Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

В. Н. Чугунов

О НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВАХ ПАР σ-КОММУТИРУЮЩИХ ($\sigma \neq 0, \pm 1$) ТЕПЛИЦЕВОЙ И ГАНКЕЛЕВОЙ МАТРИЦ

§1. Постановка задачи

Теплицевой называется комплексная $n\times n$-матрица T, имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

а *ганкелевой* называется комплексная $n \times n$-матрица H вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Переставив столбцы теплицевой матрицы в обратном порядке, получим ганкелеву матрицу. Напротив, всякая ганкелева матрица H может быть получена указанным способом из соответствующей теплицевой матрицы T. Эту связь между H и T можно описать матричным соотношением

$$H = T\mathcal{P}_n,$$

где $\mathcal{P}_n$ есть так называемая перъединичная матрица:

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Ключевые слова: теплицева матрица, циркулянт, косой циркулянт.

Теплицева матрица (1) называется *циркулянтом*, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и *косым циркулянтом* при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Задача о σ-коммутировании теплицевой и ганкелевой матриц заключается в описании пар матриц (T, H) таких, что T теплицева, H ганкелева и выполняется соотношение

$$TH = \sigma HT. \tag{3}$$

В предлагаемой работе на параметр σ накладываются ограничения $\sigma \neq 0, \pm 1$; указываются некоторые множества требуемых пар матриц. В §2 формулируется теорема, являющаяся главным результатом статьи; в ней перечисляются частные классы пар (T, H). Доказательство теоремы проводится в §3 путем нахождения решений в некоторых известных множествах.

Сначала напомним некоторые определения и факты.

Согласно [1], если C – циркулянт, то для него справедливо спектральное разложение

$$C = F_n^* D F_n, \tag{4}$$

где $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ – диагональная матрица, F_n – (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \ldots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \ldots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \ldots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

и $\epsilon = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ – первообразный корень n-ой степени из единицы.

Если S – косой циркулянт, то вместо (4) имеем

$$S = G_{-1} F_n^* D F_n G_{-1}^*,$$

где

$$G_{-1} = \mathrm{diag}(1, \psi, \psi^2, \ldots, \psi^{n-1}),$$

$\psi = e^{\frac{i\pi}{n}}$ есть корень n-ой степени из (-1).

Через $0_{k,m}$ обозначается нулевая $(k \times m)$-матрица.

§2. Главный результат

Теорема. *Ненулевые теплицева матрица T и ганкелева матрица H σ-коммутируют ($\sigma \neq 0, \pm 1$), если T и H входят хотя бы в один из описываемых ниже классов*:

Класс 1. *Матрица T является циркулянтом*

$$T = {F_n}^* D_1 F_n,$$

а H – ганкелевым циркулянтом

$$H = {F_n}^* D_2 F_n \mathcal{P}_n.$$

Здесь $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ *и* $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – *диагональные матрицы; при этом*

$$d_1^{(2)} d_1^{(1)} = 0,$$

$$d_j^{(2)}\left(d_j^{(1)} - \sigma d_{n+2-j}^{(1)}\right) = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Класс 2. *Матрица T является косым циркулянтом*

$$T = G_{-1} {F_n}^* D_1 F_n G_{-1}^*,$$

а H – ганкелевым косым циркулянтом

$$H = G_{-1} {F_n}^* D_2 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n.$$

Диагональные матрицы $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ *и* $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ *должны удовлетворять соотношениям*

$$\begin{aligned} &d_1^{(2)}\left(d_1^{(1)} - \sigma d_2^{(1)}\right) = 0, \qquad d_2^{(2)}\left(d_2^{(1)} - \sigma d_1^{(1)}\right) = 0, \\ &d_j^{(2)}\left(d_j^{(1)} - \sigma d_{n+3-j}^{(1)}\right) = 0, \qquad j = 3, 4, \ldots, n. \end{aligned}$$

Класс 3. *Пусть $n = 2r$, матрицы T и H имеют вид*

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \sigma \mathcal{P}_r \end{pmatrix}.$$

Класс 4. *Пусть $n = 2r$, матрицы T и H имеют вид*

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \sigma \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \mathcal{P}_r \end{pmatrix}.$$

§3. Обоснование главного результата

От пары (T, H) перейдем к паре (T_1, T_2), где $T_1 = T$, а T_2 – теплицева матрица, соответствующая ганкелевой матрице H, т.е. $H = T_2\mathcal{P}_n$. Нижний индекс этих теплицевых матриц показывает, какой из матриц исходной пары они соответствуют.

Основное соотношение σ-коммутирования приобретает вид

$$T_1T_2\mathcal{P}_n - \sigma T_2\mathcal{P}_nT_1 = 0.$$

После умножения справа на $\mathcal{P}_n$ получаем

$$T_1T_2 - \sigma T_2\mathcal{P}_nT_1\mathcal{P}_n = 0.$$

Матрица T_1, будучи персимметричной, удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{P}_nT_1\mathcal{P}_n = T_1^\top.$$

Используя его, находим

$$T_1T_2 - \sigma T_2T_1^\top = 0. \tag{5}$$

Полное описание решений уравнения (5) даст нам все требуемые пары σ-коммутирующих теплицевой и ганкелевой матриц.

В качестве доказательства данной теоремы найдем решение рассматриваемой задачи в трех специальных случаях.

3.1. T_1 и T_2 – циркулянты. Пусть сначала матрицы T_1 и T_2 являются циркулянтами

$$T_1 = F_n^*D_1F_n, \tag{6}$$

$$T_2 = F_n^*D_2F_n, \tag{7}$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы.

Согласно [2],

$$T_1^\top = F_n^*\widehat{D}_1F_n, \tag{8}$$

где $\widehat{D}_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_n^{(1)}, d_{n-1}^{(1)}, \ldots, d_2^{(1)}\right)$. Подстановка выражений (6), (7) и (8) для матриц T_1, T_2 и $T_1^\top$ в уравнение (5) приводит к соотношению

$$F_n^*D_1F_nF_n^*D_2F_n - \sigma F_n^*D_2F_nF_n^*\widehat{D}_1F_n = 0,$$

которое эквивалентно равенству

$$D_2\left(D_1 - \sigma\widehat{D}_1\right) = 0.$$

Заметим, что для первой компоненты имеем условие $d_1^{(2)}\left(d_1^{(1)} - \sigma d_1^{(1)}\right) = 0$, которое эквивалентно соотношению $d_1^{(2)} d_1^{(1)} = 0$, так как $\sigma \neq 1$.

Мы получили условие на спектры циркулянтов, один из которых является теплицевой компонентой решения, а другой соответствует ганкелевой компоненте. Всякая пара циркулянтов, удовлетворяющая этому условию, порождает пару (T, H) из класса 1.

3.2. T_1 **и** T_2 **– косые циркулянты.** Предположим теперь, что T_1 и T_2 – косые циркулянты

$$T_1 = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*, \tag{9}$$

$$T_2 = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^*, \tag{10}$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы.

Известно, что

$$T_1^\top = G_{-1} F_n^* \widetilde{D}_1 F_n G_{-1}^*, \tag{11}$$

где $\widetilde{D}_1 = \operatorname{diag}\left(d_2^{(1)}, d_1^{(1)}, d_n^{(1)}, d_{n-1}^{(1)}, \ldots, d_3^{(1)}\right)$ (см. [2]).

Подстановка выражений (9), (10) и (11) для матриц T_1, T_2 и $T_1^\top$ в уравнение (5) приводит к соотношению

$$G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* - \sigma G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* \widetilde{D}_1 F_n G_{-1}^* = 0,$$

или, после упрощения,

$$D_2 \left(D_1 - \sigma \widetilde{D}_1\right) = 0.$$

Это равенство есть условие на спектры косых циркулянтов, один из которых является теплицевой компонентой решения, а другой соответствует ганкелевой компоненте. Всякая пара косых циркулянтов, удовлетворяющая этому условию, порождает пару (T, H) из класса 2.

3.3. n **– четное число,** T_1 **и** T_2 **–** 2×2**-блочно-антидиагональные матрицы со скалярными внедиагональными блоками.** Пусть $n = 2r$ и матрицы T_1 и T_2 имеют вид

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & t_r^{(1)} I_r \\ t_{-r}^{(1)} I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & t_r^{(2)} I_r \\ t_{-r}^{(2)} I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Условия, что матрицы T_1 и T_2 ненулевые, приводят к соотношениям

$$|t_r^{(1)}| + |t_{-r}^{(1)}| \neq 0, \tag{14}$$

$$|t_r^{(2)}| + |t_{-r}^{(2)}| \neq 0. \tag{15}$$

Подставляя выражения (12) и (13) для матриц T_1, T_2 и $T_1^\top$ в уравнение (5), приходим к матричному соотношению

$$\begin{pmatrix} t_r^{(1)} t_{-r}^{(2)} I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & t_{-r}^{(1)} t_r^{(2)} I_r \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} t_r^{(2)} t_r^{(1)} I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & t_{-r}^{(2)} t_{-r}^{(1)} I_r \end{pmatrix} = 0,$$

из которого получаем условия

$$\begin{cases} t_r^{(1)} \left(t_{-r}^{(2)} - \sigma t_r^{(2)} \right) = 0, \\ t_{-r}^{(1)} \left(t_r^{(2)} - \sigma t_{-r}^{(2)} \right) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

В силу условия (14), числа $t_r^{(1)}$ и $t_{-r}^{(1)}$ не могут одновременно обращаться в нуль. Поэтому возможны три случая: а) $t_r^{(1)} \neq 0$, $t_{-r}^{(1)} \neq 0$; б) $t_r^{(1)} \neq 0$, $t_{-r}^{(1)} = 0$; в) $t_r^{(1)} = 0$, $t_{-r}^{(1)} \neq 0$.

а) Если $t_r^{(1)} \neq 0$ и $t_{-r}^{(1)} \neq 0$, то (16) преобразуется к виду

$$t_{-r}^{(2)} = \sigma t_r^{(2)}, \quad t_r^{(2)} = \sigma t_{-r}^{(2)}, \tag{17}$$

из которого получаем

$$t_{-r}^{(2)} = \sigma t_r^{(2)} = \sigma^2 t_{-r}^{(2)},$$

или

$$\left(1 - \sigma^2\right) t_{-r}^{(2)} = 0.$$

Так как $\sigma \neq \pm 1$, то $t_{-r}^{(2)} = 0$ и, в силу (17), $t_r^{(2)} = 0$, что противоречит условию (15). Данный случай не дает решения.

б) Условия $t_r^{(1)} \neq 0$, $t_{-r}^{(1)} = 0$ приводят к соотношению

$$t_{-r}^{(2)} - \sigma t_r^{(2)} = 0.$$

Подходящие матрицы T и H можно записать в виде

$$T = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & t_r^{(1)} I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & t_r^{(2)} I_r \\ \sigma t_r^{(2)} I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} \mathcal{P}_n = \beta \begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \sigma \mathcal{P}_r \end{pmatrix}$$

с $\alpha = t_r^{(1)}$ и $\beta = t_r^{(2)}$. Получаем класс 3.

в) Из ограничений $t_r^{(1)} = 0$, $t_{-r}^{(1)} \neq 0$ выводим

$$t_r^{(2)} - \sigma t_{-r}^{(2)} = 0,$$

что позволяет искать подходящие матрицы T и H в виде

$$T = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ t_{-r}^{(1)} I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \sigma t_{-r}^{(2)} I_r \\ t_{-r}^{(2)} & 0_{r,r} \end{pmatrix} \mathcal{P}_n = \beta \begin{pmatrix} \sigma \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \mathcal{P}_r \end{pmatrix}$$

с $\alpha = t_{-r}^{(1)}$ и $\beta = t_{-r}^{(2)}$. Получаем класс 4. Теорема доказана.

Список литературы

1. В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами.* М., Наука, 1987.
2. В. Н. Чугунов, *Нормальные и перестановочные теплицевы и ганкелевы матрицы.* М. Наука, 2017.

Chugunov V. N. On some sets of σ-commuting ($\sigma \neq 0, \pm 1$) Toeplitz and Hankel matrices.

A description of certain sets of pairs of σ-commuting ($\sigma \neq 0, \pm 1$) Toeplitz and Hankel matrices is given.

Институт вычислительной математики РАН
ул. Губкина 8, 119333 Москва, Россия
E-mail: chugunov.vadim@gmail.com

Поступило 9 сентября 2019 г.