Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

К. А. Таранин

О ±1-МАТРИЦАХ С НУЛЕВЫМ ПЕРМАНЕНТОМ

§1. Введение

Определение 1.1. Пусть A – матрица порядка n над полем действительных чисел. Функция, сопоставляющая матрице A число $\operatorname{per}(A) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$, где S_n – группа перестановок над множеством $\{1,2,\dots,n\}$, называется функцией перманента, а само это число – перманентом данной матрицы.

Функция перманента находит применение как в математических дисциплинах, таких как теория графов, комбинаторика, дискретная математика, так и в других науках, например, генетике, экономике и физике, см., например, [19] и [11]. В то же время, в отличие от определителя, для перманента не известно ни одного способа быстрого (за полиномиальное время) вычисления. Более того, известно, что проблема вычисления перманента является $\sharp P$-полной, см., например, [4] и [16]. В связи с этим, в своё время было поставлено немало вопросов о поиске и оценке значений, наибольшей известностью пользуется список проблем и гипотез, составленный Х. Минком [4]. Особый интерес представляют (0,1)-матрицы и $(-1,1)$-матрицы. Информацию о применении и проблемах, связанных с (0,1)-матрицами, можно найти, например, в [6], см. также работу [10] и библиографию в ней, а про $(-1,1)$-матрицы можно прочитать в следующих работах: [7] – применение в экономике, [9] – перманент в теории адамаровых матриц, [14] – проблема конвертации, [3] – об оценке количества матриц при фиксированном порядке и значении перманента.

В этой работе исследуется вопрос обращения в 0 перманента $(-1,1)$-матриц. Проблема существования матрицы с нулевым перманентом при заданном порядке впервые была предложена и частично решена в работе [17], а полное её решение можно найти, например, в [18]. Вопросы оценки количества таких матриц и их отыскания, которым посвящена наша работа, пока остаются открытыми. Ещё одна проблема,

Ключевые слова: перманент, ±1-матрицы, обращение в 0.
Работа поддержана грантом РНФ 17-11-01124.

сформулированная в [17], а именно, проблема поиска верхней оценки значения перманента при заданном ранге, была недавно решена в [8] доказательством гипотезы Кройтера [12]. Также проблемам из [17] посвящены работы [13] и [15]. Современное состояние исследований в этой области изложено в [5, 9, 18] и [20].

Здесь мы докажем ограничения на количество -1 в минимальных по числу -1 представителях классов *эквивалентности* матриц с нулевым перманентом, а также, с точностью до *эквивалентности*, классифицируем все матрицы порядка не более 5 с нулевым перманентом. Мы пользуемся терминологией и обозначениями, введёнными в предыдущих работах [1] и [2] на ту же тему, а также перенятыми из [13]. Поскольку перестановки строк и столбцов, а также транспонирование не меняют перманент и взаимное расположение элементов матрицы, мы будем проводить все рассуждения с точностью до этих операций, а матрицы, которые могут быть приведены с их помощью к одному и тому же виду, будем считать одинаковыми. *Эквивалентными* мы будем называть матрицы, которые можно привести к одному и тому же виду этими операциями вместе с домножением некоторых строк и столбцов на -1. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим множество Ω_n $(-1, 1)$-матриц порядка n. *Отрицательная частичная обобщённая диагональ* длины m – это любой набор $\{a_{i_1\sigma(i_1)}, \ldots, a_{i_m\sigma(i_m)}\}$ отрицательных элементов матрицы $A \in \Omega_n$, где $\{i_1, \ldots, i_m\} \subset \{1, \ldots, n\}$, каждое i_j встречается ровно 1 раз, $m < n$, $\sigma \in S_n$. В случае $m = n$ такой набор называется *отрицательной обобщённой диагональю*. При $0 \leqslant m \leqslant n$ через k_m обозначено число отрицательных частичных обобщённых диагоналей или обобщённых диагоналей длины m. Число k_0 всегда полагается равным 1. Заметим, что k_1 есть в точности количество минус единиц в матрице.

Работа построена следующим образом. В §2 доказаны ограничения на количество отрицательных элементов в минимальных по числу -1 представителях классов эквивалентности с нулевым перманентом; в §3 предъявлены представители всех таких классов при $n \leqslant 4$, а в §4 – представители всех таких классов при $n = 5$.

В завершение §1 приведём несколько известных результатов.

Лемма 1.2 ([1, лемма 2.3]). *Пусть* $A \in \Omega_n$. *Тогда*

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)!.$$

Предложение 1.3 (**[13, лемма 5]**). *Пусть* $A \in \Omega_n$, $n = 2^t - 1$ *для некоторого натурального* t. *Тогда*

$$\operatorname{per}(A) \not\,\vdots\, 2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor}.$$

Следствие 1.4 (**[13, лемма 4]**). *При* $n = 2^t - 1$, $t \in \mathbb{N}$, *матриц* $A \in \Omega_n$ *с нулевым перманентом не существует.*

Следующее предложение обращает следствие 1.4.

Предложение 1.5 (**[18, теорема 1]**). *При всех* n, *за исключением* $n = 2^t - 1$, $t \in \mathbb{N}$, *в* Ω_n *существуют матрицы с нулевым перманентом.*

Предложение 1.6 (**[2, лемма 3.1]**). *Пусть* $n, t \in \mathbb{N}$, $2^{t-1} \leqslant n < 2^t - 1$, *и* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(n)$ – *множество таких неотрицательных целых чисел* m, *меньших* n, *что двоичное представление* $n - m$ *содержит в точности* $t-1$ *единицу. Для любой матрицы* $A \in \Omega_n$

$$\operatorname{per}(A) \,\vdots\, 2^{n-t+2} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \sum_{m \in \mathfrak{M}} k_m \,\vdots\, 2.$$

§2. Общий случай

В этом параграфе мы сформулируем и докажем несколько утверждений, позволяющих ограничить количество рассматриваемых матриц при поиске минимальных по числу -1 матриц с нулевым перманентом.

Лемма 2.1. *Всякая матрица из* Ω_n *умножением некоторых строк и столбцов на* -1 *может быть приведена к виду с не более чем* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *отрицательными элементами в каждой строке и каждом столбце.*

Доказательство. Действительно, умножая на -1 строку или столбец с более чем половиной отрицательных элементов, мы уменьшаем общее количество -1 в матрице. Таким образом, в силу конечности количества отрицательных элементов в матрице, мы за конечное число умножений получим матрицу требуемого вида. $\square$

Лемма 2.2. *При* $n = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$ *и* $A \in \Omega_n$ $\operatorname{per}(A)$ *может обращаться в ноль, только если количество отрицательных элементов в матрице* A *чётно.*

Доказательство. Применяя предложение 1.6, получаем, что при $n = 2^t$ перманент $(-1,1)$-матрицы делится на 2^{n-t+1} тогда и только тогда, когда k_1 делится на 2, то есть в случае нечётного k_1 перманент не может обращаться в ноль. □

Лемма 2.3. *При $n = 2^t + 1$, $3 \leqslant t \in \mathbb{N}$, перманент матрицы $A \in \Omega_n$ может быть нулевым, только если число k_2 отрицательных частичных обобщённых диагоналей длины 2 чётно.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 2.2 следует из предложения 1.6. □

Лемма 2.4. *Если некоторая $(-1,1)$-матрица порядка $2k$ имеет не менее k строк $R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}$ с не менее, чем k отрицательными элементами $a_{i_q j_1}, \ldots, a_{i_q j_k}$ в каждой, $q = 1, \ldots, k$, а также отрицательный элемент на позиции (i, j), отличной от (i_q, j_m) при всех $q, m = 1, \ldots, k$, то количество отрицательных элементов можно уменьшить умножением некоторых строк и столбцов на -1.*

Доказательство. Если существует строка, содержащая $k+1$ или более отрицательных элементов, то умножим эту строку на -1.

Теперь предположим, что таких строк нет. Рассмотрим строки $R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}$ и столбец j. Через l обозначим число строк среди данных k, с которыми этот столбец имеет общий элемент -1. Умножим столбец j на -1.

1. Если $k = l$, то столбец j содержал не менее $k+1$ отрицательного элемента, и тогда общее число отрицательных элементов в матрице уменьшилось после домножения.

2. Если $l < k$, то после домножения количество -1 в матрице увеличится не более, чем на $2k - 2l - 2$. Оно может и уменьшиться, если столбец j пересекался по -1 с достаточным количеством других k строк. Далее домножим на -1 те $k - l$ строк, которые пересекались с данным столбцом по положительному элементу до умножения столбца на -1. Количество -1 в каждой из этих строк после умножения столбца на -1 стало равно $k+1$. Значит, после умножения этих строк на -1 количество -1 в матрице уменьшится на

$$2(k-l) = 2k - 2l > 2k - 2l - 1,$$

то есть в итоге количество -1 в матрице уменьшилось на два или более. □

Следствие 2.5. *Если $n > 2$ чётно, а матрица $A \in \Omega_n$ имеет более, чем $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 1$ отрицательных элементов, то она может быть приведена к виду с меньшим количеством отрицательных элементов умножением некоторых строк и столбцов на -1.*

Доказательство. Если A содержит строку с более чем $\frac{n}{2}$ отрицательными элементами, то мы можем получить искомую матрицу умножением этой строки на -1. Если таких строк нет, то в матрице есть не менее $\frac{n}{2}$ строк с $\frac{n}{2}$ отрицательными элементами в каждой и дополнительный элемент -1 в некоторой другой строке (иначе общее число -1 не будет превышать требуемое условием следствия). Значит, доказываемое утверждение следует из леммы 2.4. □

§3. Матрицы порядка $n \leqslant 4$

Ясно, что при $n = 1$ $(-1, 1)$-матриц порядка n с нулевым перманентом не существует, а при $n = 2$ таких матриц ровно половина – это все матрицы с нечётным количеством -1. При $n = 3$ таких матриц не существует в силу предложения 1.4.

Лемма 3.1. *Всякая матрица $A \in \Omega_4$ с перманентом 0 может быть приведена к виду с двумя или четырьмя -1 домножением некоторых строк и столбцов на -1.*

Доказательство. В силу леммы 2.1, мы можем рассматривать только матрицы с не более чем восемью -1, причём в каждой строке и каждом столбце не более двух -1. Согласно предложению 1.6, перманент $(-1, 1)$-матрицы порядка 4 делится на 8 тогда и только тогда, когда число k_1 отрицательных элементов чётно. Следовательно, если число отрицательных элементов нечётно, то перманент не может быть нулевым. Осталось рассмотреть матрицы с шестью и восемью -1.

1. Пусть матрица содержит восемь -1, по две -1 в каждом столбце и каждой строке. Домножая какую-нибудь строку на -1, получаем матрицу с восемью -1, два столбца которой содержат по три -1. Домножая эти столбцы на -1, получаем матрицу с четырьмя -1.

2. Пусть матрица содержит шесть -1. Если есть строка и столбец с двумя -1, пересекающиеся по 1, то мы можем умножить их на -1, уменьшая общее количество -1 в матрице. Следовательно, в том случае, когда матрица содержит шесть -1, нам достаточно рассмотреть

матрицу следующего вида:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Но здесь мы можем умножить на -1 сначала строку с единственным элементом -1, а потом два получившихся столбца с тремя -1, получив матрицу с четырьмя -1. Это завершает доказательство леммы, но вдобавок можно ещё заметить, что в полученной матрице есть строка с тремя -1, так что мы можем получить матрицу с двумя отрицательными элементами, домножив эту строку на -1. □

Предложение 3.2. *При $n = 4$ любая $(-1, 1)$-матрица с нулевым перманентом эквивалентна одной из следующих:*

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Согласно лемме 3.1, нам достаточно рассмотреть матрицы с двумя или четырьмя отрицательными элементами, а в силу леммы 2.1 можно считать, что никакие три из них не стоят в одной строке или в одном столбце. Таким образом, надо рассмотреть восемь случаев (с точностью до транспонирования и перестановки строк и столбцов):

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_6 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A_2 эквивалентна матрице B_4, матрица B_1 эквивалентна матрице B_3, а матрица B_2 эквивалентна матрице B_5. Теперь, применяя лемму 1.2 в случае $n = 4$, заметим, что при $k_1 = 4$ перманент делится на 16 тогда и только тогда, когда разность $k_2 - k_3$ нечётна, то есть перманент не может быть нулевым, когда она чётна, как, например, в случае матрицы B_1. Далее, вычисляя перманенты матриц A_1, A_2, B_5 и B_6, получаем 0, за исключением $\operatorname{per}(A_2)$. Предложение доказано. □

§4. Матрицы порядка 5

Лемма 4.1. *Всякая матрица из Ω_5 с нулевым перманентом эквивалентна некоторой матрице с не более чем семью отрицательными элементами.*

Доказательство. Согласно лемме 2.1, нет необходимости рассматривать матрицы с более чем десятью отрицательными элементами, а также матрицы с тремя и более -1 в одной строке или одном столбце. Если в матрице десять или девять -1, то существуют строка с двумя -1 и два столбца с двумя -1 в каждом, пересекающие эту строку по 1. Тогда мы умножим эту строку и эти столбцы на -1, уменьшив тем самым количество -1 в матрице. В случае восьми -1 в матрице это может быть неприменимо, а именно, так происходит, когда существуют два элемента, равных -1, каждый из которых является единственным отрицательным элементом в своей строке и своём столбце. Получается матрица следующего вида:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя её перманент, получаем -8, то есть не ноль. Отсюда следует утверждение леммы. □

Предложение 4.2. *При $n = 5$ всякая $(-1,1)$-матрица порядка n с нулевым перманентом эквивалентна одной из следующих* 11 *матриц:*

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В силу леммы 4.1, нам достаточно рассмотреть матрицы, в которых не более семи отрицательных элементов, никакие три из которых не стоят в одной строке или одном столбце. Непосредственным вычислением проверяется, что перманент матриц с двумя и менее -1 не обращается в 0. Далее рассмотрим оставшиеся опции для количества -1: 3, 4, 5, 6 и 7.

0. Заметим, что, в силу предложения 1.6, перманент $(-1,1)$-матрицы порядка 5 обращается в ноль, только если сумма k_0+k_2 чётна, то есть только при нечётном k_2.

1. $k_1 = 7$. Если существует подматрица порядка 4, содержащая все семь -1, то в матрице есть три строки и три столбца с двумя -1, строка и столбец с одной -1 и строка и столбец только с 1. Следовательно, либо существует строка с двумя -1, пересекающая столбец с одной -1 по этой -1, либо матрица принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае мы можем домножить эту строку на -1, а затем сделать то же самое с полученными двумя столбцами с тремя -1, уменьшив общее количество -1 до шести. А во втором случае перманент равен нулю.

Теперь предположим, что все семь -1 занимают ровно четыре строки и пять столбцов. Как и выше, в том случае, когда строка с одним отрицательным элементом пересекает столбец с двумя отрицательными элементами по -1, можно домножить на -1 сначала этот столбец, а затем две строки, к которым добавился третий элемент -1, уменьшив общее количество -1. Если же такого пересечения в матрице нет, то существует подматрица размера 3×4, содержащая шесть -1. Если она содержит блок 2×2 из -1, то мы можем умножить на -1 строку из подматрицы, не участвующую в этом блоке, а затем два столбца из блока, получив шесть -1 в матрице вместо семи. Если же в подматрице нет такого блока, то матрица принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её перманент равен 8.

Наконец, если семь -1 занимают все пять строк и пять столбцов, то, с точностью до перестановки строк и столбцов и транспонирования матрицы, существует три случая, к которым неприменимы описанные способы уменьшения количества отрицательных элементов домножением строк и столбцов на -1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перманент первой матрицы равен -16, а второй и третьей – нулю.

2. $k_1 = 3$. Из пункта 0 этого доказательства и леммы 2.1 следует, что нам достаточно вычислить перманенты следующих двух матриц:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Их перманенты равны 32 и 0 соответственно.

3. $k_1 = 4$. Из леммы 2.1 и пункта 0 этого доказательства следует, что нам достаточно вычислить перманенты следующих двух матриц:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, все остальные матрицы с четырьмя -1 либо имеют три -1 в одной строке (или столбце), либо имеют чётное k_2. Далее, перманент первой матрицы равен 0, а перманент второй матрицы равен 16.

4. $k_1 = 5$.

Если отрицательные элементы занимают все пять строк и столбцов, то они образуют диагональ длины 5, и тогда $k_2 = 10$, то есть перманент не может быть нулевым в силу пункта 0 этого доказательства.

Если отрицательные элементы занимают четыре строки и пять столбцов, то получаем матрицу следующего вида:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её перманент равен 16.

Если отрицательные элементы занимают четыре строки и четыре столбца, то имеем два случая:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманент обеих матриц равен 8.

Если все отрицательные элементы занимают три строки и пять столбцов, то матрица принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её перманент равен 8.

Если все отрицательные элементы занимают три строки и четыре столбца, то имеем два случая:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае перманент равен 0, а во втором он равен 16.

Наконец, предположим, что все отрицательные элементы расположены в некоторой подматрице размера 3×3. Опять имеем два случая:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом перманент равен 8, а во втором он равен -8.

5. $k_1 = 6$. Если все шесть отрицательных элементов расположены в некоторой подматрице порядка 3, то вся матрица принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её перманент равен 16.

Если отрицательные элементы занимают три строки и четыре столбца, то матрица имеет один из следующих двух видов:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманент в обоих случаях равен 8.

Если отрицательные элементы занимают три строки и пять столбцов, то матрица принимает вид

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманент равен 0.

Если отрицательные элементы занимают четыре строки и четыре столбца, то матрица принимает один из следующих пяти видов:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В третьей матрице из приведённого списка количество -1 можно уменьшить до пяти домножением строк и столбцов на -1; перманент пятой матрицы равен 16, а перманент первой, второй и четвёртой – нуль.

Если отрицательные элементы занимают пять строк и четыре столбца, то матрица принимает один из следующих трёх видов:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Строки и столбцы первой матрицы можно домножить на -1 так, чтобы количество -1 стало равно пяти. Перманент второй и третьей матриц равен 8.

Наконец, если отрицательные элементы занимают все пять строк и пять столбцов, то матрица принимает один из следующих двух видов:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае перманент равен 16, а во втором он равен 0.

Предложение доказано. □

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи, постоянное внимание к работе и ценные обсуждения.

Список литературы

1. М. В. Будревич, А. Э. Гутерман, К. А. Таранин, *О делимости парманента* (± 1)*-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 26–37.
2. М. В. Будревич, А. Э. Гутерман, К. А. Таранин, *К теореме Кройтера–Сейфтера о делимости перманентов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **463** (2017), 25–35.
3. А. Д. Коршунов, *О числе* $(-1, 1)$*-матриц порядка* n *с фиксированным перманентом.* — Дискр. анализ исслед. опер. **3**, No. 1 (1996), 23–42.
4. Х. Минк, *Перманенты.* М., Мир, 1982.
5. R. B. Bapat, *Recent developments and open problems in the theory of permanents.* — Math. Student **76**, No. 1–4 (2007), 55–69.
6. R. A. Brualdi, H. J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory.* Cambridge Univ. Press, 1991.
7. R. A. Brualdi, B. L. Shader, *Matrices of Sign-Solvable Linear Systems.* Cambridge Univ. Press, 1995.
8. M. V. Budrevich, A. E. Guterman, *Kräuter conjecture on permanents is true.* — J. Comb. Theory, Ser. A **162** (2019), 306-343.
9. G.-S. Cheon, I. M. Wanless, *An update on Minc's survey of open problems involving permanents.* — Linear Algebra Appl. **403** (2005), 314–342.
10. A. E. Guterman, K. A. Taranin, *On the values of the permanent of* $(0, 1)$*-matrices*, Linear Algebra Appl. **552** (2018), 256-276.
11. Y.-H. Kiem, S.-H. Kye, J. Na, *Product vectors in the ranges of multi-partite states with positive partial transposes and permanents of matrices.* — Commun. Math. Phys. **338**, No. 2 (2015), 621–639.
12. A. R. Kräuter, *Recent results on permanents of* $(1, -1)$*-matrices.* — Ber. Math.-Statist. Sekt. Forschungsgesellschaft Joanneum Graz **249** (1985), 1–25.
13. A. R. Kräuter, N. Seifter, *On some questions concerning permanents of* $(1, -1)$*-matrices.* — Isr. J. Math. **45**, No. 1 (1983), 53–62.

14. W. McCuaig, *Pólya's permanent problem.* — Electron. J. Combin. **11** (2004), R79.
15. R. Simion, F. W. Schmidt, *On* $(+1,-1)$*-matrices with vanishing permanent.* — Discrete Math. **46** (1983), 107–108.
16. L. G. Valiant, *The complexity of computing the permanent.* — Theor. Comput. Sci. **8** (1979), 189–201.
17. E. T. H. Wang, *On permanents of* $(1,-1)$*-matrices.* — Isr. J. Math. **18** (1974), 353–361.
18. I. M. Wanless, *Permanents of matrices of signed ones.* — Linear Multilinear Algebra **53**, No. 6 (2005), 427–433.
19. T.-C. Wei, S. Severini, *Matrix permanent and quantum entanglement of permutation invariant states.* — J. Math. Phys. **51**, No. 9 (2010).
20. F. Zhang, *An update on a few permanent conjectures.* — Spec. Matrices **4** (2016), 305–316.

Taranin K. A. ± 1-matrices with vanishing permanent.

The problem of finding $(-1,1)$-matrices with permanent 0 was proposed by Edward Wang in 1974.

This paper states and proves bounds on the number of negative entries in a matrix with zero permanent and minimal number of negative entries among all matrices of the same equivalence class. Then representatives of every equivalence class of matrices with zero permanent are found for $n \leqslant 5$.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: cataranin@gmail.com

Поступило 07 октября 2019 г.