Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

В. Б. Хазанов

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РЕГУЛЯРНОГО КОНЕЧНОГО СПЕКТРА СИНГУЛЯРНОЙ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

§1. Вычисление характеристического многочлена матрицы

Конечный спектр q-параметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}) \equiv F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$ ранга ρ определяется как множество точек $\boldsymbol{\lambda^*} = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_q^*)$, координаты которых удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений

$$F\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_\rho \\ j_1, j_2, \dots, j_\rho \end{pmatrix} \equiv \varepsilon_{ij}^{(\rho)}(\boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad \begin{matrix} 1 \leqslant i_1, < i_2 < \dots < i_\rho \leqslant m, \\ 1 \leqslant j_1, < j_2 < \dots < j_\rho \leqslant n. \end{matrix} \tag{1}$$

Левые части уравнений системы (1) представляют собой всевозможные миноры порядка ρ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, так что эта система состоит из $K = \binom{m}{\rho}\binom{n}{\rho}$ уравнений (через $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ обозначены мультииндексы $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\rho)$, $\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \dots, j_\rho)$, которые определяют номера строк и столбцов соответствующего минора). Таким образом, конечный спектр q-параметрической полиномиальной матрицы представляет собой совокупность $(q-k)$-мерных решений, $1 \leqslant k \leqslant \min\{K, q\}$, q-мерного аффинного пространства. При $k = 1$ $(q-1)$-мерное решение будем называть собственным полиномом матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Следовательно, любой отличный от константы общий делитель миноров (1) является собственным полиномом матрицы. Регулярный конечный спектр матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ полностью представляется характеристическим полиномом $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, который является наибольшим общим делителем (НОД) этих миноров.

Ключевые слова: сингулярная многопараметрическая полиномиальная матрица, конечный регулярный спектр, собственный полином, порождающий собственный вектор, наибольший общий делитель, результантный подход.

Свободный[1] полиномиальный вектор $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda})$ будем называть порождающим собственным вектором матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, отвечающим ее собственному полиному $\chi(\boldsymbol{\lambda})$, если имеет место соотношение

$$F(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}) = \chi(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{z}(\boldsymbol{\lambda}), \tag{2}$$

где $z(\boldsymbol{\lambda})$ – свободный полиномиальный вектор[2]. Поскольку соотношение (2) может быть записано в виде

$$[F \quad \chi I_m] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_m, \tag{3}$$

то нахождение искомых характеристик $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{z}$, отвечающих χ, можно свести к задаче вычисления принадлежащего правому нуль-пространству матрицы $M = [F \quad \chi I_m]$ вектора, блочные компоненты которого являются свободными, причем вторая компонета не является нулевой[3].

В работе [4] описан алгоритм построения порождающего собственного вектора, отвечающего известному неприводимому собственному полиному матрицы. Обобщение этого алгоритма предназначено для случая, когда известный собственный полином (в частности, характеристический полином φ) матрицы является приводимым. Еще одно обобщение алгоритма предложено для случая регулярной матрицы, характеристический полином которой вычисляется применением модификации метода следов Леверье–Фаддеева (см., например, [1] или [4]). В последних двух случаях соотношение (3) принимает вид

$$[F \quad \varphi I_m] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_m. \tag{4}$$

Все указанные алгоритмы основаны на построении минимального базиса правого нуль-пространства блочных матриц $M = [F \quad \chi I_m]$ или $M = [F \quad \varphi I_m]$. Базисные $(n+m) \times n$ матрицы N правого нуль-пространства таких матриц, представленные в блочном виде, удовлетворяют соотношениям

$$[F \quad \chi I_m] \begin{bmatrix} T \\ -S \end{bmatrix} = O, \quad [F \quad \varphi I_m] \begin{bmatrix} T \\ -S \end{bmatrix} = O. \tag{5}$$

[1]Свободной называется полиномиальная матрица полного столбцового ранга, не имеющая конечного регулярного спектра.

[2]Далее мультипараметр у матриц, векторов и полиномов будет опущен.

[3]Предположение о полноте столбцового ранга матрицы F гарантирует выполнение этого условия.

Последующий анализ блочных столбцов матрицы N выполняется с целью получения характеристик $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{z}$ (в последних двух случаях и χ), удовлетворяющих соотношению (2).

В том случае, когда матрица F является сингулярной, ее характеристический полином может быть найден последовательным вычислением НОД скалярных многопараметрических полиномов (1). Каждый из этих миноров может быть вычислен применением указанной выше модификации метода следов Леверье–Фаддеева. Однако этот подход является неэффективным из-за больших вычислительных затрат. Рассмотрим алгоритм вычисления характеристического полинома или его делителей, основанный на том, что характеристический полином φ матрицы F является делителем каждого из ее миноров (1).

Применим модификацию метода следов Леверье–Фаддеева к одному из отличных от нуля миноров (1) и получим многочлен ψ кратный φ. Рассмотрим обобщение соотношения (4):

$$[F \quad \psi I_m] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_m. \tag{6}$$

Будем искать базисную $(n+m)\times n$ матрицу $N = [T \quad -S]^B$ правого нуль-пространства матрицы $M = [F \quad \psi I_m]$, которая удовлетворяет следующим соотношениям вида (5):

$$[F \quad \psi I_m] \begin{bmatrix} T \\ -S \end{bmatrix} = O. \tag{7}$$

Очевидно, для блочных столбцов матрицы $N = \operatorname{row}\left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_j \\ -\boldsymbol{s}_j \end{bmatrix} \right\}_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}$ выполняются соотношения

$$F\,\boldsymbol{t}_j = \psi\,\boldsymbol{s}_j,\ j = 1, \ldots, n.$$

Вычислим НОД γ_j и δ_j компонент векторов $\boldsymbol{t}_j$ и $\boldsymbol{s}_j$ соответственно и запишем $\boldsymbol{t}_j = \gamma_j \boldsymbol{x}_j,\ \boldsymbol{s}_j = \delta_j \boldsymbol{z}_j$. Вычислим полином $\chi_j = \frac{\psi\delta_j}{\gamma_j}$. Хотя бы для одного j этот полином будет отличным от константы делителем характеристического полинома φ или совпадать с ним.

Замечания. 1. Алгоритмы построения минимального базиса правого нуль-пространства многопараметрической полиномиальной матрицы и выполнения операций со скалярными многопараметрическими полиномами представлены в работах [4, 5] и в работе [6] из этого сборника.

2. Все обсуждаемые алгоритмы применимы и к однопараметрической матрице.

3. Если рассмотренные алгоритмы применить к матрице, имеющей правые полиномиальные решения, они могут либо оказаться среди столбцов матрицы S, отвечающих нулевым столбцам матрицы T, либо входить в линейные комбинации с порождающими собственными векторами. Поэтому в случае сингулярной полиномиальной матрицы общего вида следует вначале найти базисную матрицу ее образа (используя, например, метод из работы [6]), а уже к ней применять описанные выше алгоритмы. Альтернативный подход состоит в вычислении базисной матрицы образа матрицы S и выполнении соответствующих преобразований столбцов матрицы T с последующим исключением у нее столбцов, являющихся полиномиальными решениями.

§2. Вычисление минимальной базисной матрицы образа полиномиальной матрицы

Рассмотренные выше алгоритмы могут быть использованы для вычисления факторизации

$$F = \widehat{F} \cdot H, \tag{8}$$

где $\det H = \delta$ – отличный от константы делитель характеристического полинома φ матрицы F. Если это возможно при $\delta = \varphi$, то столбцы матрицы $\widehat{F}$ образуют свободный базис образа матрицы F. При максимально возможной степени полинома δ будет получен минимальный базис образа матрицы F.

Умножая обе части соотношения (8) справа на присоединенную к H матрицу H_a, получаем соотношение $F \cdot H_a = (\delta I)\widehat{F}$, которое может быть записано в виде

$$[F \quad \delta I_m] \begin{bmatrix} H_a \\ -\widehat{F} \end{bmatrix} = O.$$

Если δ равно χ, φ или ψ, приходим к соотношениям (5) и (7), приводящим к задаче вычисления матрицы $N = [T \ \ -S]^B$, столбцы которой образуют минимальный базис правого нуль-пространства соответствующей матрицы. Блоки S и T дают искомые матрицы с точностью до умножения их справа на некоторую регулярную матрицу. Минимальность получаемого базиса гарантирует, что матрица N не может иметь очевидное представление вида $[\delta I_n \ \ -F]^B$, возможное, только если δ будет взаимно простым с φ. Если $\delta = \chi \neq \varphi$, то матрица S не будет

свободной: ее характеристический полином равен $\frac{\varphi}{\chi}$. Если $\delta = \varphi$, то $\det T = \det H_a = \varphi^{n-1}$, тогда как миноры вида (1) матрицы $S = \widehat{F}$ будут взаимно простыми. Если $\delta = \psi \neq \varphi$, то матрица T будет иметь дополнительный собственный полином $\varepsilon = \frac{\psi}{\varphi}$. В этом случае множитель H может быть вычислен алгоритмом "деления" (см. [4]) матрицы F на матрицу S. Минимальность суммы степеней столбцов матрицы N не гарантирует, вообще говоря, минимальность суммы степеней столбцов матрицы S, претендующей на роль минимальной базисной матрицы $\widehat{F}$ образа F. Однако по сравнению с предыдущим случаем базисная матрица нуль-пространства могла бы иметь вид $[\varepsilon T \ \ -S]^B$, из чего следует невозрастание суммы степеней столбцов матрицы S.

§3. Вычисление наибольшего общего делителя скалярных и матричных многочленов

Покажем как предложенный алгоритм может быть использован для вычисления НОД нескольких[4] скалярных многочленов, что необходимо, в частности, и для реализации алгоритма из первого параграфа. Сформируем из многочленов f_i, $i = 1, \ldots, k$, матрицу-столбец $F = \operatorname{col}\{f_i\}_{i=1}^k$ и $k \times (k+1)$ матрицу $M = \left[\operatorname{col}\{f_i\}_{i=1}^k \quad f_1 I_k\right]$. Найдем минимальный базисный вектор $\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \operatorname{col}\{-\tau_i\}_{i=1}^k \end{bmatrix}$ ее правого нуль-пространства (в предположении, что $f_i = \varphi\ \tau_i$, $i = 1, \ldots, k$). Тогда частное $\frac{f_1}{\tau_1}$, являющееся характеристическим полиномом матрицы F, будет искомым НОД.

Аналогичным образом можно искать правый НОД нескольких полиномиальных $m_i \times n$ матриц F_i, $i = 1, \ldots, k$, полного столбцового ранга: $F_i = \widehat{F}_i\, H$. Выбирая в качестве δ полином ψ, являющийся одним из миноров (1) одной из этих матриц, формируем матрицу $\left[\operatorname{col}\{F_i\}_{i=1}^k \quad \delta I\right]$ и находим базисную матрицу $\begin{bmatrix} T \\ \operatorname{col}\{-S_i\}_{i=1}^k \end{bmatrix}$ ее правого нуль-пространства. "Деление" любой матрицы F_i на соответствующую матрицу S_i дает искомый общий делитель. Рассуждения, приведенные в конце предыдущего параграфа, позволяют предположить, что этот делитель будет наибольшим.

[4]Алгоритм вычисления НОД двух многочленов описан в [4].

§4. Иллюстрация алгоритмов

Приведем иллюстрацию алгоритмов нахождения порождающих собственных векторов (и собственных полиномов) для трех видов соотношений (3), (4), (6) и построения факторизаций (8) на примере двухпараметрической матрицы

$$F(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda\mu\\ \mu & \lambda\\ \lambda & \mu\end{bmatrix}.$$

Ее характеристический полином имеет вид $\varphi(\lambda,\mu)=\lambda^2-\mu^2$, а неприводимые собственные полиномы – это

$$\chi_1(\lambda,\mu)=\lambda-\mu \quad \text{и} \quad \chi_2(\lambda,\mu)=\lambda+\mu.$$

А. Алгоритм для соотношения (3)

$\chi_1(\lambda,\mu)=\lambda-\mu$ – неприводимый собственный полином,

$$M_1=[F\ \ \chi_1 I_3]=\begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda\mu & \lambda-\mu & 0 & 0\\ \mu & \lambda & 0 & \lambda-\mu & 0\\ \lambda & \mu & 0 & 0 & \lambda-\mu\end{bmatrix},$$

$$N_1=\begin{bmatrix}1 & -\mu\\ -1 & \lambda\\ -\lambda & 0\\ 1 & -\lambda-\mu\\ -1 & 0\end{bmatrix},\qquad \widehat{F}^1=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ -1 & \lambda+\mu\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_1\\ -\boldsymbol{s}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -\lambda\\ 1\\ -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{z}_1=\begin{bmatrix}\lambda\\ -1\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_2\\ -\boldsymbol{s}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mu\\ \lambda\\ 0\\ -\lambda-\mu\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}-\mu\\ \lambda\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{z}_2=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Тем самым найден порождающий собственный вектор, отвечающий неприводимому собственному полиному.

$$H_a^1 = \begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad H^1 = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu \\ \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda+\mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

так что получены несвободный базис $\widehat{F}^1$ образа матрицы F и матрица, обратная к H^1.

$\chi_2(\lambda,\mu) = \lambda + \mu$ – неприводимый собственный полином,

$$M_2 = [F \;\; \chi_2 I_3] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda+\mu & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & \lambda+\mu & 0 \\ \lambda & \mu & 0 & 0 & \lambda+\mu \end{bmatrix},$$
$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ 1 & \lambda \\ -\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda+\mu \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{F}^2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda-\mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_1 \\ -\boldsymbol{s}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\lambda \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_2 \\ -\boldsymbol{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu \\ \lambda \\ 0 \\ -\lambda+\mu \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -\mu \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тем самым найден порождающий собственный вектор, отвечающий неприводимому собственному полиному.

$$H_a^2 = \begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad H^2 = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu \\ \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda-\mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

и нами получены несвободный базис $\widehat{F}^2$ образа матрицы F и матрица, обратная к H^2.

Б. Алгоритм для соотношения (4)

$\varphi(\lambda,\mu)=\lambda^2-\mu^2$ – приводимый характеристический полином;

$$M=[F\ \ \varphi_1 I_3]=\begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda\mu & \lambda^2-\mu^2 & 0 & 0\\ \mu & \lambda & 0 & \lambda^2-\mu^2 & 0\\ \lambda & \mu & 0 & 0 & \lambda^2-\mu^2\end{bmatrix}.$$

Два варианта базисной матрицы правого нуль-пространства матрицы M:

$$N^1=\begin{bmatrix}\lambda+\mu & \lambda-\mu\\ -\lambda-\mu & \lambda-\mu\\ -\lambda & -\lambda\\ 1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix},\qquad \widehat{F}^1=\begin{bmatrix}\lambda & \lambda\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_1\\ -\boldsymbol{s}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+\mu\\ -\lambda-\mu\\ -\lambda\\ 1\\ -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{z}_1=\begin{bmatrix}\lambda\\ -1\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\chi_1(\lambda,\mu)=\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda+\mu}=\lambda-\mu;$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_2\\ -\boldsymbol{s}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-\mu\\ \lambda-\mu\\ -\lambda\\ -1\\ -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{z}_2=\begin{bmatrix}\lambda\\ 1\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\chi_2(\lambda,\mu)=\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda-\mu}=\lambda+\mu.$$

Тем самым найдены порождающие собственные векторы, отвечающие делителям известного характеристического полинома.

$$H^1_a=\begin{bmatrix}\lambda+\mu & \lambda-\mu\\ -\lambda-\mu & \lambda-\mu\end{bmatrix},\qquad H^1=\begin{bmatrix}\lambda-\mu & -\lambda+\mu\\ \lambda+\mu & \lambda+\mu\end{bmatrix},$$

$$2\begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda\mu\\ \mu & \lambda\\ \lambda & \mu\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & \lambda\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda-\mu & -\lambda+\mu\\ \lambda+\mu & \lambda+\mu\end{bmatrix}.$$

Получены свободный базис $\widehat{F}^1$ образа матрицы F
и матрица, обратная к H^1.

$$N^2 = \begin{bmatrix}\mu & \lambda\\ -\lambda & -\mu\\ 0 & -\lambda\\ 1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \qquad \widehat{F}^2 = \begin{bmatrix}0 & \lambda\\ -1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_1\\ -\boldsymbol{s}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mu\\ -\lambda\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix}\mu\\ -\lambda\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\chi_1(\lambda,\mu) = \varphi(\lambda,\mu) = \lambda^2 - \mu^2;$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_2\\ -\boldsymbol{s}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda\\ -\mu\\ -\lambda\\ 0\\ -1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix}\lambda\\ -\mu\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix}\lambda\\ 0\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\chi_2(\lambda,\mu) = \varphi(\lambda,\mu) = \lambda^2 - \mu^2.$$

Делители известного характеристического полинома не найдены.

$$H_a^2 = \begin{bmatrix}\mu & \lambda\\ -\lambda & -\mu\end{bmatrix}, \qquad H^2 = \begin{bmatrix}-\mu & -\lambda\\ \lambda & \mu\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda\mu\\ \mu & \lambda\\ \lambda & \mu\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \lambda\\ -1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\mu & -\lambda\\ \lambda & \mu\end{bmatrix}.$$

Получены свободный базис $\widehat{F}^2$ образа матрицы F
и матрица, обратная к H^2.

В. Алгоритм для соотношения (7)

$\psi = F\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix} = (\lambda^2-\mu^2)\lambda$ – многочлен,
кратный характеристическому полиному;

$$M = [F\ \ \varphi_1 I_3] = \begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda\mu & (\lambda^2-\mu^2)\lambda & 0 & 0\\ \mu & \lambda & 0 & (\lambda^2-\mu^2)\lambda & 0\\ \lambda & \mu & 0 & 0 & (\lambda^2-\mu^2)\lambda\end{bmatrix}.$$

Два варианта базисной матрицы правого нуль-пространства
матрицы M:

$$N^1 = \begin{bmatrix}(\lambda+\mu)\lambda & (\lambda-\mu)\lambda\\ -(\lambda+\mu)\lambda & (\lambda-\mu)\lambda\\ -\lambda & -\lambda\\ 1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}, \qquad \widehat{F}^1 = \begin{bmatrix}\lambda & \lambda\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_1\\ -\boldsymbol{s}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\lambda+\mu)\lambda\\ -(\lambda+\mu)\lambda\\ -\lambda\\ 1\\ -1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix}\lambda\\ -1\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\chi_1(\lambda,\mu) = \frac{(\lambda^2-\mu^2)\lambda}{(\lambda+\mu)\lambda} = \lambda-\mu;$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_2\\ -\boldsymbol{s}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\lambda-\mu)\lambda\\ (\lambda-\mu)\lambda\\ -\lambda\\ -1\\ -1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix}\lambda\\ 1\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\chi_2(\lambda,\mu) = \frac{(\lambda^2-\mu^2)\lambda}{(\lambda-\mu)\lambda} = \lambda+\mu.$$

Найдены собственные полиномы – делители характеристического
полинома и отвечающие им порождающие собственные векторы.

$$\widetilde{H}_a^1 = \begin{bmatrix} (\lambda+\mu)\lambda & (\lambda-\mu)\lambda \\ -(\lambda+\mu)\lambda & (\lambda-\mu)\lambda \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{H}^1 = \begin{bmatrix} (\lambda-\mu)\lambda & -(\lambda-\mu)\lambda \\ (\lambda+\mu)\lambda & (\lambda+\mu)\lambda \end{bmatrix},$$

$$2\lambda \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu \\ \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda-\mu)\lambda & -(\lambda-\mu)\lambda \\ (\lambda+\mu)\lambda & (\lambda+\mu)\lambda \end{bmatrix}.$$

Получен свободный базис $\widehat{F}^1$ образа матрицы F.

$$N^2 = \begin{bmatrix} \lambda\mu & \lambda^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ 0 & -\lambda \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{F}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_1 \\ -\boldsymbol{s}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mu \\ -\lambda^2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \mu \\ -\lambda \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\chi_1(\lambda,\mu) = \frac{(\lambda^2-\mu^2)\lambda}{\lambda} = \varphi(\lambda,\mu) = \lambda^2-\mu^2,$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_2 \\ -\boldsymbol{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 \\ -\lambda\mu \\ -\lambda \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \lambda \\ -\mu \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\chi_2(\lambda,\mu) = \frac{(\lambda^2-\mu^2)\lambda}{\lambda} = \varphi(\lambda,\mu) = \lambda^2-\mu^2.$$

Найден характеристический полином (но не его делители) и отвечающие ему порождающие собственные векторы.

$$\widetilde{H}_a^2 = \begin{bmatrix} \lambda\mu & \lambda^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{H}^2 = \begin{bmatrix} -\lambda\mu & -\lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda\mu \end{bmatrix},$$

$$2\lambda \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu \\ \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda\mu & -\lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda\mu \end{bmatrix}.$$

Получен свободный базис $\widehat{F}^2$ образа матрицы F.

Замечание. Полагая μ отличной от нуля константой, получим иллюстрацию алгоритмов для однопараметрической матрицы.

Проиллюстрируем применение основанного на использовании соотношения (7) алгоритма нахождения НОД полиномов на примере вычисления НОД компонент вектора t_1 из базисной матрицы N^2 в предыдущем примере. Сформируем матрицу-столбец

$$F(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}\lambda\mu\\-\lambda^2\end{bmatrix},$$

$$\psi=F\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\lambda\mu,\quad M=[F\ \ \psi I_2]=\begin{bmatrix}\lambda\mu & \lambda\mu & 0\\ \lambda^2 & 0 & \lambda\mu\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}\\-\boldsymbol{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu\\-\mu\\\lambda\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=[1],\quad \boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}\mu\\-\lambda\end{bmatrix},\quad \varphi=\frac{\lambda\mu}{\mu}=\lambda.$$

Найден наибольший общий делитель.

Список литературы

1. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 191—246.
2. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 284–321.
3. В. Б. Хазанов, *О некоторых свойствах полиномиальных базисов над полем рациональных функций многих переменных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 177–191.
4. В. Б. Хазанов, *Методы решения некоторых параметрических задач алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 164–181.
5. В. Б. Хазанов, *Результантный подход к вычислению векторных характеристик многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 182–214.
6. В. Б. Хазанов, *Построение минимального базиса правого нуль-пространства сингулярной многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 272–287.

Khazanov V. B. Computation of characteristics of the regular finite spectrum of a singular multiparameter polynomial matrix.

A modification of a known algorithm for computing the generating eigenvectors of a multiparameter polynomial matrix of full column rank is presented. This modification permits one to compute the characteristic polynomial (or its divisors) for a singular matrix. The algorithm proposed

can be extended to the general case and used for computing a minimal basis of the image of a polynomial matrix and also for computing the greatest common divisor of scalar and matrix polynomials. An illustration of implementation of the algorithm is given.

С.-Петербургский государственный
морской технический университет
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: khazanovvb@gmail.com

Поступило 18 января 2019 г.