Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

А. М. Максаев

ОТОБРАЖЕНИЯ, СТРОГО СОХРАНЯЮЩИЕ λ-СКРАМБЛИНГ МАТРИЦЫ

§1. Введение

Определение 1.1. *Множество $\mathscr{S}$ с двумя бинарными операциями $+$ (сложение) и $\cdot$ (умножение) называется полукольцом, если:*

• *$(\mathscr{S}, +)$ – абелев моноид, нейтральный элемент которого обозначается через 0,*

• *$(\mathscr{S}, \cdot)$ – полугруппа (нейтральный элемент которой, если он существует, обозначается через 1),*

• *$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ и $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ для всех $a, b, c \in \mathscr{S}$,*

• *$s \cdot 0 = 0 \cdot s = 0$ для всех $s \in \mathscr{S}$.*

Пример 1.2. Примерами полуколец являются:

• любое кольцо;

• множество всех идеалов произвольного кольца с операциями сложения и умножения идеалов;

• множество всех подмножеств произвольного множества с операциями объединения и пересечения множеств;

• булевы алгебры;

• квадратные матрицы с элементами из произвольного полукольца;

• многочлены с коэффициентами из произвольного полукольца.

Полукольцо $\mathscr{S}$ называется *коммутативным*, если $ab = ba$ для всех $a, b \in \mathscr{S}$. Полукольцо $\mathscr{S}$ называется *антинегативным*, если 0 – единственный его элемент, обратимый относительно сложения. Элементы $a, b \in \mathscr{S}$ называются *делителями нуля*, если $a \neq 0$, $b \neq 0$, но $ab = 0$.

В настоящей работе мы будем обозначать через $\mathscr{S}$ антинегативное коммутативное полукольцо с $1 \neq 0$ и без делителей нуля и рассматривать только такие полукольца.

Пример 1.3. Примерами антинегативных коммутативных полуколец $\mathscr{S}$ с единицей и без делителей нуля являются:

Ключевые слова: скрамблинг-матрица, скрамблинг-индекс, ориентированные графы, неотрицательные матрицы, антинегативные полукольца.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект No. 17-11-01124.

• $\langle \mathbb{R}_+, +, \cdot \rangle$ (через $\mathbb{R}_+$ здесь обозначены неотрицательные вещественные числа);

• $\langle \mathbb{R}_+[\sqrt{2}\,] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{R}_+\}, +, \cdot \rangle$;

•$\langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, + \rangle$; • $\langle [0,1], \max, \min \rangle$.

Пример 1.4. Еще одним важным примером является бинарное булево полукольцо $\mathbf{B} = \{0,1\}$, операции в котором определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} &0+0=0, && 0\cdot 0=0,\\ &0+1=1+0=1, && 0\cdot 1=1\cdot 0=0,\\ &1+1=1, && 1\cdot 1=1. \end{aligned}$$

Обозначим через $M_n(\mathscr{S})$ множество $n \times n$ матриц с элементами из $\mathscr{S}$, через O – нулевую матрицу, а через J – матрицу, состоящую из одних единиц. Через E_{ij} будем обозначать (i,j)-ю матричную единицу, то есть матрицу, единственный ненулевой элемент которой стоит на пересечении i-ой строки и j-го столбца и равен 1, а остальные ее элементы равны 0. Будем говорить, что матричная единица E_{ij} *лежит* в i-ой строке и j-ом столбце. Для матрицы $A \in M_n(\mathscr{S})$ через $\nu(A)$ обозначим число ее ненулевых элементов; S_n обозначает множество перестановок на $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Определение 1.5. *Отображение $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$ называется аддитивным, если*

$$T(A+B) = T(A) + T(B) \text{ для всех } A, B \in M_n(\mathscr{S}).$$

Аддитивное отображение T называется линейным, если для всех $\alpha \in \mathscr{S}$ и всех $A \in M_n(\mathscr{S})$ имеет место равенство $T(\alpha A) = \alpha T(A)$.

Определение 1.6. *Пусть $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$ – произвольное отображение, $X \subseteq M_n(\mathscr{S})$. Говорят, что T сохраняет множество X, если $T(X) \subseteq X$. Говорят, что T строго сохраняет множество X, если $T(X) \subseteq X$ и $T(M_n(\mathscr{S}) \setminus X) \subseteq M_n(\mathscr{S}) \setminus X$.*

В 2009 году Акельбек и Киркланд в статье [1] ввели понятие скрамблинг-индекса неотрицательной примитивной матрицы A. Согласно их определению, скрамблинг-индекс равен наименьшему натуральному k такому, что A^k – скрамблинг-матрица, где скрамблинг-матрицей называется матрица, для любых двух строк которой найдется столбец, на пересечении с которым в этих строках находятся лишь положительные числа. Акельбек и Киркланд показали, что через скрамблинг-индекс можно нетривиально оценить сверху второе собственное значение матрицы A (см. [1, теорема 2.3]), используя известный коэффициент Добрушина (Δ-коэффициент), который применяется, например, для исследования свойств цепей Маркова и конечных автоматов (см. [3, 4]).

В 2010 году Хуанг и Лиу в работе [2] обобщили понятие скрамблинг-индекса и скрамблинг-матрицы, заменив вышестоящее число 2 на произвольное натуральное $\lambda \leqslant n$. Данное обобщение мотивировано приложениями в теории коммуникаций при рассмотрении системы связей без памяти. При исследовании обобщенного скрамблинг-индекса ключевую роль играют λ-скрамблинг матрицы.

Определение 1.7 ([17, определение 1.11])**.** *Пусть $A \in M_n(\mathscr{S})$ и пусть λ – целое число, $1 \leqslant \lambda \leqslant n$. Матрица A называется λ-скрамблинг-матрицей, если для любых индексов $i_1, i_2, \ldots, i_\lambda \in \{1, 2, \ldots, n\}$ найдется индекс $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, для которого*

$$A(i_1, j) \neq 0, \quad A(i_2, j) \neq 0, \ \ldots, \quad A(i_\lambda, j) \neq 0.$$

Иными словами, любые λ строк матрицы A пересекаются с некоторым ее столбцом лишь по ненулевым элементам. Обозначим через $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda)$ множество всех λ-скрамблинг матриц из $M_n(\mathscr{S})$.

Непосредственная проверка показывает, что выполнены следующие утверждения:

(1) Множество $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, 1)$ состоит в точности из тех матриц, в каждой строке которых есть ненулевой элемент.
(2) Множество $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, n)$ состоит в точности из тех матриц, в которых есть столбец, не содержащий нулей.
(3) Если $1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant n$, то $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda_2) \subseteq \Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda_1)$.
(4) Для произвольного λ свойство «быть λ-скрамблинг матрицей» инвариантно относительно любой перестановки строк и столбцов.

В случае $1 < \lambda < n$, описания множества $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda)$, аналогичного вышеизложенным пунктам 1 и 2, не найдено. Используя следующее утверждение, можно построить нетривиальные примеры λ-скрамблинг матриц.

Утверждение 1.8. *Пусть* $1\leqslant\lambda\leqslant n$, $A\in\Lambda_{\mathscr{S}}(n,\lambda)$, $b_1,b_2\in(\mathscr{S}\setminus\{0\})^n$. *Тогда матрица*

$$B=\begin{pmatrix} b_1^T & A\\ 0 & b_2\end{pmatrix}$$

размера $(n+1)\times(n+1)$ *лежит в* $\Lambda_{\mathscr{S}}(n+1,\lambda+1)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество индексов

$$I=\{i_1,\dots,i_{\lambda+1}\}\subseteq\{1,2,\dots,n+1\}.$$

Случай 1. $I\subseteq\{1,2,\dots,n\}$. В этом случае, первый столбец является искомым для I.

Случай 2. $I\nsubseteq\{1,2,\dots,n\}$. Можно считать, что $i_{\lambda+1}=n+1$. Для индексов $i_1,\dots,i_\lambda$ найдется такой столбец с номером $j>1$, что $A(i_1,j)\neq 0,\dots,A(i_\lambda,j)\neq 0$. Этот столбец и будет искомым. □

Таким образом, нетривиальные примеры матриц из $\Lambda_{\mathscr{S}}(n,\lambda)$ можно построить, применяя $\lambda-1$ раз утверждение 1.8 к матрицам из множества $\Lambda_{\mathscr{S}}(n-\lambda+1,1)$.

Пониманию того, как устроено множество λ-скрамблинг матриц при каждом $\lambda\leqslant n$, может помочь изучение отображений матриц, обладающих некоторыми алгебраическими свойствами и сохраняющих это множество.

Теория отображений, сохраняющих различные множества и свойства матриц, берет свое начало с работы Фробениуса [5], в которой описаны линейные отображения квадратных матриц над полем, сохраняющие определитель. За последние 100 лет эта теория активно развивалась, было разработано много перспективных методов исследования. Для ознакомления с классическими результатами теории отображений матриц, сохраняющих различные множества и свойства, предлагаем читателю обратиться к обзору [6], с последними результатами – к работам [7–16], а с результатами о сохранении значений скрамблинг-индекса – к работам [17–20].

В работе [17] автором совместно с А. Э. Гутерманом получена следующая теорема.

Теорема 1.9 ([17, теорема 2.20 и замечание 2.21])**.** *Пусть* $n\geqslant 2$, $1<\lambda\leqslant n$ *и* $T\colon M_n(\mathbf{B})\to M_n(\mathbf{B})$ *– аддитивное отображение. Тогда* T *биективно и сохраняет множество* $\Lambda_{\mathbf{B}}(n,\lambda)$ *в том и только том случае, когда* а) *при* $\lambda < n$*: найдутся перестановочные матрицы* P *и* Q *порядка* n *такие, что* $T(A) = PAQ$ *для всех* $A \in M_n(\mathbf{B})$*;*

б) *при* $\lambda = n$*: найдутся перестановки* $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in S_n$ *такие, что* $T(E_{ij}) = E_{\sigma_j(i),\tau(j)}$ *для всех* $1 \leqslant i, j \leqslant n$*.*

Цель настоящей работы – доказать, что в теореме 1.9 условие биективности отображения T выполняется автоматически. Это удается сделать при более сильном предположении – строгом сохранении множества $\Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$. Работа построена следующим образом. Во втором параграфе доказывается, что аддитивное отображение, строго сохраняющее множество λ-скрамблинг матриц над полукольцом $\mathbf{B}$, биективно. Также приводится общий вид такого отображения. В третьем параграфе результаты обобщаются на антинегативные коммутативные полукольца с единицей и без делителей нуля.

§2. Строгое сохранение λ-скрамблинг матриц в случае полукольца $\mathbf{B}$

Пусть $1 < \lambda \leqslant n$. В этом параграфе мы опишем аддитивные отображения, строго сохраняющие множество $\Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$.

Введем естественное отношение частичного порядка на $M_n(\mathbf{B})$.

Определение 2.1. *Пусть* $A, B \in M_n(\mathbf{B})$*. Скажем, что* $A \leqslant B$ *(или* $B \geqslant A$*), если*

$$\forall i, j \ (A(i,j) \neq 0 \Rightarrow B(i,j) \neq 0).$$

Будем писать, что $A < B$ *(или* $B > A$*), если* $A \leqslant B$ *и* $A \neq B$*. Если* $A \leqslant B$*, то через* $B - A$ *будем обозначать матрицу, полученную из* B *заменой* 1 *на* 0 *во всех позициях* (i, j)*, где* $A(i,j) = 1$*.*

Следующая лемма является известной (см., например, [17, предложение 2.6]). Для полноты изложения мы приводим ее короткое доказательство.

Лемма 2.2. *Пусть* $T\colon M_n(\mathbf{B}) \to M_n(\mathbf{B})$ *– аддитивное отображение. Тогда для произвольных матриц* $A, B \in M_n(\mathbf{B})$ *из условия* $A \leqslant B$ *следует, что* $T(A) \leqslant T(B)$*.*

Доказательство. Пусть $A \leqslant B$. Тогда $B = A + C$ для некоторой $C \in M_n(\mathbf{B})$. Следовательно, $T(B) = T(A) + T(C)$, значит, $T(A) \leqslant T(B)$. $\square$

Утверждение 2.3. *Пусть* $1 < \lambda \leqslant n$*,* $T\colon M_n(\mathbf{B}) \to M_n(\mathbf{B})$ *– аддитивное отображение, строго сохраняющее множество* $\Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$*.*

а) *Пусть* $A \in M_n(\mathbf{B})$, $A \neq O$. *Тогда* $T(A) \neq O$.

б) *Пусть* $E_{ij}, E_{i'j'}$ *– различные матричные единицы. Тогда* $T(E_{ij}) \neq T(E_{i'j'})$.

Доказательство. а) Утверждение достаточно доказать для матричных единиц. Действительно, поскольку $A \neq O$, найдется матричная единица $E_{ij} \leqslant A$. Тогда если $T(A) = O$, то, согласно лемме 2.2, $T(E_{ij}) = O$.

Предположим, что существует матричная единица E_{ij} такая, что $T(E_{ij}){=}O$. Тогда рассмотрим матрицу

$$B_j = \sum_{k=1}^{n} E_{kj} \in \Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda).$$

Поскольку $T(E_{ij}) = O$, имеем: $T(B_j) = T(B_j - E_{ij})$. Однако $B_j \in \Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$, а $(B_j - E_{ij}) \notin \Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$, поскольку i-ая строка этой матрицы нулевая. Противоречие.

б) Предположим противное: $T(E_{ij}) = T(E_{i'j'})$ для некоторых индексов i, i', j, j' таких, что $(i, j) \neq (i', j')$. Вновь рассмотрим матрицу $B_j = \sum\limits_{k=1}^{n} E_{kj} \in \Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$.

Заметим, что $T(B_j) = T((B_j - E_{ij}) + E_{i'j'})$. Однако $(B_j - E_{ij}) + E_{i'j'} \notin \Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$, поскольку i-ая строка этой матрицы либо нулевая (при $i \neq i'$), либо содержит единственный ненулевой элемент, расположенный в столбце j' (при $i = i'$), но все остальные элементы столбца j' равны 0. Противоречие. □

Утверждение 2.4. *Пусть* $1 \leqslant \lambda \leqslant n$ *и* $A \in M_n(\mathbf{B}) \setminus \Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$. *Тогда* $\nu(A) \leqslant n^2 - n$.

Доказательство. Если $\nu(A) > n^2 - n$, то, по принципу Дирихле, в матрице A найдется столбец, целиком состоящий из единиц, но тогда A – λ-скрамблинг матрица. □

Лемма 2.5. *Пусть* $1 < \lambda \leqslant n$, $T \colon M_n(\mathbf{B}) \to M_n(\mathbf{B})$ *– аддитивное отображение, строго сохраняющее множество* $\Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$. *Тогда для любой матричной единицы* $X \in M_n(\mathbf{B})$ *выполнено равенство* $\nu(T(X)) = 1$. *Иначе говоря, образ любой матричной единицы есть матричная единица.*

Доказательство. В силу утверждения 2.3 а), $\nu(T(X)) \geqslant 1$. Докажем обратное неравенство.

Выберем произвольную строку i, в которой не лежит матричная единица X. Рассмотрим матрицу

$$J_{\overline{i}} = J - \sum_{j=1}^{n} E_{ij} \ \notin \Lambda_{\mathbf{B}}(n,\lambda).$$

Пронумеруем элементы множества $\mathcal{E} = \{E_{rs} \,|\, 1 \leqslant r, s \leqslant n,\ r \neq i\}$ числами $1, 2, \ldots, n^2 - n$, начиная с матричной единицы X. Таким образом, $\mathcal{E} = \{X = E_1, E_2, \ldots, E_{n^2-n}\}$. Определим последовательность матриц $\{G_k\}_{k=1}^{n^2-n}$ из $M_n(\mathbf{B})$ следующим образом: $G_k = E_1 + E_2 + \cdots + E_k$. По лемме 2.2,

$$T(X) = T(G_1) \leqslant T(G_2) \leqslant \cdots \leqslant T(G_{n^2-n}) = T(J_{\overline{i}}). \tag{1}$$

Докажем, что никакое из неравенств в (1) не может обращаться в равенство.

Предположим противное: пусть $T(G_k) = T(G_{k+1})$ при некотором $k < n^2 - n$. Тогда, поскольку $G_{k+1} = G_k + E_{k+1}$, имеем $T(G_k) = T(G_k) + T(E_{k+1})$. Пусть $E_{k+1} = E_{rs}$, где $r \neq i$. Заметим, что

$$\begin{aligned} T(E_{is} + J_{\overline{i}}) &= T(E_{is}) + T(G_k) + \sum_{\ell=k+1}^{n^2-n} T(E_\ell) \\ &= T(E_{is}) + T(G_k) + \sum_{\ell=k+2}^{n^2-n} T(E_\ell) = T(E_{is} + (J_{\overline{i}} - E_{rs})). \end{aligned} \tag{2}$$

В силу того, что s-ый столбец матрицы $(E_{is} + J_{\overline{i}})$ целиком состоит из единиц, $(E_{is} + J_{\overline{i}}) \in \Lambda_{\mathbf{B}}(n,\lambda)$. Однако $(E_{is} + (J_{\overline{i}} - E_{rs})) \notin \Lambda_{\mathbf{B}}(n,\lambda)$, поскольку даже для двух строк i и r этой матрицы соответствующего столбца из определения 1.7 не найдется. Согласно равенству (2), образы этих матриц при отображении T равны, что невозможно, так как T строго сохраняет множество $\Lambda_{\mathbf{B}}(n,\lambda)$.

Полученное противоречие означает, что все неравенства в (1) являются строгими, то есть

$$T(X) = T(G_1) < T(G_2) < \cdots < T(G_{n^2-n}) = T(J_{\overline{i}}).$$

Отсюда вытекает, что

$$\nu(T(X)) = \nu(T(G_1)) < \nu(T(G_2)) < \cdots < \nu(T(G_{n^2-n})) = \nu(T(J_{\overline{i}})). \tag{3}$$

Так как $T(J_{\overline{i}}) \notin \Lambda_{\mathbf{B}}(n,\lambda)$, по утверждению 2.4, $\nu(T(J_{\overline{i}})) \leqslant n^2 - n$. Тогда из формулы (3) следует, что $\nu(T(X)) \leqslant 1$. □

Теорема 2.6. *Пусть* $1 < \lambda \leqslant n$ *и* $T\colon M_n(\mathbf{B}) \to M_n(\mathbf{B})$ *– аддитивное отображение, строго сохраняющее множество* $\Lambda_{\mathbf{B}}(n,\lambda)$*. Тогда* T *– биекция.*

Доказательство. По лемме 2.5, отображение T переводит матричные единицы в матричные единицы. По утверждению 2.3 б), T инъективно на множестве матричных единиц. Ввиду конечности этого множества, отображение T биективно на множестве матричных единиц. Кроме того, из аддитивности T следует, что $T(O) = O$. Следовательно, T – биекция. □

Заметим, что утверждение теоремы 2.6 неверно для аддитивных отображений, сохраняющих множество $\Lambda_{\mathbf{B}}(n,\lambda)$.

Пример 2.7. Действительно, рассмотрим фиксированную матрицу $L \in \Lambda_{\mathbf{B}}(n,\lambda)$ и определим: $T(A) = L$ для всех $A \in M_n(\mathbf{B})$. Это аддитивное отображение, сохраняющее $\Lambda_{\mathbf{B}}(n,\lambda)$, но оно отнюдь не биективно.

При $\lambda = 1$ утверждение теоремы 2.6 также неверно.

Пример 2.8. Определим отображение T на множестве всех матричных единиц, полагая $T(E_{ij}) = E_{i1}$. Продолжим T по аддитивности на все матрицы из $M_n(\mathbf{B})$. Легко видеть, что полученное отображение строго сохраняет $\Lambda_{\mathbf{B}}(n,1)$, но оно отнюдь не биективно.

В качестве прямого следствия теорем 1.9 и 2.6 мы получаем полное описание аддитивных отображений, строго сохраняющих множество $\Lambda_{\mathbf{B}}(n,\lambda)$.

Теорема 2.9. *Пусть* $n \geqslant 2$*,* $1 < \lambda \leqslant n$ *и* $T\colon M_n(\mathbf{B}) \to M_n(\mathbf{B})$ *– аддитивное отображение. Тогда* T *строго сохраняет множество* $\Lambda_{\mathbf{B}}(n,\lambda)$ *в том и только том случае, когда*

а) *при* $\lambda < n$*: найдутся перестановочные матрицы* P *и* Q *порядка* n *такие, что* $T(A) = PAQ$ *для всех* $A \in M_n(\mathbf{B})$*;*

б) *при* $\lambda = n$*: найдутся перестановки* $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in S_n$ *такие, что* $T(E_{ij}) = E_{\sigma_j(i),\tau(j)}$ *для всех* $1 \leqslant i, j \leqslant n$*.*

§3. Обобщение на антинегативные полукольца

С помощью стандартной техники (см., например, [17, раздел 4]) теорему 2.9 можно распространить на произвольное антинегативное коммутативное полукольцо $\mathscr{S}$ с 1 и без делителей нуля.

Определение 3.1. *Шаблоном матрицы* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathscr{S})$ *назовем матрицу* $\overline{A} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbf{B})$ *такую, что* $\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } a_{ij} = 0; \\ 1, & \text{если } a_{ij} \neq 0. \end{cases}$

Замечание. Непосредственно проверяется, что для $A, B \in M_n(\mathscr{S})$ выполнены соотношения $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

Определение 3.2. *Пусть* $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$ *– аддитивное отображение. Определим его шаблон* $\overline{T}$ *как такое аддитивное отображение* $M_n(\mathbf{B})$ *в себя, что* $\overline{T}(\overline{E_{ij}}) = \overline{T(E_{ij})}$ *для всех* $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $\overline{T}(\overline{O}) = \overline{T(O)}$.

Следующие две леммы доказываются непосредственной проверкой (см. также [18, лемма 4.4] и [20, лемма 4.6]).

Лемма 3.3. *Для любого линейного отображения* $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$ *и матрицы* $A \in M_n(\mathscr{S})$ *имеем* $\overline{T}(\overline{A}) = \overline{T(A)}$.

Лемма 3.4. *Пусть* $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$ *– линейное отображение,* $1 \leqslant \lambda \leqslant n$. *Тогда* T *строго сохраняет множество* $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda)$, *если и только если* $\overline{T}$ *строго сохраняет множество* $\Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$.

Определение 3.5. *Пусть* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathscr{S})$. *Обозначим через* $A \circ B$ *произведение Адамара матриц* A *и* B, *то есть такую матрицу* $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathscr{S})$, *что* $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 2.9 на произвольные антинегативные коммутативные полукольца с 1 и без делителей нуля.

Теорема 3.6. *Пусть* $n \geqslant 2$, $1 < \lambda \leqslant n$ *и* $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$ *– линейное отображение. Тогда* T *строго сохраняет множество* $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda)$ *в том и только том случае, когда*

а) при $\lambda < n$: *найдутся перестановочные матрицы* P *и* Q *порядка* n *и матрица* $B \in M_n(\mathscr{S})$, *все элементы которой отличны от* 0, *такие, что* $T(A) = P(A \circ B)Q$ *для всех* $A \in M_n(\mathscr{S})$;

б) при $\lambda = n$: *найдутся перестановки* $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in S_n$ *такие, что для всех* $1 \leqslant i, j \leqslant n$ $T(E_{ij}) = b_{ij} E_{\sigma_j(i), \tau(j)}$, *где* $b_{ij} \in \mathscr{S} \setminus \{0\}$.

Доказательство. *Необходимость.* По лемме 3.4, $\overline{T}$ строго сохраняет множество $\Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$. Применим к отображению $\overline{T}$ теорему 2.9.

а) По теореме 2.9 а), найдутся перестановочные матрицы $\overline{P}, \overline{Q} \in M_n(\mathbf{B})$ такие, что для произвольной матрицы $A \in M_n(\mathscr{S})$ имеем $\overline{T}(\overline{A}) =$

$\overline{P}\,\overline{A}\,\overline{Q} = \overline{PAQ}$. Подставляя вместо A все матричные единицы E_{ij}, получаем: $\overline{T(E_{ij})} = \overline{T}(\overline{E_{ij}}) = \overline{PE_{ij}Q}$. Следовательно, $T(E_{ij}) = b_{ij}PE_{ij}Q$ для некоторого $b_{ij} \in \mathscr{S} \setminus \{0\}$. Пусть $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathscr{S})$.

Произвольная матрица $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathscr{S})$ представляется в виде $A = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$. Ввиду линейности T, получаем:

$$T(A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}T(E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}PE_{ij}Q$$
$$= P\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}E_{ij}\right)Q = P(A \circ B)Q.$$

б) По теореме 2.9 б), найдутся перестановки $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in S_n$ такие, что для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ выполнено $\overline{T(E_{ij})} = \overline{T}(\overline{E_{ij}}) = \overline{E_{\sigma_j(i),\tau(j)}}$. Значит, $T(E_{ij}) = b_{ij}E_{\sigma_j(i),\tau(j)}$ при некотором $b_{ij} \in \mathscr{S} \setminus \{0\}$.

Достаточность. а) Непосредственная проверка показывает, что отображение $T(A) = P(A \circ B)Q$ является линейным. Кроме того,

$$\overline{T}(\overline{A}) = \overline{T(A)} = \overline{P(A \circ B)Q} = \overline{P}\,\overline{A}\,\overline{Q} \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathscr{S}),$$

поскольку все элементы матрицы B отличны от нуля и в $\mathscr{S}$ нет делителей нуля. Значит, по теореме 2.9, отображение $\overline{T}$ строго сохраняет множество $\Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$. Следовательно, по лемме 3.4, T строго сохраняет множество $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda)$.

б) Аналогично устанавливается, что $\overline{T}$ строго сохраняет множество $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda)$, и применяется лемма 3.4. □

Замечание. Отображение из пункта а) теоремы 3.6 является частным случаем отображения из пункта б) этой же теоремы при $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n$. Действительно, пусть

$$P = \sum_{k=1}^{n} E_{\sigma(k),k}, \;\; Q = \sum_{\ell=1}^{n} E_{\ell,\tau(\ell)}$$

для некоторых $\sigma, \tau \in S_n$. Пусть также $B = (b_{k\ell}) \in M_n(\mathscr{S})$. Тогда

$$T(E_{ij}) = P(E_{ij} \circ B)Q = b_{ij}E_{\sigma(i),\tau(j)}.$$

Утверждение 3.7. *Пусть $n \geqslant 1$ и $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$ – линейное отображение. Пусть существуют перестановки $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in S_n$*

такие, что для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ выполнены условия

$$T(E_{ij}) = b_{ij} E_{\sigma_j(i),\tau(j)}, \quad \textit{где } b_{ij} \in \mathscr{S} \setminus \{0\}.$$

Тогда отображение T инъективно на множестве матричных единиц.

Доказательство. Предположим противное: $T(E_{ij}) = T(E_{i'j'})$ для некоторых индексов i, i', j, j' таких, что $(i, j) \neq (i', j')$. Тогда

$$b_{ij} E_{\sigma_j(i),\tau(j)} = b_{i'j'} E_{\sigma_{j'}(i'),\tau(j')}.$$

Значит, $(\sigma_j(i), \tau(j)) = (\sigma_{j'}(i'), \tau(j'))$. Из равенства вторых компонент следует, что $j = j'$, но тогда, из равенства первых компонент, $i = i'$. Противоречие. □

Как показывает следующий пример, отображения из пунктов а) и б) теоремы 3.6 могут не быть биективными (и даже инъективными) на всем $M_n(\mathscr{S})$.

Пример 3.8. Пусть $n \geqslant 1$ и $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$ – линейное отображение. Пусть существуют перестановки $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in S_n$ такие, что для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$

$$T(E_{ij}) = b_{ij} E_{\sigma_j(i),\tau(j)}, \quad \text{где } b_{ij} \in \mathscr{S} \setminus \{0\}.$$

• При $\mathscr{S} = \langle [0,1], \max, \min \rangle$ и $b_{ij} = 1/2$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n$ отображение T не инъективно, так как для произвольных i, j имеет место равенство $T(E_{ij}) = T(\alpha E_{ij})$, $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

• При $\mathscr{S} = \langle \mathbb{Z}_+, +, \cdot \rangle$ и $b_{ij} = 2$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n$ отображение T не сюръективно, поскольку в образе T содержатся только те матрицы, все элементы которых четны.

Пример 3.9. По аналогии с примером 2.7, теорема 3.6 перестает быть верной, если условие строгого сохранения множества $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda)$ заменить на условие сохранения того же множества. Действительно, пусть $L \in \Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda)$ – произвольная матрица ($1 < \lambda \leqslant n$). Положим $T(E_{ij}) = L$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Продолжив T по линейности на все $M_n(\mathscr{S})$, получим линейное отображение, сохраняющее множество $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda)$, но не удовлетворяющее условиям теоремы 3.6, поскольку оно не инъективно на множестве матричных единиц (см. утверждение 3.7).

Автор выражает благодарность А. Э. Гутерману за ценные обсуждения.

Список литературы

1. M. Akelbek, S. Kirkland, *Coefficients of ergodicity and scrambling index.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 1111–1130.
2. Y. Huang, B. Liu, *Generalized scrambling indices of a primitive digraph.* — Linear Algebra Appl. **433** (2010), 1798–1808.
3. A. Paz, *Introduction to Probabilistic Automata*. Academic Press, New York, 1971.
4. E. Seneta, *Nonnegative Matrices and Markov Chains*. Springer-Verlag, New York, 1981.
5. G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen.* — Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015.
6. S. Pierce and others, *A survey of linear preserver problems.* — Linear Multilinear Algebra **33** (1992), 1–119.
7. P. Šemrl, *Endomorphisms of the poset of idempotent matrices.* — J. Algebra **536** (2019), 1–38.
8. S. Mohtashami, A. Salemi, M. Soleymani, *Linear preservers of circulant majorization on rectangular matrices.* — Linear Multilinear Algebra **67**, No. 8 (2019), 1554–1560.
9. М. В. Будревич, А. Э. Гутерман, М. А. Даффнер, *Линейные отображения кососимметрических матриц, сохраняющие перманент* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 31–43.
10. A. Guterman, M. Johnson, M. Kambites, *Linear isomorphisms preserving Green's relations for matrices over anti-negative semifields.* — Linear Algebra Appl. **545** (2018), 1–14.
11. L. B. Beasley, P. Mohindru, R. Pereira, *Preservers of completely positive matrix rank for inclines.* — Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **42**, No. 2 (2019), 437–447.
12. J.-T. Chan, K. Chan, Choi-Nai, C. Tu, *The cone of nonnegative c-numerical range and its preservers.* — Linear Algebra Appl. **564** (2019), 225–235.
13. L. B. Beasley, J. H. Kim, S.-Z. Song, *Linear operators that preserve the genus of a graph.* — Mathematics **7** (2019), 312.
14. C. Costara, *Nonlinear determinant preserving maps on matrix algebras.* — Linear Algebra Appl. **583** (2019), 165–170.
15. F. Akbarzadeh, A. Armandnejad, *On row-sum majorization.* — Czech. Math. J. (2019). DOI: 10.21136/CMJ.2019.0084-18
16. L. Catalano, *On maps preserving products equal to a rank-one idempotent.* — Linear Multilinear Algebra (2019). DOI: 10.1080/03081087.2019.1614518
17. A. E. Guterman, A. M. Maksaev, *Preserving λ-scrambling matrices.* — Fund. Informaticae **162** (2018), 119–141.
18. A. E. Guterman, A. M. Maksaev, *Maps preserving scrambling index.* — Linear Multilinear Algebra **66**, No. 4 (2018), 840–859.
19. A. E. Guterman, A. M. Maksaev, *Additive maps preserving the scrambling index are bijective.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **84**, No. 1-2 (2018), 19–38.
20. A. E. Guterman, A. M. Maksaev, *Maps preserving matrices of extremal scrambling index.* — Special Matrices **6** (2018), 166–179.

Maksaev A. M. Maps that strongly preserve λ-scrambling matrices.

In this paper, it is proved that for $\lambda > 1$, an additive map that strongly preserves the set of λ-scrambling matrices over $\mathbf{B}$ is a bijection. The general form of such a map over any antinegative commutative semiring with identity and without zero divisors is characterized.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Москва 119991; Московский
физико-технический институт,
Долгопрудный 141701, Россия
E-mail: artmak95@mail.ru

Поступило 8 октября 2019 г.