Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

В. Б. Хазанов

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО БАЗИСА ПРАВОГО НУЛЬ-ПРОСТРАНСТВА СИНГУЛЯРНОЙ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

§1. Результантный подход к представлению полиномиальной матрицы

Пусть дана q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\boldsymbol{k}} F_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} \equiv \sum_{\boldsymbol{k}} F_{k_1 \dots k_q} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_q^{k_q},$$

где $F_{\boldsymbol{k}}$ – постоянные матричные коэффициенты его мономов. Степень каждого монома $F_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}$ определяется порядком $|\boldsymbol{k}| \equiv \sum\limits_{i=1}^{q} k_i$ его мультииндекса[1] $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_q)$, а степень матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ определяется как наивысшая из степеней ее мономов: $s = \deg F := \max\limits_{F_{\boldsymbol{k}} \neq 0} |\boldsymbol{k}|$. Запишем матрицу $F(\boldsymbol{\lambda})$ в порядке возрастания степеней его $\binom{q+s}{s}$ мономов, располагая мономы[2] одной степени в лексикографическом порядке. Тогда моном степени t (число таких мономов равно $\binom{q+t-1}{t}$), содержащий $\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_t}$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots i_t \leqslant q$, предшествует моному той же степени, содержащему $\lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_t}$, $1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \cdots j_t \leqslant q$, при условии, что или $i_1 < j_1$, или при $i_l = j_l$, $l = 1, \dots, k-1$, $i_k < j_k$, где

Ключевые слова: сингулярная многопараметрическая полиномиальная матрица, нуль-пространство, полиномиальное решение, результантный подход.

[1]В выражении $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}$ мультииндекс $\mathbf{k}$ будем называть далее показателем мультипараметра $\boldsymbol{\lambda}$.

[2]Учитываются все мономы, включая старшие, даже с нулевыми матричными коэффициентами.

$2 \leqslant k \leqslant t$:

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{\lambda}) = F_{00\dots0} &+ (F_{10\dots0}\lambda_1 + F_{01\dots0}\lambda_2 + \dots + F_{0\dots01}\lambda_q)\\ &+ (F_{20\dots0}\lambda_1^2 + F_{11\dots0}\lambda_1\lambda_2 + \dots + F_{00\dots2}\lambda_q^2) + \dots\\ &+ (F_{s00\dots0}\lambda_1^s + F_{s-1,10\dots0}\lambda_1^{s-1}\lambda_1 + F_{s-1,01\dots0}\lambda_1^{s-1}\lambda_3 + \dots\\ &+ F_{s-1,00\dots1}\lambda_1^{s-1}\lambda_q + \dots + F_{000\dots0s}\lambda_q^s).\end{aligned}$$

Для $F(\boldsymbol{\lambda})$ определим результантный вектор[3] (результантную матрицу нулевого уровня)

$$\begin{aligned}&F^{R\,0}_{m\times n;q;s} \equiv F^R_{m\times n;q;s} = \mathrm{col}\{F_k\}^s_{|\mathbf{k}|=0} \equiv [F_{00\dots0}\ F_{10\dots0}\ F_{01\dots0}\\ &\dots\ F_{0\dots01}\ F_{20\dots0}\ F_{11\dots0}\dots F_{00\dots2}\dots\ \dots F_{s0\dots0}\ F_{s-1,1\dots0}\dots F_{0\dots0s}]^B\end{aligned} \tag{1}$$

размеров $m\binom{s+q}{q}\times n$ и полиномиальную $m\times m\binom{s+q}{q}$ матрицу

$$\begin{aligned}W^s_{m;q}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{row}\{\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} I_m\}^s_{|\boldsymbol{k}|=0} \equiv [I_m\ \lambda_1 I_m\ \lambda_2 I_m \dots \lambda_q I_m\ \lambda_1^2 I_m\\ \lambda_1\lambda_2 I_m \dots \lambda_q^2 I_m \dots\dots \lambda_1^s I_m\ \lambda_1^{s-1}\lambda_2 I_m \dots \lambda_q^s I_m].\end{aligned} \tag{2}$$

Мультииндекс $\boldsymbol{k}$ матриц $F_{\boldsymbol{k}}$ и $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} I_m$ определяет их позицию в блочных столбце (1) и строке (2):

$$\boldsymbol{k} = (k_1,\dots,k_q) \Rightarrow 1 + \sum_{j=1}^{q}\binom{\sum_{i=1}^{j} k_{q-i+1} + j - 1}{j}. \tag{3}$$

Теперь полиномиальная матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ может быть представлена в виде

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = W^s_{m;q}(\boldsymbol{\lambda}) F^R_{m\times n;q;s}.$$

Пусть $\boldsymbol{l} = (l_1,\dots,l_q)$ – мультииндекс порядка $t = |\boldsymbol{l}| = \sum_{j=1}^{q} l_j$. Тогда матрице $F^{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{l}} f(\lambda)$ степени $s+t$ отвечает результантный вектор $F^{\boldsymbol{l}R}_{m\times n;q;s+t}$ размеров $m\binom{s+t+q}{q}\times n$. В соответствии с (3) каждый блок $F_{\boldsymbol{k}}$ результантного вектора $F^R_{m\times n;q;s}$ перемещается в позицию[4],

[3] В приведенном выражении символ ^{B} означает блочное транспонирование

[4] В дальнейшем ссылка на мультииндекс блочной компоненты будет использоваться как ссылка на ее позицию

отвечающую мультииндексу $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}$:

$$\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}=(k_1+l_1,\dots,k_q+l_q)\Rightarrow 1+\sum_{j=1}^{q}\binom{\sum_{i=1}^{j}(k_{q-i+1}+l_{q-i+1})+j-1}{j} \quad (4)$$

В остальных позициях результантного вектора $F^{\boldsymbol{l}\,R}_{m\times n;q;s+t}$ находятся нулевые матрицы.

Определим результантную матрицу $F^{R\,t}_{m\times n;q;s}$ уровня $t>0$, полагая

$$F^{R\,t}_{m\times n;q;s}=\begin{bmatrix} F^{R\,t-1}_{m\times n;q;s} & \\ & \mathrm{row}\{F^{\boldsymbol{l}\,R}_{m\times n;q;s+t}\}_{|\boldsymbol{l}|=t} \\ O & \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где O – нулевая матрица размеров $m\binom{s+t+q-1}{q-1}\times n\binom{t-1+q}{q}$. Матрица $F^{R\,t}_{m\times n;q;s}$ имеет размеры $m\binom{s+t+q}{q}\times n\binom{t+q}{q}$ и удовлетворяет соотношению

$$W^{s+t}_{m;q}(\boldsymbol{\lambda})F^{R\,t}_{m\times n;q;s}=F(\boldsymbol{\lambda})W^{t}_{n;q}(\boldsymbol{\lambda}). \quad (6)$$

Из (6) следует, что результантный вектор матрицы $H(\boldsymbol{\lambda})=F(\boldsymbol{\lambda})G(\boldsymbol{\lambda})$, где $G(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномиальная $n\times p$ матрица степени t, удовлетворяет соотношению[5]

$$H^{R}_{m\times p;q;s+t}=F^{R\,t}_{m\times n;q;s}G^{R}_{n\times p;q;t}. \quad (7)$$

Результантный столбец $G^{R}_{n\times p;q;t}$ полиномиальной матрицы $G(\boldsymbol{\lambda})$ имеет размеры $n\binom{t+q}{q}\times p$.

Представим полиномиальную $m\times n$ матрицу $F(\boldsymbol{\lambda})$ степени s в виде

$$F(\boldsymbol{\lambda})=\mathrm{col}\{f^{T}_{ri}(\boldsymbol{\lambda})\}_{i=1}^{m},\quad s=\max_i s_{ri},$$

где $f^{T}_{ri}(\boldsymbol{\lambda})$ – строки степени s_{ri}, $i=1,\dots,m$. Использование результантных матриц вида (5) для строк матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ позволяет определить отвечающую ей "строчную" результантную матрицу уровня t

$$F^{Rr\,t}_{m\times n;q;s}:=\mathrm{col}\{(f^{T}_{ri})^{R\,t}_{1\times n;q;s_{ri}}\}_{i=1}^{m},$$

которая имеет размеры $\sum_{i=1}^{m}\binom{s_{ri}+t+q}{q}\times n\binom{t+q}{q}$. Матрица $F^{R\,t}_{m\times n;q;s}$ отличается от матрицы $F^{Rr\,t}_{m\times n;q;s}$ лишь дополнительными нулевыми строками, а также порядком остальных строк. Строке $f^{T}_{ri}(\boldsymbol{\lambda})$ степени $s_{ri}<s$

[5]Это соотношение может быть использовано для реализации операции умножения многопараметрических скалярных и матричных полиномов.

матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ отвечает группа из $\binom{s+t+q}{q} - \binom{s_{ri}+t+q}{q}$ дополнительных нулевых строк матрицы $F^{R\,t}_{m\times n;q;s}$. Свойства "строчных" результантных матриц аналогичны свойствам результантных матриц (5). В частности, справедливо соотношение вида (7)

$$H^{Rr}_{m\times p;q;s+t} = F^{Rr\,t}_{m\times n;q;s} G^{R}_{n\times p;q;t}. \tag{8}$$

§2. Вычисление минимального базиса нуль-пространства полиномиальной матрицы

Пусть столбцы $n \times p$ матрицы $X(\boldsymbol{\lambda}) = \sum\limits_{|\boldsymbol{k}|=0}^{t} X_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}$ степени t принадлежат нуль-пространству $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ степени s, т.е. выполняется соотношение

$$F(\boldsymbol{\lambda}) X(\boldsymbol{\lambda}) = O. \tag{9}$$

Использование (7) и (8) ставит в соответствие уравнению (9) соотношения для результантных матриц соответствующих размеров:

$$F^{R\,t}_{m\times n;q;s} X^{R}_{n\times p;q;t} = 0, \qquad F^{Rr\,t}_{m\times n;s} X^{R}_{n\times p;t} = 0. \tag{10}$$

Поскольку матрицы $X^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} X(\boldsymbol{\lambda})$ степени $t + |\boldsymbol{k}|$ также удовлетворяют соотношениям вида (9)

$$F(\boldsymbol{\lambda}) X^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\lambda}) = 0, \qquad |\boldsymbol{k}| = 1, \ldots, l,$$

то результантные столбцы[6] $X^{\boldsymbol{k}\,R}_{n\times p;q;t+|\boldsymbol{k}|} = 0$ этих матриц удовлетворяют соотношениям вида (10)

$$F^{R\,t+|\boldsymbol{k}|}_{m\times n;s} X^{\boldsymbol{k}\,R}_{n\times p;t+|\boldsymbol{k}|} = 0, \qquad |\boldsymbol{k}| = 0, 1 \ldots, l.$$

Все эти соотношения могут быть записаны в виде:

$$F^{R\,t+l}_{m\times n;s} X^{R\,l}_{n\times p;q;t} = O.$$

Следовательно, если базисные полиномиальные решения вычисляются в порядке возрастания их степеней, то при определении полиномиальных решений степени $t > 0$ надо исключать из рассмотрения векторы, получаемые умножением на $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}$ (при соответствующих показателях $\boldsymbol{k}$) полиномиальных решений меньших степеней. Это можно

[6] Далее все рассуждения относятся к использованию результантных матриц вида (5). Очевидным образом они переносятся на случай "строчных" результантных матриц.

осуществить за счет последовательного вычисления базисных матриц[7] разностей линейных оболочек столбцов результантных столбцов полиномиальных матриц (векторов) вида $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} X(\boldsymbol{\lambda})$.

Кроме того, в многопараметрическом случае (в отличие от однопараметрического) из линейной независимости столбцов результантной матрицы, отвечающих полиномиальным векторам различных степеней, не следует их линейная независимость. Поэтому в случае получения нескольких полиномиальных решений, степень которых больше, чем у предыдущих, к матрице, образованной из всех найденных полиномиальных решений, необходимо применить описанный в [1] алгоритм вычисления базиса ее образа. Альтернативой является применение к матрице, формируемой из вычисленных полиномиальных решений, описываемого ниже модифицированного алгоритма. Предлагаемая здесь модификация касается исключения необходимости вычислять базисную матрицу разности указанных выше подпространств. В основе предлагаемой модификации лежат две идеи: отличный от представления (5) способ формирования результантной матрицы следующего уровня и использование метода (см. например, [4]) одновременного нахождения базисов образа и нуль-пространства постоянной матрицы. Идея этого метода состоит в следующем. Для исходной постоянной $m \times n$ матрицы A формируется блочная матрица $[A\ I_n]^B$ и выполняются эквивалентные преобразования столбцов вида

$$
\left(\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
b_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{\text{ортогонализация} \\ \text{столбцов матрицы } A}]{\substack{\text{метод исключения} \\ \text{для столбцов матрицы } A}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\widetilde{a}_{11} & \cdots & \widetilde{a}_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\
\widetilde{a}_{21} & \cdots & \widetilde{a}_{2r} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \operatorname{im} A & \cdots & \cdots & . & \cdots \\
\widetilde{a}_{m1} & \cdots & \widetilde{a}_{mr} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
b_{11} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\
b_{21} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ker A & \cdots \\
b_{n1} & \cdots & b_{nr} & b_{n,r+11} & \cdots & b_{nn}
\end{array}\right).
$$

[7] Подробное описание этого процесса и алгоритма в целом представлено в [1]

Столбцы расположенной вверху матрицы A рассматриваются как отображения неким линейным оператором базисных столбцов расположенной внизу единичной матрицы. При любом эквивалентном преобразовании столбцов такой блочной матрицы каждый столбец из верхней матрицы является отображением расположенного под ним столбца. После определения базиса образа матрицы A из линейно независимых столбцов верхней матрицы получены также линейно независимые столбцы нижней матрицы, которые отображаются в нулевые столбцы верхней матрицы, т.е. базис нуль-пространства матрицы A.

Представим теперь описание последних блочных столбцов результантной матрицы (5) уровня t, отличное от $\mathrm{row}\{F^{\boldsymbol{l}\,R}_{m\times n;q;s+t}\}_{|\boldsymbol{l}|=t}$. Исходя из расположенной в лексикографическом порядке последовательности матриц степени $s+t-1$

$$F^{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{l}} F(\lambda), \quad |l| = \sum_{j=1}^{q} l_j = t-1, \tag{11}$$

построим последовательность матриц степени $s+t$, также расположенную в лексикографическом порядке:

$$\begin{gathered} \lambda_1 \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{l}} F(\boldsymbol{\lambda}),\ |\boldsymbol{l}| = t-1; \quad \lambda_2 \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{l}} F(\boldsymbol{\lambda}),\ |\boldsymbol{l}| = t-1,\ l_1 < t-1; \\ \lambda_3 \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{l}} F(\boldsymbol{\lambda}),\ |\boldsymbol{l}| = t-1,\ l_1 < t-1,\ l_2 < t-1; \ldots ; \lambda_q^t F(\boldsymbol{\lambda}) \end{gathered} \tag{12}$$

Очевидно, что последовательность результантных столбцов матриц (12) совпадает с последовательностью блочных столбцов матрицы $\mathrm{row}\{F^{\boldsymbol{l}\,R}_{m\times n;q;s+t}\}_{|\boldsymbol{l}|=t}$. Кроме того они могут быть сформированы при использовании последовательности результантных столбцов матриц (11). Действительно, в соответствии с (4) каждая блочная компонента результантного столбца $F^{\boldsymbol{l}\,R}$, $|\boldsymbol{l}| = t-1$, расположенная в позиции $\boldsymbol{k}$, $|\boldsymbol{k}| = 0, \ldots, s+t-1$, перемещается в позицию $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{e}_p$, где $\boldsymbol{e}_p = (0, \ldots, \underbrace{1}_{p}, \ldots, 0)$, $p = 1, \ldots, q$, нового результантного столбца $F^{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{e}_p R}$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{k} + \boldsymbol{e}_p = (k_1, \ldots, k_p + 1, \ldots, k_q) \\ &\qquad \Rightarrow 1 + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{\sum_{i=1}^{j} (k_{q-i+1} + j - 1}{j} + \sum_{j=p}^{q} \binom{\sum_{i=1}^{j} k_{q-i+1} + j}{j}. \end{aligned}$$

Опишем более подробно первые шаги модифицированного алгоритма. На первом шаге формируется результантный вектор[8] $F^R \equiv F^R_{m\times n;q;s}$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, к которому применяется указанный выше алгоритм одновременного нахождения базисов образа и ядра:

$$\left(\begin{array}{c} F_{0\ldots 0} \\ \vdots \\ F_{0\ldots s} \\ \hline \\ I_n \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{F}_{0\ldots 0} & O \\ \vdots & \vdots \\ \widetilde{F}_{0\ldots s} & O \\ \hline \underbrace{Y_0}_{n_0} & \underbrace{X_0}_{\delta_0} \end{array}\right), \quad F_0^R \equiv \begin{pmatrix} \widetilde{F}_{0\ldots 0} \\ \vdots \\ \widetilde{F}_{0\ldots s} \end{pmatrix} = \operatorname{im} F^R,$$

$$X_0 = \ker F^R \subset \ker F(\boldsymbol{\lambda}), \quad n_0 \equiv n_0^{(0,0,\ldots,0)}.$$

Если $\delta_0 > 0$, то столбцы матрицы[9] X_0 дают δ_0 линейно независимых полиномиальных решений нулевой степени матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Отвечающие им нулевые столбцы исключаются. Результантный столбец F_0^R отвечает полиномиальной матрице $F_0(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \sum\limits_{\boldsymbol{k}} \widetilde{F}_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}$.

На втором шаге формируется начальное представление модифицируемой результантной матрицы первого уровня:

$$F_0^{R1} = \left[\begin{array}{ccccc} F_0^R & & & & \\ & F_0^{(1,0,\ldots,0)R} & F_0^{(0,1,\ldots,0)R} & \cdots & F_0^{(0,0,\ldots,1)R} \\ O & & & & \end{array}\right].$$

Здесь $F_0^{(1,0,\ldots,0)R}, F_0^{(0,1,\ldots,0)R}, \cdots, F_0^{(0,0,\ldots,1)R}$ – результантные столбцы матриц $\lambda_1 F_0(\boldsymbol{\lambda}), \lambda_2 F_0(\boldsymbol{\lambda}), \ldots, \lambda_q F_0(\boldsymbol{\lambda})$ соответственно. Или в общем виде: $F_0^{\boldsymbol{e}_p R}$ является результантным столбцом матрицы $\lambda_p F_0(\boldsymbol{\lambda})$, $p = 1, \ldots, q$.

[8]Здесь и далее опускаются указания на размеры матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, ее степень и число параметров. Подстрочный индекс в дальнейшем будет использоваться для указания номера шага, на котором выполнялось преобразование матричных коэффициентов.

[9]В приводимых изображениях модифицируемых результантных матриц местоположение нулевой матрицы и расположенной под ней матрицы, столбцы которой определяют найденные полиномиальные решения, является условным.

Учитывая дальнейшую необходимость предотвращения вычислений линейных комбинаций столбцов матрицы, отвечающих различным показателям мультипараметра $\boldsymbol{\lambda}$, следует, во-первых, исключить возможность перестановки столбцов. С той же целью желательно не преобразовывать неаннулируемые столбцы результантной матрицы. В связи с этим процесс нахождения столбцов, являющихся линейными комбинациями предшествующих им столбцов (с последующим исключением таких столбцов из дальнейшего рассмотрения[10]), целесообразно выполнять, используя матрицы вращения или отражения, или процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Возможное уменьшение у блочных столбцов модифицируемой результатной матрицы числа образующих их столбцов приводит к необходимости формирования одномерного массива размерностей. Размерность самого этого массива будет увеличиваться по мере роста уровня формируемых результантных матриц. Каждый элемент этого массива отвечает соответствующему показателю мультипараметра $\boldsymbol{\lambda}$ и определяет число столбцов соответствующего блочного столбца модифицируемой результантной матрицы.

В начале второго шага имеем:

$$\left(n_0^{(0,0,\ldots,0)} n_0^{(1,0,\ldots,0)} n_0^{(0,1,\ldots,0)} \cdots n_0^{(0,0,\ldots,1)}\right) \\ := \left(n_0^{(0,0,\ldots,0)} n_0^{(0,0,\ldots,0)} n_0^{(0,0,\ldots,0)} \cdots n_0^{(0,0,\ldots,0)}\right).$$

Вычисляются базисы образа и нуль-пространства матрицы F_0^{R1}:

$$\left(\begin{array}{ccccc} \begin{matrix} F_0^R \\ \\ \mathrm{O} \end{matrix} & F_0^{(1,0,\ldots,0)R} & F_0^{(0,1,\ldots,0)R} & \cdots & F_0^{(0,0,\ldots,1)R} \\ \hline Y_0 & & & & \\ & \widetilde{I} & & & \\ & & \widetilde{I} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \widetilde{I} \end{array}\right)$$

[10]Соответствующие столбцы необходимо будет удалять и у используемых в дальнейшем процессе матриц I_n. Преобразованные таким образом матрицы будем обозначать через $\widetilde{I}$.

$$
\to \left(\begin{array}{cccccc}
\begin{matrix} F_0^R \\ \\ O \end{matrix} & F_1^{(1,0,\dots,0)R} & F_1^{(0,1,\dots,0)R} & \cdots & F_1^{(0,0,\dots,1)R} & \mathrm{O} \\
\hline
\begin{matrix} Y_0 \\ \\ O \end{matrix} & Y_{(10\dots0)} & Y_{(01\dots0)} & \cdots & Y_{(00\dots1)} & X_1
\end{array}\right).
$$

Столбцы матрицы X_1, если их число не равно нулю, порождают полиномиальные решения первой степени $X_1(\boldsymbol{\lambda}) = [I\,\lambda_1 I\,\lambda_2 I \cdots \lambda_q I]X_1$. Отвечающие им нулевые столбцы исключаются. Корректируются значения элементов массива размерностей

$$
\left(n_0^{(0,0,\dots,0)} n_1^{(1,0,\dots,0)} n_1^{(0,1,\dots,0)} \cdots n_1^{(0,0,\dots,1)}\right)
$$

и формируется матрица

$$
F_1^{R1} \equiv \left(\begin{array}{ccccc}
\begin{matrix} F_0^R \\ \\ O \end{matrix} & F_1^{(1,0,\dots,0)R} & F_1^{(1,0,\dots,0)R} & \cdots & F_1^{(0,0,\dots,1)R}
\end{array}\right)
$$
$$
= \operatorname{im} F_0^{R1} = \operatorname{im} F^{R1}, \quad X_1 = \ker F_0^{R1} \subset \ker F^{R1}.
$$

Исследуется линейная зависимость столбцов матрицы $[X_0\ X_1(\boldsymbol{\lambda})]$. Столбцы матрицы $X_1(\boldsymbol{\lambda})$, являющиеся линейными комбинациями предшествующих столбцов, удаляются.

На третьем шаге формируются начальное представление модифицируемой результантной матрицы второго уровня и отвечающий ей вектор размерностей:
$F_1^{R2} =$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
\begin{matrix} F_1^{R1} \\ \\ O \end{matrix} & F_1^{(2,0,\dots,0)R} & F_1^{(1,1,\dots,0)R} & \cdots & F_1^{(1,0,\dots,1)R} & F_1^{(0,2,\dots,0)R} & \cdots & F_1^{(0,0,\dots,2)R}
\end{array}\right],
$$

$$
\Big(n_0^{(0,0,\dots,0)} n_1^{(1,0,\dots,0)} n_1^{(0,1,\dots,0)} \cdots n_1^{(0,0,\dots,1)} n_2^{(2,0,\dots,0)} n_2^{(1,1,\dots,0)}
$$
$$
\cdots n_2^{(1,0,\dots,1)} n_2^{(0,2,\dots,0)} \cdots n_2^{(0,0,\dots,2)}\Big).
$$

Здесь $F_1^{(2,0,\dots,0)R}$ – результантный столбец матрицы $\lambda_1 F_1^{(1,0,\dots,0)}(\boldsymbol{\lambda})$, $F_1^{(1,1,\dots,0)R}$ – результантный столбец матрицы $\lambda_1 F_1^{(0,1,\dots,0)}(\boldsymbol{\lambda})$, $\dots$, $F_1^{(1,0,\dots,1)R}$ – результантный столбец матрицы $\lambda_1 F_1^{(0,0,\dots,1)}(\boldsymbol{\lambda})$, $F_1^{(0,2,\dots,0)R}$ – результантный столбец матрицы $\lambda_2 F_1^{(0,1,\dots,0)}(\boldsymbol{\lambda})$, $\dots$,

$F_1^{(0,0,\ldots,2)R}$ – результантный столбец матрицы $\lambda_q F_1^{(0,0,\ldots,1)}(\boldsymbol{\lambda})$. Вычисляются базисы образа и нуль-пространства матрицы F_1^{R2}:

$$\left(\begin{array}{ccccc}
\begin{matrix} F_1^{R1} \\ \\ \mathrm{O} \end{matrix} & F_1^{(2,0,\ldots,0)R} & F_1^{(1,1,\ldots,0)R} & \cdots & F_1^{(0,0,\ldots,2)R} \\
\hline
Y_1 & & & & \\
 & \widetilde{I} & & & \\
 & & \widetilde{I} & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & \widetilde{I}
\end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc}
\begin{matrix} F_1^{R1} \\ \\ \mathrm{O} \end{matrix} & F_1^{(2,0,\ldots,0)R} & F_1^{(1,1,\ldots,0)R} & \cdots & F_1^{(0,0,\ldots,2)R} & \mathrm{O} \\
\hline
\begin{matrix} Y_1 \\ \\ \mathrm{O} \end{matrix} & Y_{(2,0,\ldots,0)} & Y_{(1,1,\ldots,0)} & \cdots & Y_{(0,0,\ldots,2)} & X_2
\end{array}\right).$$

Столбцы матрицы X_2, если их число не равно нулю, порождают полиномиальные решения второй степени

$$X_2(\boldsymbol{\lambda}) = [I\ \lambda_1 I\ \lambda_2 I \cdots \lambda_q I\ \lambda_1^2 I\ \lambda_1\lambda_2 I \cdots \lambda_q^2 I] X_2.$$

Отвечающие им нулевые столбцы исключаются. Корректируются значения элементов массива размерностей:

$$\Big(n_0^{(0,0,\ldots,0)} n_1^{(1,0,\ldots,0)} n_1^{(0,1,\ldots,0)} \cdots n_1^{(0,0,\ldots,1)} n_2^{(2,0,\ldots,0)} n_2^{(1,1,\ldots,0)} \\ \cdots n_2^{(1,0,\ldots,1)} n_2^{(0,2,\ldots,0)} \cdots n_2^{(0,0,\ldots,2)}\Big)$$

и формируется результантая матрица

$$F_2^{R2} \equiv \begin{pmatrix} \begin{matrix} F_1^{R1} \\ \\ O \end{matrix} & F_1^{(2,0,\ldots,0)R} & F_1^{(1,1,\ldots,0)R} & \cdots & F_1^{(0,0,\ldots,2)R} \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{im} F_1^{R2} = \operatorname{im} F^{R2}, \quad X_2 = \ker F_1^{R2} \subset \ker F^{R2}.$$

Исследуется линейная независимость столбцов матрицы $[X_0\, X_1(\boldsymbol{\lambda})\, X_2(\boldsymbol{\lambda})]$. Столбцы матрицы $X_2(\boldsymbol{\lambda})$, являющиеся линейными комбинациями предшествующих столбцов, удаляются. Далее процесс продолжается аналогичным образом. В качестве одного из критериев прекращения процесса построения результантных матриц возрастающих уровней можно использовать оценку возможного числа полиномиальных решений матрицы. Известно [1], что ранг матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ не может быть меньше наибольшего из рангов её матричных коэффициентов мономов наименьшей и наибольшей степени. Это дает возможность вычислить верхнюю границу числа базисных векторов правого нуль-пространства матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. При $m > n$ известна и нижняя граница, равная $m - n$. Вторым критерием является верхняя граница степени полиномиального решения, которая может быть получена из балансного соотношения спектральных характеристик [2]. В частности, при последовательной проверке линейной независимости получаемых полиномиальных решений, которая осуществляется этим же модифицированным алгоритмом, эта оценка имеет наиболее простой вид: максимальный уровень результантной матрицы не может быть больше произведения числа найденных полиномиальных решений и их максимальной степени.

Замечание. Одновременно с исключением столбцов из блочных столбцов результантных матриц (т.е. из результантных столбцов, отвечающим матрицам вида $\boldsymbol{\lambda}' F(\boldsymbol{\lambda})$) можно исключать столбцы с теми же номерами и из самой матрицы[11] $F(\boldsymbol{\lambda})$. В этом случае, во-первых, проще решается вопрос о линейной зависимости получаемых полиномиальных решений. При поодиночном исключении столбцов он может быть просто снят. При этом при построении дополнительных блочных столбцов результантной матрицы следующего уровня целесообразно формировать их не все сразу, а добавлять последовательно. При обнаружении возможности представления одного из новых столбцов в виде линейной комбинации предшествующих ему столбцов вычисляется соответствующее полиномиальное решение и исключаются соответствующие столбцы у исходной матрицы и у формируемой результантной матрицы (что учитывается и для последующих блочных столбцов результантной матрицы текущего уровня). Во-вторых, по окончании

[11] Изменение числа ее столбцов не скажется на дальнейшем процессе построения результантных матриц.

процесса будет получена матрица, линейно независимые столбцы которой образуют базис образа матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Минимальность степеней столбцов полученной матрицы и отсутствие у нее регулярного спектра при этом не гарантируются. Минимальная базисная матрица образа может быть получена, например, применением метода, описанного в работе [3] этого сборника.

§3. Иллюстрация реализации модифицированного алгоритма

Рассмотрим задачу вычисления минимального базиса правого нуль-пространства двухпараметрической матрицы $F(\lambda, \mu) = (1 - \lambda^2 \;\lambda\mu\; \lambda^2)$. Результантные матрицы возрастающих уровней (без явного исключения столбцов) с расположенной под ними преобразуемой единичной матрицей представлены в виде таблицы. Не относящиеся к матричным коэффициентам нулевые матрицы (строки) не отображаются. Числа $0, 1$ и 2 снаружи таблицы указывают границы результантных матриц соответствующих уровней и степеней полиномиальных решений. Мономы, расположенные слева от таблицы, указывают на соответствующие им матричные коэффициенты. Мономы, расположенные сверху таблицы, суть множители из представлений полиномиальных матриц вида $\boldsymbol{\lambda}' F(\boldsymbol{\lambda})$, результантные столбцы которых расположены ниже. Справа от таблицы представлены найденные полиномиальные решения матрицы $F(\lambda, \mu)$. В конце таблицы приведены изменения значений элементов в массиве размерностей. Элементы столбцов результантной матрицы, отвечающих полиномиальным решениям, и порождаемых ими последующих столбцов выделены жирным шрифтом. Подобным образом выделены и отвечающие им столбцы преобразуемой единичной матрицы.

Таблица 1

					0								1												2
		1				λ				μ				λ^2				$\lambda\mu$				μ^2			
	1	1	0	0	**0**																				
	λ	0	0	0	**0**	1	0	0	**0**																
	μ	0	0	0	**0**					1	**0**	0	**0**												
	λ^2	0	−1	0	**1**	0	0	0	**0**					**1**	0	0	**0**								
	$\lambda\mu$	0	0	1	**0**	0	0	0	**0**	0	**0**	0	**0**					**1**	**0**	0	**0**				
0	μ^2	0	0	0	**0**					0	**0**	0	**0**									1	**0**	0	**0**
	λ^3					0	−1	0	**1**					**0**	**0**	0	**0**								
	$\lambda^2\mu$					0	0	1	**0**	0	**−1**	0	**1**	**0**	**0**	0	**0**	**0**	**0**	0	**0**				
	$\lambda\mu^2$					0	0	0	**0**	0	**0**	1	**0**					**0**	**0**	0	**0**	0	**0**	0	**0**
1	μ^3									0	**0**	0	**0**									0	$\underline{\mathbf{0}}$	0	0
	λ^4													**0**	**−1**	0	**1**								
	$\lambda^3\mu$													**0**	**0**	1	**0**	**0**	**−1**	0	**1**				
	$\lambda^2\mu^2$													**0**	**0**	0	**0**	**0**	**0**	1	**0**	0	**−1**	0	**1**
	$\lambda\mu^3$																	**0**	**0**	0	**0**	0	**0**	1	**0**
2	μ^4																					0	**0**	0	**0**

		1			**0**						**0**			**0**				**0**								0
	1		1		**1**						**0**			**1**				**0**								1
				1	**0**						**0**			**0**				**−1**								0
0					**1**						**0**			**0**				**0**								1
						1			**0**		**0**			**0**				**0**	**0**							
							1		**1**		**0**			**0**				**0**	**0**							
	λ							1	**0**		**1**			**0**				**0**	**0**							0
									1		**0**			**0**				**0**	**0**							μ
										1	**0**		**0**	**0**				**0**					**0**			λ
	μ										**1**		**1**	**0**				**0**					**0**			0
1											**0**	1	**0**	**0**				**0**					**0**			
											0		**1**	**0**				**0**					**0**			
														1			0	**0**	**0**							
														0	**1**		**1**	**0**	**0**							λ^2
	λ^2													**0**		1	**0**	**0**	**1**							1
														0			**1**	**0**	**0**							0
														0				**1**	**0**		0		**0**			0
	$\lambda\mu$													**0**				**0**	**1**		**1**		**0**			
														0				**0**	**0**	1	**0**		**1**			
														0				**0**	**0**		1		**0**			$\lambda\mu$
														0				**0**				**1**	**0**		**0**	0
	μ^2													**0**				**0**					**1**		**1**	−1
2														**0**				**0**					**0**	1	**0**	0
														0				**0**					**0**		**1**	

Изменения в массиве размерностей

$$\begin{array}{ll}
\text{В начале шага} & \boxed{4}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{2} \\
 & \ \downarrow \qquad\ \ \downarrow \qquad\qquad\ \ \downarrow \\
\text{В конце шага} & \boxed{3}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}
\end{array}$$

В рассматриваемом примере ранг матрицы $F(\lambda, \mu)$ очевиден, так что размерность ее правого нуль-пространства равна 3, и его минимальный базис представлен, например, первыми найденными векторами нулевой, первой и второй степеней:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, второе полиномиальное решение второй степени удаляется без проверки линейной зависимости всех полученных векторов. Линейная же зависимость их очевидна:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mu + \begin{pmatrix} \lambda\mu \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что решение об исключении одного из двух полиномиальных решений второй степени в рассматриваемом случае можно было бы принять и на основании того, что оба они располагаются в последнем столбце соответствующего результантного столбца. Так что удаление каждого из них приводит к удалению одного и того же последнего столбца исходной матрицы. Реализация алгоритма с последовательным удалением столбцов матрицы $F(\lambda, \mu)$ дает следующую последовательность матриц, последняя из которых есть образ $F(\lambda, \mu)$:

$$(1\ -\lambda^2\ \lambda\mu\ \lambda^2) \xrightarrow{4} (1\ -\lambda^2\ \lambda\mu) \xrightarrow{2} (1\ \lambda\mu) \xrightarrow{1} (\lambda\mu).$$

В общем случае следовало бы проверить линейную независимость полученных векторов, что можно сделать, применяя рассматриваемый алгоритм к матрице

$$X(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 & \lambda\mu \\ 1 & \mu & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2

		0								1			
		1				λ				μ			
		0	0	0	0								
		1	0	1	0								
	1	0	0	0	−1								
0		1	0	0	0								
		0	0	0	0	0	0	0	0				
	λ	0	0	0	0	1	0	1	0				
		0	1	0	0	0	0	0	−1				
		0	0	0	0	1	0	0	0				
		0	0	0	0					0	0	**0**	0
	μ	0	1	0	0					1	0	**1**	0
		0		0	0					0	0	**0**	−1
1		0	0	0	0					1	0	**0**	0
		0	0	1	0	0	0	0	0				
	λ^2	0	0	0	0	0	0	0	0				
		0	0	0	0	0	1	0	0				
		0	0	0	0	0	0	0	0				
		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0
	$\lambda\mu$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0
		0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	**0**	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0
		0	0	0	0					0	0	**0**	0
	μ^2	0	0	0	0					0	1	**0**	0
		0	0	0	0					0	0	**0**	0
2		0	0	0	0					0	0	**0**	0
						0	0	1	0				
	λ^3					0	0	0	0				
						0	0	0	0				
						0	0	0	0				
						0	0	0	1	0	0	**1**	0
	$\lambda^2\mu$					0	0	0	0	0	0	**0**	0
						0	0	0	0	0	0	**0**	0
						0	0	0	0	0	0	**0**	0
						0	0	0	0	0	0	**0**	1
	$\lambda\mu^2$					0	0	0	0	0	0	**0**	0
						0	0	0	0	0	0	**0**	0
						0	0	0	0	0	0	**0**	0
										0	0	**0**	0
	μ^3									0	0	**0**	0
										0	0	**0**	0
3										0	0	**0**	0

		1										**0**		
	1		1									**−1**		
				1								**0**		
0					1							**0**		
						1						**0**		$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \mu \\ -\lambda \end{bmatrix}$
							1					**0**		
	λ							1				**0**		
									1			**−1**		
										1		**0**		
	μ										1	**0**		
												1		
1												**0**	1	

Вторая таблица, иллюстрирующая реализацию алгоритма для этой матрицы, сформирована по тому же правилу, что и первая. Линейная зависимость столбцов результантной матрицы обнаруживается только на втором шаге для матрицы первого уровня. Этого достаточно для того, чтобы исключить один из полиномиальных столбцов второй степени матрицы $X(\lambda, \mu)$. Формально доведенный до конца алгоритм предполагает удаление первого полиномиального решения второй степени (компоненты соответствующего столбца выделены жирным шрифтом). Компоненты найденного полиномиального решения первой степени матрицы $X(\lambda, \mu)$ (приведенного в правой части таблицы) только знаками отличаются от коэффициентов приведенного выше соотношения, демонстрирующего линейную зависимость исследуемых векторов.

Список литературы

1. В. Б. Хазанов, *Результантный подход к вычислению векторных характеристик многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 182–214.
2. В. Б. Хазанов, *Балансовое соотношение спектральных характеристик многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 187–194.
3. В. Б. Хазанов, *Вычисление характеристик регулярного конечного спектра сингулярной многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 259–271.
4. В. А. Чуркин, *Жорданова классификация конечномерных линейных операторов: Методические указания к новому методу построения жордановой базы для линейного оператора*, Изд-во НГУ, Новосибирск, 1991.

Khazanov V.B. Computation of a minimal basis of the right null space of a singular multiparameter polynomial matrix.

A modification of an algorithm, based on the resultant approach, for computing a minimal basis of the right null space of a singular multiparameter polynomial matrix is suggested. The modification suggested is based on simultaneous computation of bases of the image and kernel of a constant matrix and allows one to reduce computational costs. This modification also permits one to compute a basis of the image of a polynomial matrix. The implementation of the algorithm is illustrated on an example.

С.-Петербургский государственный
морской технический университет
E-mail: khazanovvb@gmail.com

Поступило 20 февраля 2019 г.