

Е. К. Куликов, А. А. Макаров

О КВАДРАТИЧНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ СПЛАЙНАХ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Геометрическое моделирование широко используется при разработке систем автоматизированного проектирования и связано с построением кривых и поверхностей по ограниченной информации. В таких системах де-факто при построении кривых стандартом являются методы, основанные на использовании кривых Безье или NURBS-кривых. Однако используемые базисы не могут точно представить, например, трансцендентные кривые, часто используемые в прикладном проектировании. В связи с этим изучаются сплайн-функции, обладающие основными свойствами B -сплайнов, среди которых известны минимальные сплайны, GB -сплайны и др. (подробнее см. [1, 2]).

Минимальные сплайны лагранжева типа, получаемые из тождеств, называемых аппроксимационными соотношениями, как правило, рассматриваются на сетках с простыми (различными) узлами [3], что не всегда удобно в практических приложениях (см., например, [4, 5]).

Целью данной работы является построение квадратичных минимальных сплайнов на неравномерных сетках с кратными узлами. В работе получены асимптотические представления для нормализованных сплайнов. В зависимости от кратности узлов сетки установлено, к какому классу непрерывности относится изучаемая сплайн-функция. Результаты проиллюстрированы на примере гиперболических и тригонометрических минимальных сплайнов.

Ключевые слова: минимальные сплайны, гиперболические сплайны, тригонометрические сплайны, асимптотика сплайн-функций, сетки с кратными узлами.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (МД-2242.2019.9).

§2. ПРОСТРАНСТВО КВАДРАТИЧНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Пусть \mathbb{Z} – множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+ := \{j \mid j \geq 0, j \in \mathbb{Z}\}$, \mathbb{R}^1 – множество вещественных чисел. Векторное (линейное) пространство трехмерных вектор-столбцов обозначим через \mathbb{R}^3 , причем векторы в нем будут отождествляться с одностолбцовыми матрицами и к ним будут применяться обычные матричные операции; в частности, для пары векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ выражение $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ представляет собой евклидово скалярное произведение этих векторов. Квадратная матрица, столбцами которой являются векторы $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ (в указанном порядке), обозначается символом $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, а выражение $\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ обозначает ее определитель. Компоненты векторов обозначаются квадратными скобками и нумеруются целыми числами; например, $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, [\mathbf{a}]_2)^T$. Для любого $S \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначение $C^S[a, b] := \{u \mid u^{(i)} \in C[a, b], i = 0, 1, \dots, S\}$, полагая $C^0[a, b] := C[a, b]$. Будем писать $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^S[a, b]$, если компоненты вектор-функции $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемы S раз на отрезке $[a, b]$. Пространство кусочно-непрерывных функций с конечным числом разрывов первого рода на отрезке $[a, b]$ обозначим через $C^{-1}[a, b]$; при этом будем считать, что каждая функция этого пространства непрерывна слева.

На отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (1)$$

В случае необходимости будем считать, что рассматриваемая сетка продолжена за отрезок $[a, b]$ с некоторым фиксированным шагом. Обозначим характеристику мелкости сетки через $h_X := \sup_{j \in \mathbb{Z}} (x_{j+1} - x_j)$.

Введем обозначение $J_{i,k} := \{i, i+1, \dots, k\}, i, k \in \mathbb{Z}, i < k$. Упорядоченное множество $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{-2, n-1}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3$ будем называть *цепочкой векторов*. Цепочка \mathbf{A} называется *полной* цепочкой векторов, если $\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0$ для всех $j \in J_{0, n-1}$.

Введем обозначения для объединения элементарных сеточных интервалов $M := \cup_{j \in J_{0, n-1}} (x_j, x_{j+1})$. Пусть $\mathbb{X}(M)$ – линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M . Пусть $S_j := [x_j, x_{j+3}], j \in J_{-2, n-1}$.

Рассмотрим вектор-функцию $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ с элементами из пространства $\mathbf{C}^2[a, b]$ и ненулевым вронскианом $W(t)$:

$$W(t) := \det(\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]. \quad (2)$$

Пусть \mathbf{A} – полная цепочка векторов. Предположим, что функции $\omega_j \in \mathbb{X}(M)$, $j \in J_{-2, n-1}$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \sum_{j'=k-2}^k \mathbf{a}_{j'} \omega_{j'}(t) &\equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \forall k \in J_{0, n-1}, \\ \omega_j(t) &\equiv 0 \quad \forall t \in M \setminus S_j, \forall j \in J_{-2, n-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для всякого фиксированного $t \in (x_k, x_{k+1})$ и произвольного $k \in J_{0, n-1}$ соотношения (3) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Ввиду полноты цепочки векторов \mathbf{A} , система (3) имеет единственное решение. По формулам Крамера находим

$$\begin{aligned} \omega_j(t) &= \frac{\det\left(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j' \in J_{k-2, k}, j' \neq j} \parallel {}^{tj} \varphi(t)\right)}{\det\left(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k\right)} \\ &\quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \quad \forall j \in J_{k-2, k}, \end{aligned}$$

где символьная запись $\parallel {}^{tj}$ означает, что определитель в числителе получается из определителя в знаменателе заменой столбца \mathbf{a}_j на столбец $\varphi(t)$ (с сохранением прежнего порядка следования столбцов). Отсюда также следует, что $\text{supp } \omega_j \subset S_j$.

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$ называется *пространством квадратичных минимальных координатных (\mathbf{A}, φ) -сплайнов*, которое мы будем обозначать через $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \varphi)$. Тожества (3) называются *аппроксимационными соотношениями*. Вектор-функция φ называется *порождающей*.

Для вектор-функции $\varphi \in \mathbf{C}^1[a, b]$ положим

$$\varphi_j := \varphi(x_j), \quad \varphi'_j := \varphi'(x_j), \quad j \in J_{-2, n+2},$$

и рассмотрим векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^3$, задаваемые тождеством

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{x} \equiv \det(\varphi_j, \varphi'_j, \varphi''_j, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Определим цепочку векторов $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_j^N\}_{j \in J_{-2, n-1}}$ формулой

$$\mathbf{a}_j^N := \varphi_{j+1} - \alpha_{j+1} \varphi'_{j+1}, \quad (4)$$

где $\alpha_{j+1} := \frac{\mathbf{d}_{j+2}^T \varphi_{j+1}}{\mathbf{d}_{j+2}^T \varphi'_{j+1}}$.

Известно [3], что если выполнено условие

$$|W(t)| \geq c = \text{const} > 0 \quad \forall t \in [a, b],$$

то при достаточно малом h_X цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j^N\}, j \in J_{0, n-1}$, является полной, и $\omega_j \in C^1[a, b]$ для каждого $j \in J_{-2, n-1}$. Более того, если $[\varphi(t)]_0 \equiv 1$, то справедливо свойство *разбиения единицы*:

$$\sum_{j=-2}^{n-1} \omega_j(t) \equiv 1 \quad \forall t \in [a, b].$$

В этом случае функции $\omega_j(t)$ называются *нормализованными квадратичными минимальными координатными B_φ -сплайнами*. При этом справедлива следующая теорема [6].

Теорема 1. *Функция $\omega_j \in C^1[a, b]$ и ее производная представимы формулами ($i = 0, 1$):*

$$\omega_j^{(i)}(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T \varphi^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N}, \quad t \in [x_j, x_{j+1}), \quad (5)$$

$$\omega_j^{(i)}(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T \varphi^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} - \frac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^N \mathbf{d}_{j+1}^T \varphi^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N \mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N}, \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \quad (6)$$

$$\omega_j^{(i)}(t) = \frac{\mathbf{d}_{j+3}^T \varphi^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^N}, \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \quad (7)$$

Замечание 1. Для $\varphi(t) := (1, t, t^2)^T$ функции $\omega_j(t)$ совпадают с известными квадратичными полиномиальными B -сплайнами (третьего порядка) $\omega_j^B(t)$ (см. [7]):

$$\omega_j^B(t) = \begin{cases} \frac{(t-x_j)^2}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \frac{1}{x_{j+1}-x_j} \left[\frac{(t-x_j)^2}{x_{j+2}-x_j} - \frac{(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1})} \right], & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \frac{(t-x_{j+3})^2}{(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2})}, & t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases} \quad (8)$$

§3. О НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

Будем рассматривать класс сеток вида (1) со свойством *локальной квазиравномерности*:

$$K_0^{-1} \leq \frac{x_{j+1} - x_j}{x_j - x_{j-1}} \leq K_0, \quad K_0 \geq 1, \quad K_0 \in \mathbb{R}^1, \quad j \in J_{-2, n+2}.$$

Пусть $h_j := x_{j+1} - x_j$ и $h := \max_j \{h_j\}$, $j \in J_{-2, n+1}$. Предположим, что $h \rightarrow +0$. Будем использовать обозначения $o(1)$ и $\mathbf{o}(1)$ для бесконечно малых при $h \rightarrow 0$, т. е. $o(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ и $\mathbf{o}(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathbf{0}$, соответственно.

Далее потребуются разложение вектор-функций $\varphi^{(s)}(t)$, $s = 0, 1$, по формуле Тейлора:

$$\varphi^{(s)}(t) = \sum_{i=s}^2 \frac{(t - x_{j+k})^{i-s}}{(i-s)!} \varphi_{j+k}^{(i)} + (t - x_{j+k})^{2-s} \mathbf{o}(1). \quad (9)$$

Рассмотрим выражение $\mathbf{d}_{j+k}^T \varphi^{(s)}(t) = \det(\varphi_{j+k}, \varphi'_{j+k}, \varphi^{(s)}(t))$, которое, с учетом формулы (9) и свойств аддитивности и линейности определителя относительно столбца, а также того факта, что определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю, принимает вид

$$\mathbf{d}_{j+k}^T \varphi^{(s)}(t) = \frac{(t - x_{j+k})^{2-s}}{(2-s)!} (W_{j+k} + o(1)), \quad (10)$$

где через W_{j+k} обозначен вронскиан (2), вычисленный при $t = x_{j+k}$.

Ясно, что для $t = x_{j+p}$ предыдущая формула принимает вид

$$\mathbf{d}_{j+k}^T \varphi_{j+p}^{(s)} = \frac{(x_{j+p} - x_{j+k})^{2-s}}{(2-s)!} (W_{j+k} + o(1)). \quad (11)$$

Теорема 2. Для вектора \mathbf{a}_j^N вида (4) справедливо асимптотическое представление

$$\mathbf{a}_j^N = \varphi_{j+1} + \frac{h_{j+1}}{2} \varphi'_{j+1} + h_{j+1} \mathbf{o}(1). \quad (12)$$

Доказательство. Используя в формуле (11) значения $s = 0, k = 2, p = 1$ и $s = 1, k = 2, p = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{j+2}^T \varphi_{j+1} &= \frac{(x_{j+1} - x_{j+2})^2}{2} (W_{j+2} + o(1)), \\ \mathbf{d}_{j+2}^T \varphi'_{j+1} &= (x_{j+1} - x_{j+2}) (W_{j+2} + o(1)), \end{aligned}$$

откуда находим

$$\alpha_{j+1} = -\frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}(1 + o(1)). \quad (13)$$

Подставляя полученное выражение в представление (4) и учитывая равенство $h_{j+1} = x_{j+2} - x_{j+1}$, приходим к искомому разложению (12). \square

В силу представления (4), выражение

$$\mathbf{d}_{j+k}^T \mathbf{a}_{j+p-1}^N = \det(\varphi_{j+k}, \varphi'_{j+k}, \varphi_{j+p} - \alpha_{j+p} \varphi'_{j+p})$$

элементарными преобразованиями над столбцами приводится к виду

$$\mathbf{d}_{j+k}^T \mathbf{a}_{j+p-1}^N = \mathbf{d}_{j+k}^T \varphi_{j+p} - \alpha_{j+p} \mathbf{d}_{j+k}^T \varphi'_{j+p}.$$

Теперь, используя формулы (11) и (13), находим

$$\mathbf{d}_{j+k}^T \mathbf{a}_{j+p-1}^N = \frac{(x_{j+p+1} - x_{j+k})(x_{j+p} - x_{j+k})}{2} (W_{j+k} + o(1)). \quad (14)$$

Теорема 3. Для функции $\omega_j(t)$ вида (5)–(7) справедливо асимптотическое представление

$$\omega_j(t) = \frac{(t - x_j)^2}{h_j(h_j + h_{j+1})} (1 + o(1)), \quad t \in [x_j, x_{j+1}], \quad (15)$$

$$\omega_j(t) = \frac{1}{h_j} \left(\frac{(t - x_j)^2}{h_j + h_{j+1}} - \frac{(h_j + h_{j+1} + h_{j+2})(t - x_{j+1})^2}{h_{j+1}(h_{j+1} + h_{j+2})} \right) (1 + o(1)),$$

$$t \in [x_{j+1}, x_{j+2}], \quad (16)$$

$$\omega_j(t) = \frac{(t - x_{j+3})^2}{h_{j+2}(h_{j+1} + h_{j+2})} (1 + o(1)), \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}]. \quad (17)$$

Доказательство. Из (10) при $k = 0, s = 0$, находим

$$\mathbf{d}_j^T \varphi(t) = \frac{(t - x_j)^2}{2} (W_j + o(1)).$$

Из (14) при $k = 0, p = 1$, получаем

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N = \frac{(x_{j+2} - x_j)(x_{j+1} - x_j)}{2} (W_j + o(1)). \quad (18)$$

Учитывая равенства $h_j = x_{j+1} - x_j$ и $x_{j+2} - x_j = h_j + h_{j+1}$, имеем

$$\frac{\mathbf{d}_j^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} = \frac{(t - x_j)^2}{h_j(h_j + h_{j+1})} (1 + o(1)). \quad (19)$$

Теперь из представления (5) и (19) находим (15).

Из (19) ясно, что

$$\frac{\mathbf{d}_{j+1}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N} = \frac{(t - x_{j+1})^2}{h_{j+1}(h_{j+1} + h_{j+2})} (1 + o(1)). \quad (20)$$

Из равенства (14) при $k = 0$, $p = 2$ и представления (18) имеем

$$\frac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^N}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} = \frac{h_j + h_{j+1} + h_{j+2}}{h_j} (1 + o(1)). \quad (21)$$

Подставляя значения (19)–(21) в выражение (6), получаем представление (16).

Наконец, подставляя формулу (10) при $k = 3$, $s = 0$ и формулу (14) при $k = 3$, $p = 1$ в выражение (7), находим представление (17). \square

Замечание 2. Главная часть асимптотики в (15)–(17) совпадает с представлением B -сплайна (8) (ср. [8]).

§4. О СПЛАЙНАХ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ

На отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим расширенную сетку X_n :

$$x_{-2} \leq x_{-1} \leq a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b \leq x_{n+1} \leq x_{n+2}. \quad (22)$$

Узлы сетки (22), значения которых совпадают, называются *кратными*. Если узел x_j в сетке X_n встречается k раз, т.е. $x_j = x_{j+1} = \dots = x_{j+k-1}$, то он имеет кратность k .

Теорема 4. В узлах кратности 2 функция ω_j принадлежит пространству $C[a, b]$; при этом

- (1) если $x_j = x_{j+1} < x_{j+2} < x_{j+3}$, то $\omega_j(x_j) = 0$;
- (2) если $x_j < x_{j+1} < x_{j+2} = x_{j+3}$, то $\omega_j(x_{j+2}) = 0$;
- (3) если $x_j = x_{j+1} < x_{j+2} = x_{j+3}$, то $\omega_j(x_j) = 0$ и $\omega_j(x_{j+2}) = 0$;
- (4) если $x_j < x_{j+1} = x_{j+2} < x_{j+3}$, то $\omega_j(x_{j+1}) = 1$.

Доказательство. Ясно, что $\omega_j(x_j - 0) = 0$. Ввиду формулы (6) и представления (16), справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \omega_j(x_j + 0) &= \lim_{t \rightarrow x_{j+1} + 0} \frac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} - \frac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^N}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} \frac{\mathbf{d}_{j+1}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N} \\ &= \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} (1 + o(1)) = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что в узле x_j функция ω_j непрерывно продолжима, причем выполнено утверждение 1 теоремы.

Утверждение 2 теоремы доказывается аналогичным образом, а утверждение 3 является следствием установленных выше утверждений 1 и 2.

Из соотношений (5) и (19) получаем

$$\omega_j(x_{j+1} - 0) = \lim_{t \rightarrow x_{j+1} - 0} \frac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} = \lim_{h_{j+1} \rightarrow 0} \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} (1 + o(1)) = 1. \quad (23)$$

Из представления (7) и формулы (11) при $s = 0, k = 3, p = 2$, а также формулы (14) при $k = 3, p = 1$ имеем

$$\omega_j(x_{j+1} + 0) = \lim_{t \rightarrow x_{j+1} + 0} \frac{\mathbf{d}_{j+3}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^N} = \lim_{h_{j+1} \rightarrow 0} \frac{h_{j+2}}{h_{j+1} + h_{j+2}} (1 + o(1)) = 1. \quad (24)$$

Отсюда видно, что в узле x_{j+1} функция ω_j непрерывно продолжима, при этом выполнено утверждение 4 теоремы. \square

Теорема 5. В узлах кратности 3 функция ω_j принадлежит пространству $C^{-1}[a, b]$; при этом

- (1) если $x_j < x_{j+1} = x_{j+2} = x_{j+3}$, то $\omega_j(x_{j+1} - 0) = 1$;
- (2) если $x_j = x_{j+1} = x_{j+2} < x_{j+3}$, то $\omega_j(x_j + 0) = 1$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 теоремы непосредственно вытекают из представлений (23) и (24) соответственно. \square

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)^T$. Тогда формулы (5)–(7) для построения гиперболического сплайна $\omega_j^H(t)$ имеют вид:

$$\omega_j^H(t) = \frac{\operatorname{ch} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{t-x_j}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{x_{j+1}-x_j}{2} \operatorname{sh} \frac{x_{j+2}-x_j}{2}}, \quad t \in [x_j, x_{j+1}),$$

$$\omega_j^H(t) = \frac{\operatorname{ch} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x_{j+1}-x_j}{2}} \left(\frac{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{t-x_j}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{x_{j+2}-x_j}{2}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{x_{j+3}-x_j}{2} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{t-x_{j+1}}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2} \operatorname{sh} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} \right),$$

$$t \in [x_{j+1}, x_{j+2}),$$

$$\omega_j^H(t) = \frac{\operatorname{ch} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{x_{j+3}-t}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2} \operatorname{sh} \frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2}}, \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}).$$

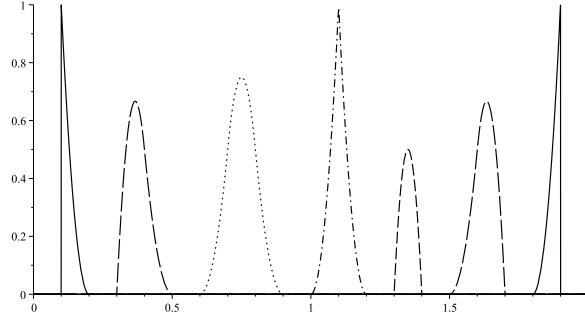


Рис. 1. Графики гиперболических сплайнов с узлами различной кратности.

Гиперболические сплайны неотрицательны вне зависимости от шага сетки (см. [9]). На рис. 1 приведены их графики для узлов различной кратности. Сплайн с простыми узлами изображен точечной линией, сплайн с крайним узлом двойной кратности – длинной пунктирной линией, сплайн с обоими крайними узлами двойной кратности – пунктирной линией, сплайн с центральным узлом двойной кратности – точечно-пунктирной линией, сплайн с узлом тройной кратности – сплошной линией.

Пусть $\varphi(t) := (1, \sin t, \cos t)^T$. Тогда формулы (5)–(7) для построения тригонометрического сплайна $\omega_j^T(t)$ имеют вид:

$$\omega_j^T(t) = \frac{\cos \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \sin^2 \left(\frac{t-x_j}{2} \right)}{\sin \frac{x_{j+1}-x_j}{2} \sin \frac{x_{j+2}-x_j}{2}}, \quad t \in [x_j, x_{j+1}),$$

$$\omega_j^T(t) = \frac{\cos \frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}}{\sin \frac{x_{j+1}-x_j}{2}} \left(\frac{\sin^2 \left(\frac{t-x_j}{2} \right)}{\sin \frac{x_{j+2}-x_j}{2}} - \frac{\sin \frac{x_{j+3}-x_j}{2} \sin^2 \left(\frac{t-x_{j+1}}{2} \right)}{\sin \frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2} \sin \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} \right),$$

$$t \in [x_{j+1}, x_{j+2}),$$

$$\omega_j^T(t) = \frac{\cos \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \sin^2 \left(\frac{t-x_{j+3}}{2} \right)}{\sin \frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2} \sin \frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2}}, \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}).$$

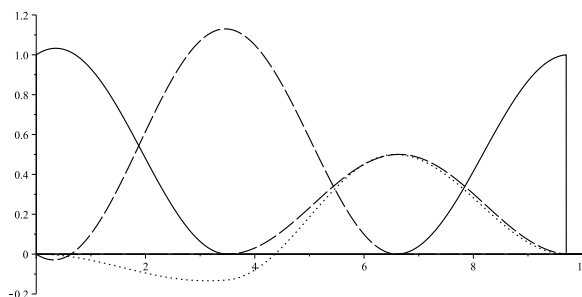


Рис. 2. Графики тригонометрических сплайнов с узлами различной кратности.

В отличие от функций $\omega_j^H(t)$, тригонометрические сплайны неотрицательны при условии, что шаг сетки меньше π (см. [10]). Их графики на сетке с узлами $\{0, 0, 0, 3.5, 6.6, 9.7, 9.7, 9.7\}$ приведены на рис. 2. Сплайн с простыми узлами изображен точечной линией, сплайн с крайним узлом двойной кратности – длинной пунктирной линией, сплайн с узлом тройной кратности – сплошной линией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. К. Демьянович, *Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны*. СПб., Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1994.
2. Б. И. Квасов, *Методы изогометрической аппроксимации сплайнами*. М., Физматлит, 2006.
3. А. А. Макаров, *О построении сплайнов максимальной гладкости*. — Пробл. матем. анал. **60** (2011), 25–38.
4. J. A. Cottrel, T. G. R. Hughes, Yu. Bazilevs, *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons, 2009.
5. T. Lyche, C. Manni, H. Speleers, *Foundations of spline theory: B-splines, spline approximation, and hierarchical refinement*. — Lect. Notes Math. **2219** (2018), 1–76.
6. А. А. Макаров, *О двойственных функционалах к минимальным сплайнам*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 198–218.
7. O. Kosogorov, A. Makarov, *On some piecewise quadratic spline functions*. — Lect. Notes Computer Sci. **10187** (2017), 448–455.
8. Ю. К. Демьянович, *Об асимптотических разложениях координатных сплайнов*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 17–30.
9. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *Об аппроксимации гиперболическими сплайнами*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 179–194.

10. Ю. К. Демьянович, А. А. Макаров, *Необходимые и достаточные условия неотрицательности координатных тригонометрических сплайнов второго порядка*. — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. **4**, Вып. 1 (2017), 9–16.

Kulikov E. K, Makarov A. A. Quadratic minimal splines with multiple nodes.

The paper studies quadratic minimal splines on nonuniform grids with multiple nodes on a closed interval. Asymptotic representations for normalized splines are obtained. In dependence of the multiplicity of grid nodes, it is established to which class of continuity the spline functions under consideration belong. The results obtained are illustrated with examples of hyperbolic and trigonometric minimal splines.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская набережная, 7/9,
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: egor.k.kulikov@gmail.com
E-mail: a.a.makarov@spbu.ru

Поступило 1 октября 2019 г.