2(T - \tau))] \lambda^{\tau'}(t) dx dy dt. \quad (39) \end{aligned}$$

Так как реакция на управления в обратной задаче предполагается известной, представление (39) можно использовать для ее решения. Оно играет ключевую роль.

- При подготовке теста рекомендуется вычислить произведения волн для различных значений параметров $a, \delta, \eta, \zeta, \tau, \eta', \zeta', \tau'$, обоими способами – по (37) и по (39), и сравнить результаты.

Система Грама. • Численная реализация процедуры **Шаг 1–Шаг 4** использует систему управлений, моделирующую полные системы управлений f_k^ξ в подпространствах \mathcal{F}^T, ξ . В качестве таковых предлагаются импульсные источники конечной апертуры. Приведем их описание.

Пусть имеется возможность располагать источники в узлах прямоугольной решетки в квадрате $D = [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ со стороной $L = \beta - \alpha$. Разобьем стороны на I равных частей:

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha, \quad x_i = x_{i-1} + \frac{L}{I}, \quad i = 1, \dots, I; \\ y_0 &= \alpha, \quad y_j = y_{j-1} + \frac{L}{I}, \quad j = 1, \dots, I. \end{aligned}$$

Центры полученных отрезков обозначим соответственно $\zeta_i = x_{i-1} + \frac{L}{2I}$ и $\eta_j = y_{j-1} + \frac{L}{2I}$. Возьмем покрытие квадрата D кругами $\sigma^{ij} := \sigma^{\zeta_i \eta_j}$ с центрами в точках (ζ_i, η_j) радиуса $a = \frac{L}{2I} \sqrt{2}$.

Временной интервал $[0, T]$ разбивается на K сегментов

$$[\xi_k, \xi_{k-1}] : \xi_0 = T; \quad \xi_k = \xi_{k-1} - \frac{T}{K}, \quad k = 1, \dots, K; \quad \xi_K = 0$$

длины $\frac{T}{K}$ с центрами $\tau_k = \xi_{k-1} - \frac{T}{2K}$, что соответствует $\delta = \frac{T}{2K}$. Отметим, что сегменты и их центры пронумерованы от $t = T$ к $t = 0$.

Роль множества-носителя управлений сейчас играет область

$$\sigma = \bigcup_{i,j=1,\dots,I} \sigma^{ij}$$

границы полупространства $z \geq 0$. Напомним, что в этом случае процедура решения обратной задачи восстанавливает коэффициент ρ в области $B[\sigma]$: см. (23).

Полная система управлений во внешнем пространстве \mathcal{F}^T (со скалярным произведением (7)) моделируется системой источников

$$\begin{aligned} f_{ijk} &:= f_{\zeta_i \eta_j \tau_k} = \chi_{\sigma^{ij}}(x, y) [\theta(t - \xi_k) - \theta(t - \xi_{k-1})], \\ 0 \leq t \leq T; \quad i, j &= 1, \dots, I; \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (40)$$

Полная система управлений в подпространствах $\mathcal{F}^{T, \xi}$ с $\xi = \xi_1, \dots, \xi_K$ моделируется подсистемами

$$f_{ijk}, \quad i, j = 1, \dots, I; \quad k = 1, \dots, p \quad (p = 1, \dots, K)$$

системы (40).

• Обозначим $U_{ijk} := U_{\zeta_i \eta_j \tau_k}$. Матрицу Грама системы источников (40) найдем согласно (39):

$$\begin{aligned} G_{ijk \ mnl} &:= (u^{f_{ijk}}(\dots, T), u^{f_{mnl}}(\dots, T))_{\mathcal{H}^T} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\sigma^{mn} \times [0, 2T]} [U_{ijk}(x, y, 0, t) - U_{ijk}(x, y, 0, t - 2(T - \tau_k))] \lambda^{\tau_l}(t) dx dy dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\sigma^{mn}} dx dy \int_0^{2T} [U_{ijk}(x, y, 0, t) - U_{ijk}(x, y, 0, t - 2(T - \tau_k))] \lambda^{\tau_l}(t) dt, \\ i, j, m, n &= 1, \dots, I; \quad k, l = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (41)$$

Источникам в подпространствах \mathcal{F}^{T, ξ_p} отвечают усеченные матрицы

$$G_{ijk \ mnl}, \quad i, j, m, n = 1, \dots, I; \quad k, l = 1, \dots, p, \quad (p = 1, \dots, K),$$

входящие в систему Грама (27). Правые части в (27) суть

$$\begin{aligned}\beta_{ijk}^{\xi_p} &= \int_{\sigma^{ij} \times [T-\xi_p, T]} (T-t) f_{ijk}(x, y, t) dx dy dt \\ &= \int_{\xi_k}^{\xi_{k-1}} \left(\int_{\sigma^{ij}} f_{ijk}(x, y, t) dx dy \right) (T-t) dt = \frac{\pi a^2}{2} [(T-\xi_k)^2 - (T-\xi_{k-1})^2] \\ &= \frac{\pi L^2 T^2}{4T^2 K^2} (2k-1), \quad i, j = 1, \dots, I; \quad k = 1, \dots, p \quad (p = 1, \dots, K). \quad (42)\end{aligned}$$

• Далее, по процедуре **Шаг 1–Шаг 4**, для всех ξ_p ($p = 1, \dots, K$) составляются системы Грама

$$\sum_{\substack{m, n=1, \dots, I; \\ l=1, \dots, K}} G_{ijk mnl} \alpha_{mnl}^{\xi_p} = \beta_{ijk}^{\xi_p}, \quad i, j = 1, \dots, I; \quad k = 1, \dots, p \quad (43)$$

с матрицами (41) и правыми частями (42) и находятся их решения $\alpha_{mnl}^{\xi_p}$. По ним, согласно (33), определяются функции

$$\Phi^{\xi_p}(\zeta_i, \eta_j, \tau_k) \approx \sum_{\substack{m, n=1, \dots, I; \\ l=1, \dots, K}} \frac{\alpha_{mnl}^{\xi_p}}{2} [U_{mnl}(\zeta_i, \eta_j, 0, \tau_k) + U_{mnl}(\zeta_i, \eta_j, 0, 2T - \tau_k)].$$

Наконец, используя амплитудную формулу (32), определяем искомую функцию ρ на сетке (ζ_i, η_j, ξ_p) в области $\sigma \times [0, T]$:

$$\rho(x, y, z) \Big|_{x=\zeta_i, y=\eta_j, z=\xi_p} \approx \rho(\zeta_i, \eta_j, 0) [\Phi^{\xi_p}(\zeta_i, \eta_j, \tau_p) - \Phi^{\xi_p}(\zeta_i, \eta_j, \tau_{p+1})]^2, \\ i, j = 1, \dots, I; \quad p = 1, \dots, K.$$

В нашем тесте $\rho \equiv 1$ и, в случае успешной работы алгоритма, равенство

$$1 \approx [\Phi^{\xi_p}(\zeta_i, \eta_j, \tau_p) - \Phi^{\xi_p}(\zeta_i, \eta_j, \tau_{p+1})]^2, \quad i, j = 1, \dots, I; \quad p = 1, \dots, K.$$

должно выполняться с приемлемой точностью.

• Отметим еще один способ контроля вычислений. После того, как система (43) решена и постоянные $\alpha_{mnl}^{\xi_p}$ найдены, можно проверить равенство (21), которое в данном случае имеет вид

$$1^{\xi_p}(x, y, z) \approx \sum_{\substack{m, n=1, \dots, I; \\ l=1, \dots, K}} \alpha_{mnl}^{\xi_p} U_{mnl}(x, y, z, T), \quad (x, y, z) \in B^T[\sigma]$$

и должно выполняться с удовлетворительной точностью.

- В алгоритме полезно предусмотреть возможность регулировать амплитуду источников: использовать управления Af_{ijk} вместо f_{ijk} . Из физических соображений резонно использовать “короткие импульсы единичной мощности” $f = \frac{1}{a\delta} f_{ijk}$, создающие волны u^f с резким передним фронтом. В этом случае можно ожидать, что амплитудная формула, которая основана на геометрической оптике, будет давать удовлетворительные приближения.
- Несложные изменения позволят приготовить тест с $\rho = 1$, использующий источники других профилей $f(x, y, t) = \chi_\sigma(x, y)\psi(t)$, где $\psi(t)$ – суммируемая функция времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method)*. — Inverse Problems **13**, No. 5 (1997), R1–R45.
2. M. I. Belishev., *How to see waves under the Earth surface (the BC-method for geophysicists)*. — In: Ill-Posed and Inverse Problems. S. I. Kabanikhin and V. G. Romanov (Eds). VSP 2002, pp. 55–72.
3. M. I. Belishev., *Dynamical Inverse Problem for the Equation $u_{tt} - \Delta u - \nabla \rho \cdot \nabla u = 0$ (the BC-Method)*. — CUBO A Math. J. **10**, No. 2 (2008), 17–33.
4. M. I. Belishev., *Boundary Control Method*. — *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics* Vol. 1, pp. 142–146.
5. М. И. Белишев, *Граничное управление и томография римановых многообразий (BC-метод)*. — Усп. Мат. Наук **72**, вып. 4 (2017), 3–66.
6. М. И. Белишев, Н. А. Каразеева, *Простейший тест для двумерной динамической обратной задачи (BC-метод)*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **471** (2018), 28–59.
7. M. I. Belishev, V. Yu. Gotlib, *Dynamical variant of the BC-method: theory and numerical testing*. — J. Inverse and Ill-Posed Problems **7**, No. 3 (1999), 221–240.
8. M. I. Belishev, I. B. Ivanov, I. V. Kubyshkin, V. S. Semenov, *Numerical testing in determination of sound speed from a part of boundary by the BC-method*. — J. Inverse and Ill-Posed Problems **24**, No. 2 (2016), 159–180.
9. M. V. De Hoop, P. Kepley, L. Oksanen, *Recovery of a smooth metric via wave field and coordinate transformation reconstruction*. — SIAM J. Appl. Math. **78**, No. 4 (2018), 1931–1953.
10. I. B. Ivanov, M. I. Belishev, V. S. Semenov, *The reconstruction of sound speed in the Marmousi model by the boundary control method*. arXiv: 1609.07586v1 [physics.geo-ph] 24 Sept 2016.
11. L. Oksanen, *Solving an inverse obstacle problem for the wave equation by using the boundary control method*. — Inverse Problems **29**, No. 3 (2013), 035004.
12. A. A. Timonov, *On Quantitative Acoustic Imaging Via Boundary Control Method*. Proceedings of the conference “Days of Diffraction”, Steklov’s Mathematics Institute of the Russian Academy of Science”, St.Petersburg, June 3-7, 2019.

Belishev M. I., Blagoveshchensky A. S., Karazeeva N. A. Simplest test for three-dimensional dynamical inverse problem (the BC-method)

A dynamical system

$$\begin{aligned}u_{tt} - \Delta u - \nabla \ln \rho \cdot \nabla u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+^3 \times (0, T), \\u|_{t=0} = u_t|_{t=0} &= 0 && \text{in } \overline{\mathbb{R}_+^3}, \\u_z|_{z=0} &= f && \text{for } 0 \leq t \leq T,\end{aligned}$$

is under consideration, where $\rho = \rho(x, y, z)$ is a smooth positive function; $f = f(x, y, t)$ is a boundary control; $u = u^f(x, y, z, t)$ is a solution. With the system one associates a *response operator* $R : f \mapsto u^f|_{z=0}$. The inverse problem is to recover the function ρ via the response operator. The short presentation of the local version of the BC-method, which recovers ρ via the data given on a part of the boundary, is provided.

If ρ is constant, the forward problem is solved in explicit form. In the paper, the corresponding representations for the solutions and response operator are derived. The way to use them for testing the BC-algorithm, which solves the inverse problem, is outlined. The goal of the paper is to extend the circle of the BC-method users, who are interested in numerical realization of methods for solving inverse problems.

С.-Петербургское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru

Поступило 28 октября 2019 г.

С.-Петербургский государственный
университет
E-mail: ablagoveshhenski.j@yandex.ru

С.-Петербургское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: karazeeva@pdmi.ras.ru