Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 483, 2019 г.

И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ТРЕХ ОДНОМЕРНЫХ КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ В ПАРНЫХ ПОДСИСТЕМАХ. КООРДИНАТНЫЕ АСИМПТОТИКИ ЯДРА РЕЗОЛЬВЕНТЫ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

§1. Введение

Настоящая работа является естественным продолжением работ авторов [3, 4], в которых изучалась задача рассеяния трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами отталкивания. В этих же работах читатель может ознакомиться с историей вопроса. В данной работе, в отличие от упомянутых выше, рассматривается ситуация, когда в парных подсистемах могут реализоваться связные состояния. Следуя логике основателя данной тематики Л. Д. Фаддеева, см. [2], мы ограничиваемся случаем наличия одного связанного состояния в каждой подсистеме.

Основной интерес представляет вклад такого состояния в полную координатную асимптотику собственных функций абсолютно непрерывного спектра.

Естественно, данная работа в значительной степени повторяет логику работы [3]. В основе этой логики лежит изучение предельных значений ядра резольвенты соответствующего оператора Шредингера, когда спектральный параметр садится на положительную полуось, заполненную, как хорошо известно, точками абсолютно непрерывного спектра, см., например, [1]. Эта предельная процедура опирается на альтернирующий метод Шварца (в некотором смысле – вариант уравнений Фаддеева), см. [3, 5], и проводится в рамках оснащенного

Ключевые слова: квантовая задача рассеяния, три одномерные частицы, дискретный спектр.

И.Б. благодарен Российскому Научному Фонду за поддержку в рамках гранта РНФ 17-11-01003.

гильбертова пространства (гельфандовой тройки). При этом оказывается, что координатная асимптотика предельных значений ядра резольвенты на абсолютно непрерывном спектре имеет в точности ту же структуру (но с более богатой аналитикой), что и в работе [3], т.е. при отсутствии связанных состояний в парных подсистемах, см. теорему 3.1. Следует отметить, что доказательство этого факта помимо старых идей потребовало в определенной степени априорной оценки вклада дискретных частей спектра всех парных подсистем. По сути эта оценка вылилась в доказательство обратимости некоторой операторной матрицы, компоненты которой имеют неубывающие на бесконечности ядра (см. лемму 3.2). Заслуживает внимания тот факт, что это доказательство также опирается на альтернирующий метод Шварца, позволяющий свести дело к оценкам в теории вольтеровских операторов.

Как следствие, техника, развитая в работе [4], позволяет вычленить из асимптотики ядра резольвенты координатные асимптотики собственных функций абсолютно непрерывного спектра, см. теорему 4.1.

Для удобства читателя мы напомним основные положения задачи.

§2. Обозначения и предварительные сведения

Рассматривается оператор в $L_2(\mathbb{R}^3)$

$$\widetilde{H} = -\Delta + \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant 3}^{3} v(z_i - z_j), \tag{2.1}$$

$$z_i \in \mathbb{R},\ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3\,,$$

где Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$, $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – четная функция с финитным носителем, а также оператор умножения на эту функцию.

Определим три пары координат Якоби

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_k - z_j), \quad y_i = \sqrt{\frac{3}{2}}z_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \operatorname{sign}(i, j, k) = 1,$$

а также координату центра масс $u = \dfrac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$. В результате деления переменных мы приходим к изучению оператора вида

$$H = -\Delta + \sum_{i=1}^{3} v(x_i), \tag{2.2}$$

заданного в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Отметим, что эта запись отражает возможность записать данный оператор в любой из трех пар координат Якоби. На рис. 1 изображен носитель потенциала в $\mathbb{R}^2$, на котором схематично изображены координаты Якоби. Пару координат Якоби будем обозначать через z или $z_i = (x_i, y_i)$ (в зависимости от контекста), а соответствующие ей орты через k_i, l_i. Символом $|z|$ мы будем обозначать модуль вектора, $\widehat{z} = \dfrac{z}{|z|}$ – соответствующий единичный вектор, $\langle\, \cdot\, ,\, \cdot\, \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

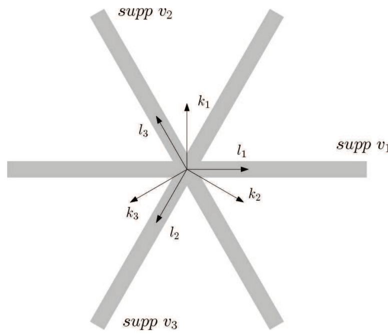

Рис. 1. “Крест” в конфигурационном пространстве, образованный носителями потенциалов.

Прежде всего нас будут интересовать предельные значения ядра резольвенты оператора $R(\lambda) = (H - \lambda I)^{-1}$ при значениях спектрального параметра $\mathrm{Re}\lambda = E > 0$, $\mathrm{Im}\lambda \to +0$ (для определенности мы ограничиваемся пределами сверху) в рамках метода оснащенного гильбертова пространства или гельфандовых троек. Именно, предельные значения рассматриваются на некотором банаховом пространстве $\mathcal{B}$, вложенном в основное гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^2)$ в *-слабом смысле. Обобщённые собственные функции в этом случае трактуются как элементы пространства $\mathcal{B}^*$, а основным объектом изучения становится квадратичная форма $(R(E \pm i\varepsilon)\varphi, \varphi)$, $\varphi \in \mathcal{B}$, при $\varepsilon \downarrow 0$, определяющая оператор $R(E + i0)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}^*$.

В дальнейшем нам также понадобятся операторы

$$R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda I)^{-1},$$
$$R_j(\lambda) = (-\Delta + v_j - \lambda I)^{-1}$$

(v_i – в координатном представлении оператор умножения на $v(x_i)$).

Опишем асимптотики их ядер. Асимптотика $R_0(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}'|\lambda)$ при $\mathbf{Im}\ \lambda>0,\ |\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|\to\infty$ имеет вид

$$R_0(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}'|\lambda)=H_0(\sqrt{\lambda|z-z'|})/4i\sim\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{\lambda}}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|}}{|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|^{1/2}}. \tag{2.3}$$

Одночастичная резольвента R_j может быть описана интегралом

$$R_j(z,z'|\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C d\xi r(x_j,x_j'|\xi)r_0(y_j,y_j'|\lambda-\xi)\,. \tag{2.4}$$

Здесь C – контур вокруг спектра парного одномерного оператора Шредингера в стандартном отрицательном направлении, r_0 и r — ядра резольвент операторов

$$h_0=-\frac{d^2}{dy^2}\quad\text{и}\quad h=-\frac{d^2}{dx^2}+v(x) \tag{2.5}$$

соответственно. Ядро свободной резольвенты r_0 для случая $\operatorname{Im}k>0$ дается равенством

$$r_0(y,y'|k^2)=\frac{i}{2k}e^{ik|y-y'|}\,.$$

Обозначим, далее, через φ_- – решение уравнения

$$-\varphi''+v\varphi=k^2\varphi$$

с асимптотикой $s(k)e^{ikx}$ при больших положительных x ($s(k)$ – коэффициент прохождения, четная функция). Аналогично, пусть φ_+ – решение того же уравнения с асимптотикой $s(k)e^{-ikx}$ при больших отрицательных x. Якобиан этих решений равен $W[\varphi_+,\varphi_-]=2iks(k)$. Тогда ядро резольвенты $r(x,x'|k^2)$ имеет вид

$$\frac{\varphi_+(x)\varphi_-(x')}{W}\,,\quad x<x'\quad\text{и}\quad\frac{\varphi_-(x)\varphi_+(x')}{W}\,,\quad x>x'\,.$$

При этом коэффициент $s(k)$ имеет полюс (в точке дискретного спектра).

Резольвента R_j естественным образом распадается на две части:

$$R_j=R_j^d+R_j^{ac} \tag{2.6}$$

где R_j^d – интеграл по окружности малого радиуса вокруг точки дискретного спектра, то есть вычет:

$$R_j^d(z,z'|\lambda) = \frac{\psi_0(x_j)\psi_0(x_j')e^{i\sqrt{\lambda-\lambda_0}|y_j-y_j'|}}{2a'(\sqrt{\lambda_0})\sqrt{\lambda-\lambda_0}}, \quad \lambda_0 < 0. \tag{2.7}$$

Здесь $\psi_0(x)$ – собственная функция оператора h с асимптотикой $e^{-\sqrt{|\lambda_0|}|x|}$ в единственной точке дискретного спектра λ_0, $a(k) = 1/s(k)$, R_j^{ac} – интеграл по контуру вокруг положительной полуоси. При этом необходимо иметь в виду, что выбор координат Якоби ассоциирован с j-ой парой частиц или, что то же самое, с j-ой полосой носителя потенциала. В тех редких случаях, когда это не приводит к недоразумениям, этот индекс будет опускаться.

Асимптотика ядра R_j^{ac} исследуется методом стационарной фазы (см. например [3]). Интерес представляют асимптотики, когда первая переменная лежит в j-ой полосе, убегая в направлении $\pm\mathbf{l}_j$, а вторая лежит либо в этой полосе, либо вне полосы:

$$\begin{gathered} R_j^{ac}(z,z',\lambda) = \varphi_\pm(x',k_0)\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{\lambda}}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z-z'|}}{|z-z'|^{1/2}} + O(|z-z'|^{-1}), \\ \widehat{z}' \neq \pm\mathbf{l}_j, \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$R_j^{ac}(z,z',\lambda) = O(|z-z'|^{-1}), \quad \widehat{z}' = \pm\mathbf{l}_j, \tag{2.9}$$

Здесь

$$k_0 = \frac{\sqrt{\lambda}x'}{|z-z'|} + O(|z-z'|^{-1}), \tag{2.10}$$

и выбор решения $\varphi_\pm$ определяется знаком проекций z, z' на орт x_i (также, как и в исходной парной резольвенте).

§3. Теорема о предельных значениях резольвенты

Как и в случае отсутствия связанных состояний в парных подсистемах, см. [3], имеет силу

Теорема 3.1. *Обозначим через $\widehat{H}^{\mu,\theta}$ банахово пространство функций, Фурье-образы которых лежат в*

$$H^{\mu,\theta}(\mathbb{R}^2) = \Big\{ f : \|f\|_{\mu,\theta} = \sup_{\eta,\zeta}(1+|\zeta|^{1+\theta})\Big(|f(\zeta)| + \frac{|f(\zeta+\eta)-f(\zeta)|}{|\eta|^\mu}\Big) < \infty \Big\},$$

и пусть $v(x)$ такова, что ее образ Фурье лежит в $H^{\mu,\theta}(\mathbb{R})$.

Тогда при $1 > \mu, \theta > 1/2,\ 0 < c_1 \leqslant Re\ \lambda \leqslant c_2 < \infty$ *резольвента* $R(\lambda)$ *имеет *-слабый предел в* $\widehat{H}^{\mu,\theta}$ *при* $Im\ \lambda \to +0$*, причем:*

$$R(E+i0) = w\text{*-}\lim_{\varepsilon\to+0} R_0(E+i\varepsilon)\cdot\Bigg[\Bigg(I - \sum_i v_i R_i(E+i\varepsilon)$$

$$+\sum_{i\neq j} v_i R_i(E+i\varepsilon) v_j R_j(E+i\varepsilon) - \sum_{i\neq j\neq k} v_i R_i(E+i\varepsilon) v_j R_j(E+i\varepsilon) v_k R_k(E+i\varepsilon)\Bigg)$$

$$+\sum_{i=1}^{3} C_i(E+i\varepsilon) R_i^d(E+i\varepsilon) + A(E+i\varepsilon) + B(E+i\varepsilon)\Bigg]. \tag{3.1}$$

Здесь $E = Re\ \lambda$, $A(E+i\varepsilon)$ *– оператор конечного ранга, действующий в линейную оболочку функций* $\Psi_{\pm}^{(i)},\ i = 1,2,3$*, носитель которых ограничен носителем потенциалов* v_i *и обладающих асимптотическим поведением на бесконечности*

$$\Psi_{\pm}^{(i)}(z') \sim \frac{C_A e^{i\sqrt{\lambda}|z'|}}{|z'|^{1/2}}, \tag{3.2}$$

и $B(E+i\varepsilon)$ *– компактный оператор с ядром, удовлетворяющим оценке*

$$|B(z,z')| \leqslant \frac{C_B |v(x)||\phi_{\pm}(x,0)|}{(1+|z|)^{3/2}(1+|z'|)^{1/2}}, \tag{3.3}$$

где $\phi_{\pm}(x,k)$ *– решения уравнения,*

$$-\phi'' + v\phi = k^2\phi$$

имеющие вид $s(k)e^{\mp ikx}$ *при достаточно больших отрицательных (положительных)* x*,* $s(k)$ *– коэффициент прохождения одномерной задачи рассеяния с потенциалом* v*. Наконец,* $C_i(E+i\varepsilon)$ *– интегральные операторы, существование которых определяется данной теоремой и которые будут описаны ниже формулой (3.18). Здесь* C_A*,* C_B *– некоторые константы. При этом все произведения имеют *-слабый предел.*

Остановимся кратко на идеях доказательства. Основная идея та же, что и в доказательстве аналогичной теоремы в [3], где были получены предельные значения резольвенты в случае, когда потенциал не допускает связанных состояний. Представим полную резольвенту в виде

$$R(\lambda) = R_0(\lambda)(I + \sum v_i R_0(\lambda))^{-1}\,. \tag{3.4}$$

и воспользуемся альтернирующим методом Шварца. Положим

$$\Gamma_j(\lambda) = v_j R_j(\lambda)\,, \tag{3.5}$$

$$I - \Gamma = (I + \sum v_i R_0(\lambda))^{-1}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим операторную матрицу

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} I & \Gamma_1 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & I & \Gamma_2 \\ \Gamma_3 & \Gamma_3 & I \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Обозначая через $\mathrm{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ соответствующую диагональную матрицу, в условиях биективности (3.7) определим $\boldsymbol{\gamma}$ как решение уравнения

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathrm{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \tag{3.8}$$

и введём линейные операторы γ_{ij} как компоненты матрицы $\boldsymbol{\gamma}$. Последние могут быть также охарактеризованы соотношениями

$$\gamma_{ij} = \Gamma_i\big(\delta_{ij} I - \sum_{k \neq i} \gamma_{kj}\big) = \big(\delta_{ij} I - \sum_{k \neq j} \gamma_{ik}\big)\Gamma_j\,. \tag{3.9}$$

Тогда оператор отражения $\Gamma = \sum v_i R(\lambda)$ даётся в терминах γ_{ij} формулой

$$\Gamma = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \gamma_{ij}\,. \tag{3.10}$$

Перейдем к изучению оператора $\boldsymbol{L}$. Положим

$$\Gamma_j^{ac} = v_j R_j^{ac}(\lambda)\,, \tag{3.11}$$

$$\Gamma_j^{d} = v_j R_j^{d}(\lambda)\,, \tag{3.12}$$

$$\mathbf{\Gamma^{ac}} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1^{ac} & \Gamma_1^{ac} \\ \Gamma_2^{ac} & 0 & \Gamma_2^{ac} \\ \Gamma_3^{ac} & \Gamma_3^{ac} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{\Gamma^{d}} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1^{d} & \Gamma_1^{d} \\ \Gamma_2^{d} & 0 & \Gamma_2^{d} \\ \Gamma_3^{d} & \Gamma_3^{d} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

В работе [3] была доказана обратимость оператора $(\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma^{ac}})$ путем выделения всех сингулярных членов. А именно, было доказано, что

$$(\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma^{ac}})^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma^{ac}} + (\mathbf{\Gamma^{ac}})^2) + \mathbf{A} + \mathbf{B}, \tag{3.15}$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ операторные матрицы, компоненты которых такого же типа, что и A, B в условиях теоремы. Строки этих матриц действуют в пространство функций с носителем в полосе, отвечающей номеру строки.

Справедлива следующая

Лемма 3.2. *Существует обратный матричный оператор*

$$(\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma^d})^{-1} = (\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\mathbf{d}}).$$

и $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\mathbf{d}}$ допускает оценки того же типа, что и $\mathbf{\Gamma^d}$ вплоть до предельных значений спектрального параметра.

Тогда

$$\mathbf{L}^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma^{ac}} + \mathbf{\Gamma^d})^{-1} = (\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\mathbf{ac}})(\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\mathbf{d}}\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\mathbf{ac}})^{-1}(\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\mathbf{d}}), \qquad (3.16)$$

где

$$(\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma^{ac}})^{-1} = (\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\mathbf{ac}}),$$

и оператор $(\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\mathbf{d}}\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\mathbf{ac}})$ вновь допускает обращение и оценки такого же типа, что и в лемме.

В результате обращения $\mathbf{L}$, согласно (3.8), мы должны умножить его слева на диагональную операторную матрицу $\mathrm{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$, которая вновь представляется в виде суммы:

$$\mathrm{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = \mathrm{diag}(\Gamma_1^{ac}, \Gamma_2^{ac}, \Gamma_3^{ac}) + \mathrm{diag}(\Gamma_1^d, \Gamma_2^d, \Gamma_3^d).$$

Суммируя все компоненты полученных матриц, мы получим финальный ответ в виде

$$(I + \sum v_i R_0)^{-1} = \sum_{ij} \big(\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathrm{diag}(\Gamma_1^{ac}, \Gamma_2^{ac}, \Gamma_3^{ac})\big)_{ij} + \sum_{ij} \big(\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathrm{diag}(\Gamma_1^d, \Gamma_2^d, \Gamma_3^d)\big)_{ij}\,.$$

В первом слагаемом сингулярные члены (с точки зрения асимптотики) содержатся в произведении типа

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma^{ac}} + (\mathbf{\Gamma^{ac}})^2)\mathrm{diag}(\Gamma_1^{ac}, \Gamma_2^{ac}, \Gamma_3^{ac}),$$

в то время как остальные вклады являются гладкими и поправочными. Но именно второе слагаемое и отличает задачу этого типа от задачи в [3], и обусловливает появление членов, содержащих интегральные операторы C_i в конечном выражении для предельных значений ядра резольвенты (3.1). Отметим, что вклады в это второе слагаемое дают все операторы. Построение этих вкладов опирается на разрешимость нескольких интегральных уравнений:

$$\widetilde{C}_j(z,z') = \sum_i \left(\mathbf{L}^{-1}(z,z')\cdot \operatorname{diag}(v_1(x_1'),v_2(x_2'),v_3(x_3'))\right)_{ij}. \tag{3.17}$$

Отличие $\widetilde{C}_j$ от C_j в формуле (3.1) заключается в выделении первых двух итераций $\mathbf{\Gamma}$ для приведения к симметричному виду:

$$C_j(z,z')=\sum_i \Big[(\mathbf{L}^{-1}(z,z')-\mathbf{I}+\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Gamma}^2)\operatorname{diag}(v_1(x_1'),v_2(x_2'),v_3(x_3'))\Big]_{ij}. \tag{3.18}$$

О существовании предельных значений ядра резольвенты см. также [3].

§4. Асимптотика собственных функций

Ядро резольвенты при $Im\lambda \neq 0$ допускает факторизацию

$$R(z,z'|E\pm i\varepsilon) = \psi^{\mp}(z,\sqrt{E}\widehat{z}')\frac{e^{\pm i\sqrt{E}|z'|}}{\sqrt{|z'|}} + o(|z'|^{-1/2}), \qquad |z'|\to\infty,\ \ \widehat{z}'\neq \pm\mathbf{l}_j \tag{4.1}$$

При $\varepsilon \to +0$ факторизация переходит в прямую сумму

$$R(z,z'|E+i0) = \psi(z,\sqrt{E}\widehat{z}')\frac{e^{i\sqrt{E}|z'|}}{\sqrt{|z'|}} + r(z,z')$$

где каждый из сомножителей является элементом $\mathcal{B}^*$. Мы утверждаем, что $\psi^{\pm}$ совпадают с обобщенными собственными функциями непрерывного спектра.

Для описания собственных функций ψ с краевым условием типа связанного состояния в паре i, выделим из ядра резольвенты асимптотику по переменной z', записанную в координатах Якоби, связанных с первой полосой (для определенности)

$$R(z,z'|E+i0) \underset{\substack{z'\to\infty,\\ \widehat{z}'=\pm\mathbf{l}_1}}{\approx} \psi_1^{\mp}(z,\widehat{z}'|E)\psi_0(x_1')e^{i\sqrt{E-\lambda_0}|y_1'|}. \tag{4.2}$$

Оправдание этого результата следует из интегрального уравнения с неоднородностью R_1:

$$R = R_1 - R_1(v_2+v_3)R. \tag{4.3}$$

Подействовав на (4.3) оператором $-\Delta+v_1-\lambda$ с учетом асимптотики (4.2), мы получим эквивалентное интегральное уравнение.

Вернемся к исходному интегральному уравнению

$$R = R_0 - R_0 V R.$$

Учитывая, что

$$R_0 = R_1(I + v_1 R_0),$$

получим

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_1 v_1 R_0 - R_1(v_1 + v_2 + v_3)R - R_1 v_1 R_0 V R \\ &= R_1 - R_1(v_2 + v_3)R + R_1 v_1 (R_0 - R - R_0 V R). \end{aligned}$$

Приходя к интегральному уравнению (4.3) (последняя скобка равна нулю), мы устанавливаем его эквивалентность исходному интегральному уравнению. Подставляя теперь в уравнение (3.1) выражение $R_0 = R_1(I + v_1 R_0)$, мы снова получим решение исходного интегрального уравнения в виде:

$$\begin{aligned} &R = R_1(I + v_1 R_0) \\ &\times \left(I - \sum_i v_i R_i + \sum_{i\neq j} v_i R_i v_j R_j \sum_{i\neq j\neq k} v_i R_i v_j R_j v_k R_k + \sum_{i=1}^{3} C_i R_i^d + A + B \right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Отметим, что это представление позволит выделить собственные функции, отвечающие процессам с начальным связанным состоянием, с помощью асимптотики (4.2).

Проделаем еще одно преобразование: выделим в последней скобке в уравнении (4.4) те члены, в которых первым множителем (слева) является $v_1 R_1$. Это действие связано прежде всего с удобством выделения асимптотики: в оставшихся интегральных членах интегрирование производится по попарно разным полосам, что существенно упрощает ситуацию. Пусть

$$L_1 = \left(-v_1 R_1 + \sum_{j\neq 1} v_1 R_1 v_j R_j - \sum_{k\neq 1} v_1 R_1 v_j R_j v_k R_k \right),$$

$$L_2 = \left(I - \sum_{i\neq 1} v_i R_i + \sum_{i\neq j,\ i\neq 1} v_i R_i v_j R_j - \sum_{1\neq i\neq j\neq k} v_i R_i v_j R_j v_k R_k \right).$$

Тогда

$$R = R_1(I + v_1R_0)((L_1 + L_2) + \sum_{i=1}^{3} C_iR_i^d + A + B). \qquad (4.5)$$

Заметим, что

$$(I + v_1R_0)v_1R_1 = v_1(R_1 + R_0v_1R_1) = v_1R_0.$$

С учетом этого замечания, в (4.4) можно сократить часть членов:

$$\begin{aligned}(I + v_1R_0)L_1 &= v_1R_0(-I + \sum_{j\neq 1} v_jR_j - \sum_{j\neq 1,\, j\neq k} v_jR_jv_kR_k)\\ &= -v_1R_0L_2 + v_1R_0 \sum_{1\neq i\neq j\neq k} v_iR_iv_jR_jv_kR_k.\end{aligned}$$

Эти сокращения вновь приводят представление для ядра резольвенты к набору интегральных членов. При этом все внутренние интегрирования в каждом из слагаемых ведутся по попарно различым полосам:

$$\begin{aligned}R = R_1\Big(L_2 + v_1R_0L_2 - v_1R_0L_2 + v_1R_0 \sum_{1\neq i\neq j\neq k} v_iR_iv_jR_jv_kR_k\Big)\\ + R_1(I + v_1R_0)\Big(\sum_{i=1}^{3} C_iR_i^d + A + B\Big). \qquad (4.6)\end{aligned}$$

И окончательно

$$\begin{aligned}R = R_1\left(I - \sum_{i\neq 1} v_iR_i + \sum_{i\neq j,\ i\neq 1} v_iR_iv_jR_j - \sum_{1\neq i\neq j\neq k} v_iR_iv_jR_jv_kR_k\right)\\ + R_1(I + v_1R_0)\Big(\sum_{i=1}^{3} C_iR_i^d + A + B\Big) \qquad (4.7)\end{aligned}$$

Из асимптотики ядра резольвенты следует следующая

Теорема 4.1. *Пусть* $\widehat{z} \neq \pm\mathbf{l}_j$, $E > \delta > 0$. *При* $|z|, |z'| \to \infty$ *справедлива асимптотика для предельного значения ядра резольвенты оператора Шредингера*

$$R(z, z'|E + i0) = \frac{e^{i\sqrt{E}|z|}}{\sqrt{|z|}} \Bigg[\psi^{pw}(z', \sqrt{E}\widehat{z}) + \psi^{sc}(z', \sqrt{E}\widehat{z}) \\ + g(\widehat{z}'|\widehat{z}\sqrt{E}) \frac{e^{i\sqrt{E}|z'|}}{\sqrt{2\pi\sqrt{E}|z'|}} \Bigg] \Big(1 + O(|z|^{-1/2}) + O(|z'|^{-1/2})\Big), \tag{4.8}$$

Пусть $\widehat{z} = \pm\mathbf{l}_j$, $E > \delta > 0$. *При* $|z|, |z'| \to \infty$ *справедлива асимптотика для предельного значения ядра резольвенты оператора Шредингера*

$$R(z, z'|E + i0) = \psi_0(x_j) e^{i\sqrt{E-\lambda_0}|y_j|} \Bigg[\widetilde{\psi}^{sc}(z', \sqrt{E}\widehat{z}) \\ + g(\widehat{z}'|\widehat{z}\sqrt{E}) \frac{e^{i\sqrt{E}|z'|}}{\sqrt{2\pi\sqrt{E}|z'|}} \Bigg] \Big(1 + O(|z|^{-1/2}) + O(|z'|^{-1/2})\Big), \tag{4.9}$$

где g – *гладкая функция,* $\psi^{pw}(z, q)$ – *сумма плоских волн, полученных в результате процедуры переотражений луча с волновым вектором* $(-\widehat{z})$ *в системе экранов, порожденных носителями потенциалов. Потенциалы отвечают коэффициентам отражения и прохождения, соответствующим одномерной задаче рассеяния пары частиц с указанным потенциалом* (*подробнее об этом в* [4]).

Здесь

$$\psi^{sc}(z', \sqrt{E}\widehat{z}) \underset{z' \to \infty}{\sim} \sum_{i=1,2,3,\ \pm} d_i^{\pm}(\widehat{z}\sqrt{E}) \psi_0(x_i') e^{i\sqrt{\lambda-\lambda_0}|y_i'|} \theta(\pm y_i'),$$

$$\widetilde{\psi}^{sc}(z', \sqrt{E}\widehat{z}) \underset{z' \to \infty}{\sim} \sum_{i=1,2,3,\ \pm} \widetilde{d}_i^{\pm}(\widehat{z}\sqrt{E}) \psi_i(x_i') e^{i\sqrt{\lambda-\lambda_0}|y_i'|} \theta(\pm y_i'),$$

– *волны, "бегущие" вдоль экранов, где коэффициенты* $d_i^{\pm}, \widetilde{d}_i^{\pm}$ *определяются как интеграл*

$$d_i^{\pm}(\omega\sqrt{E}) = \iint e^{-i\sqrt{E}\langle\omega, z\rangle} D_i(z, z_i') \psi_0(x_i') e^{i\pm\sqrt{\lambda-\lambda_0}|y_i'|} dz dz_i',$$

$$\widetilde{d}_i^{\pm}(\omega\sqrt{E}) = \iiint \psi_0(x_j') e^{-i\sqrt{\lambda-\lambda_0}\langle\omega, z_j'\rangle} \widetilde{D}_i(z_j', z_i') \psi_0(x_i') e^{\mp i\sqrt{\lambda-\lambda_0}|y_i'|} dz_j' dz_i'.$$

В свою очередь $D_i(z,z'), \widetilde{D}_i(z,z')$ *– ядра операторов*

$$D_i = -v_i + \sum_{m\neq i} v_m R_m v_i - \sum_{m\neq k\neq i} v_m R_m v_k R_k v_i + C_i;$$

$$\widetilde{D}_i = I - v_i(1-\delta_{ij}) + \sum_{\substack{m\neq j,\\ m\neq i}} v_m R_m v_i - \sum_{\substack{m\neq k,\\ m\neq j,\\ k\neq i}} v_m R_m v_k R_k v_i + R_j(I + v_j R_0)C_i.$$

Откуда в свою очередь получаем

Следствие 4.2. *При* $E > 0$ *справедливо асимптотическое представление для собственных функций непрерывного спектра при* $\omega \neq \pm\mathbf{l}_j$:

$$\psi(z',E,\omega) = \left[\psi^{pw}(z',\sqrt{E}\omega) + \psi^{sc}(z',\sqrt{E}\omega) + g(\widehat{z}|\omega\sqrt{E})\frac{e^{i\sqrt{E}|z'|}}{\sqrt{2\pi\sqrt{E}|z'|}}\right] \times \left(1 + O(|z'|^{-1/2})\right), \tag{4.10}$$

при $\omega = \pm\mathbf{l}_j$*:*

$$\psi(z',E,\omega) = \left[\widetilde{\psi}^{sc}(z',\sqrt{E}\omega) + g(\widehat{z}|\omega\sqrt{E})\frac{e^{i\sqrt{E}|z'|}}{\sqrt{2\pi\sqrt{E}|z'|}}\right]\left(1 + O(|z'|^{-1/2})\right). \tag{4.11}$$

Список литературы

1. E. Mourre, Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators. — Commun. Math.Phys. **78** (1981), 391–408.
2. Л. Д. Фаддеев, *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц*, Тр. МИАН СССР **69** (1963), 3–122.
3. И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин, *Задача рассеяния нескольких одномерных квантовых частиц. Структура и асимптотика предельных значений ядра резольвенты.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **461** (2017), 14–51.
4. И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин, *Асимптотика собственных функций абсолютно непрерывного спектра задачи рассеяния трех одномерных квантовых частиц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **471** (2018), 15–37
5. A. M. Budylin, V. S. Buslaev, Reflection operator and their applications to asymptotic investigations of semiclassical integral equations. — Adv. Soviet Math., **7** (1991), 107–157.

Baibulov I. V., Budylin A. M., Levin S. B. The scattering problem of three one-dimensional short-range quantum particles involving bound states in pair subsystems. The coordinate asymptotics of the resolvent kernel and absolutely continuous spectrum eigenfunctions.

In the work the scattering problem of three one-dimensional quantum particles of equal masses interacting by pair finite potentials is considered. The potentials structure allows bound states in the corresponding pair subsystems. The limit values of the Schroedinger operator resolvent kernel are studied, when the spectral parameter sits onto the absolutely continuous spectrum – the positive semi-axis. As a result, the coordinate asymptotics of the absolutely continuous spectrum eigenfunctions are constructed.

С.-Петербургский
государственный университет
С.-Петербург, Россия
E-mail: molezz@bk.ru
E-mail: a.budylin@spbu.ru
E-mail: s.levin@spbu.ru

Поступило 1 ноября 2019 г.