Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

Л. Ю. Колотилина

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ОБРАТНЫХ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ СТРУКТУРЫ РАЗРЕЖЕННОСТИ МАТРИЦ

§1. Введение

В последние годы активно исследовалась задача получения верхних оценок обратных матриц в норме l_∞, см., например, [1–6, 8–9, 13–16, 20–22, 24]. С этой целью были разработаны различные подходы, которые применялись к матрицам из различных классов. В этой работе мы используем технологичный подход, недавно предложенный в работах [20, 21]. Этот подход основан на следующем результате, см., например, [20,26], доказательство которого приведено ниже для полноты изложения.

Лемма 1.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – невырожденная матрица. Тогда существует такой вектор $x \in \mathbb{C}^n$, что $\|x\|_\infty = 1$ и*

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} = \|Ax\|_\infty = \max_{i\in\langle n\rangle} |(Ax)_i|. \tag{1.1}$$

Доказательство. Поскольку

$$\|A^{-1}\|_\infty = \sup_{y\neq 0} \frac{\|A^{-1}y\|_\infty}{\|y\|_\infty},$$

то

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} = \inf_{z\neq 0} \frac{\|Az\|_\infty}{\|z\|_\infty} = \min_{\|z\|_\infty=1} \|Az\|_\infty = \max_{i\in\langle n\rangle} |(Ax)_i|,$$

где $x \in \mathbb{C}^n$ и $\|x\|_\infty = 1$. □

В данной работе, в частности, мы рассматриваем некоторые известные и новые матричные классы, которые являются подклассами класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц и содержат класс {SDD} (Strictly Diagonally Dominant) матриц со строгим диагональным преобладанием. Для матриц из рассматриваемых классов получены новые верхние оценки бесконечной нормы их обратных. Особенность полученных

Ключевые слова: обратная матрица, норма l_∞, структура разреженности, невырожденная $\mathcal{H}$-матрица, S-SOB матрица, S-OB матрица, S-SDDS матрица, S-SDD матрица, OBS матрица, OB (DSDD) матрица, SDD матрица, верхние оценки.

главных результатов состоит в том, что в них учитывается структура разреженности матриц. Следует также отметить, что полученные таким образом классы содержат соответствующие подклассы, которые получаются, если структура разреженности матриц не принимается в расчет. Более того, в применении к указанным подклассам новые оценки оказываются, вообще говоря, более точными, чем оценки игнорирующие соображения разреженности.

Статья построена следующим образом. В §2 рассматриваются так называемые S-SOB и S-OB матрицы, которые были введены в рассмотрение в работе [7], в которой также была установлена их принадлежность к классу невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. Здесь и далее, через S обозначается непустое собственное подмножество множества индексов $\langle n\rangle = \{1, \dots, n\}$. Основная теорема из §2 устанавливает верхнюю оценку нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для S-SOB матрицы A. Как следствие, получена верхняя оценка для S-OB матрицы A. §3 посвящен так называемым S-SDDS (S-SDD Sparse) матрицам, которые получаются комбинацией соображений разреженности с хорошо известным определением S-SDD матриц. Доказано, что всякая S-SDDS матрица A является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, и получена верхняя оценка для $\|A^{-1}\|_\infty$. Как следствие, получается известная верхняя оценка нормы обратной к S-SDD матрице [1,22]. Наконец, в §4 мы выводим обобщение верхней оценки нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для OB (Ostrowski–Brauer) матриц (также известных под названием DSDD (Double SDD) матриц), предложенной в работе [24], см. также [20].

Стоит отметить, что все оценки, рассматриваемые в данной работе, применимы, в частности, к матрицам со строгим диагональным преобладанием и улучшают следующий классический результат.

Теорема 1.1 ([10, 25]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in n} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}. \tag{1.2}$$

В заключение этого введения приведем некоторые обозначения, используемые в работе. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и пусть $S \subset \langle n\rangle$, $n \geqslant 2$.

Тогда мы полагаем

$$r_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$r_i^j(A) = r_i(A) - |a_{ij}|, \quad \text{где } j \neq i,\ i = 1, \ldots, n,$$

а также

$$r_i^S(A) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} |a_{ij}|, & i \in S, \\ \sum\limits_{j \in S} |a_{ij}|, & i \notin S, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n;$$

$\bar{S} = \langle n \rangle \setminus S$ – это дополнение S в $\langle n \rangle$, а $|S|$ – мощность множества S.

§2. S-SOB и S-OB матрицы

Пусть S – произвольное непустое собственное подмножество множества индексов. В соответствии с [7] будем говорить, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, есть S-SOB (S-Sparse Ostrowski–Brauer) матрица, если выполняются следующие условия:

(i) $|a_{pp}| > r_p^S(A)$ для всех $p \in S$;

(ii) $|a_{qq}| > r_q^{\bar{S}}(A)$ для всех $q \in \bar{S}$;

(iii) для всех $p \in S$ и всех $q \in \bar{S}$ таких, что $a_{pq} \neq 0$,

$$[|a_{pp}| - r_p^S(A)]\ |a_{qq}| > r_p^{\bar{S}}(A)\ r_q(A); \tag{2.1}$$

(iv) для всех $p \in S$ и всех $q \in \bar{S}$ таких, что $a_{qp} \neq 0$,

$$[|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)]\ |a_{pp}| > r_q^S(A)\ r_p(A). \tag{2.2}$$

Заметим, что приведенное определение учитывает структуру разреженности матрицы A. Если же структура разреженности матрицы в расчет не принимается, но мы требуем, чтобы условия (2.1) и (2.2) выполнялись для всех $p \in S$ и $q \in \bar{S}$, то условия (i) и (ii) становятся избыточными, и мы приходим к следующему, более простому определению, данному в работе [7].

Пусть S – произвольное непустое собственное подмножество множества индексов. В соответствии с [7] будем говорить, что $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, является S-OB (S-Ostrowski–Brauer) матрицей, если условия (2.1) и (2.2) выполняются для всех $p \in S$ и для всех $q \in \bar{S}$.

В работе [7] было доказано, что все S-SOB и S-OB матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами, и при этом справедливы следующие включения:

$$\{\mathrm{SDD}\} \subsetneqq \{S\text{-OB}\} \subsetneqq \{S\text{-SOB}\} \subsetneqq \mathcal{H}.$$

В представленных ниже теореме 2.1 и следствии 2.1 мы устанавливаем верхние оценки бесконечной нормы обратных к S-SOB и S-OB матрицам.

Теорема 2.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– S-SOB матрица, где* $S \subset \langle n \rangle$, $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$. *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{\substack{i\in S:\\ r_i^{\bar S}(A)=0}} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i^S(A)},\ \max_{\substack{j\in \bar S:\\ r_j^{S}(A)=0}} \frac{1}{|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)},\right.$$

$$\left. \max_{\substack{i\in S, j\in \bar S:\\ a_{ij}\neq 0}} f_{ij}(A,S),\ \max_{\substack{i\in S, j\in \bar S:\\ a_{ji}\neq 0}} f_{ji}(A,\bar S)\right\}. \tag{2.3}$$

Здесь и ниже мы используем следующее обозначение:

$$f_{ij}(A,S) = \frac{|a_{jj}| + r_i^{\bar S}(A)}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]|a_{jj}| - r_i^{\bar S}(A)\, r_j(A)}, \tag{2.4}$$

где $i \in S$, $j \in \bar S$.

Доказательство. В соответствии с леммой 1.1, выберем вектор $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$\|x\|_\infty = 1 \quad \text{и} \quad |(Ax)_i| \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1} \quad \text{для всех} \ \ i = 1,\dots,n. \tag{2.5}$$

Предположим, что

$$|x_p| = 1 = \|x\|_\infty. \tag{2.6}$$

Сперва рассмотрим тот случай, когда $p \in S$.

Если $r_p^{\bar S}(A) = 0$, то мы имеем

$$(Ax)_p = a_{pp}x_p + \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq p}} a_{pj}x_j,$$

откуда, ввиду (2.5), получаем, что

$$|a_{pp}| = |a_{pp}x_p| \leqslant |(Ax)_p| + \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq p}} |a_{pj}|\,|x_j| \leqslant |(Ax)_p| + r_p^S(A).$$

Тогда, в силу (2.5), мы имеем

$$|a_{pp}| - r_p^S(A) \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1}. \tag{2.7}$$

Поскольку для S-SOB матрицы A левая часть неравенства (2.7) положительна, мы получаем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{|a_{pp}| - r_p^S(A)} \leqslant \max_{\substack{i\in S:\\ r_i^{\bar{S}}(A)=0}} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i^S(A)}. \tag{2.8}$$

Тем самым в рассматриваемом случае оценка (2.3) установлена.

Теперь предположим, что $r_p^{\bar{S}}(A) \neq 0$. В этом случае, найдется индекс $q \in \bar{S}$ такой, что $a_{pq} \neq 0$ и

$$|x_q| = \max_{\substack{j\in \bar{S}:\\ a_{pj}\neq 0}} |x_j|. \tag{2.9}$$

Используя (2.6) и (2.9), мы выводим

$$|a_{pp}| = |a_{pp}x_p| \leqslant |(Ax)_p| + r_p^S(A) + r_p^{\bar{S}}(A)|x_q|,$$

так что

$$|a_{pp}| - |(Ax)_p| - r_p^S(A) \leqslant r_p^{\bar{S}}(A)|x_q|. \tag{2.10}$$

Если $x_q = 0$, то из неравенства (2.10), используя (2.5), мы выводим

$$|a_{pp}| - r_p^S(A) \leqslant |(Ax)_p| \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1}.$$

Отсюда, используя условия $a_{qq} \neq 0$ и (iii), мы выводим

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty &\leqslant \frac{1}{|a_{pp}| - r_p^S(A)} = \frac{|a_{qq}|}{[|a_{pp}| - r_p^S(A)]|a_{qq}|}\\ &\leqslant \frac{|a_{qq}| + r_p^{\bar{S}}(A)}{[|a_{pp}| - r_p^S(A)]|a_{qq}| - r_p^{\bar{S}}(A)\ r_q(A)} \leqslant \max_{\substack{i\in S, j\in\bar{S}:\\ a_{ij}\neq 0}} f_{ij}(A,S).\end{aligned}$$

Таким образом, если $x_q = 0$, то требуемая оценка установлена.

Пусть теперь $x_q \neq 0$. Рассматривая q-ую компоненту Ax и используя (2.6), получаем

$$|a_{qq}|\ |x_q| \leqslant |(Ax)_q| + r_q(A). \tag{2.11}$$

Теперь из (2.10) и (2.11) следует, что

$$[|a_{pp}| - r_p^S(A) - |(Ax)_p|]|a_{qq}| \leqslant r_p^{\bar{S}}(A)[|(Ax)_q| + r_q(A)],$$

или

$$[|a_{pp}| - r_p^S(A)]|a_{qq}| - r_p^{\bar{S}}(A)\ r_q(A) \leqslant |(Ax)_p||a_{qq}| + |(Ax)_q|r_p^{\bar{S}}(A).$$

Следовательно, ввиду (2.5), мы имеем

$$[|a_{pp}| - r_p^S(A)]|a_{qq}| - r_p^{\bar{S}}(A)\ r_q(A) \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1}[|a_{qq}| + r_p^{\bar{S}}(A)].$$

Принимая во внимание тот факт, что для S-SOB матрицы A левая часть последнего соотношения положительна, запишем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{|a_{qq}| + r_p^{\bar{S}}(A)}{[|a_{pp}| - r_p^S(A)]|a_{qq}| - r_p^{\bar{S}}(A) r_q(A)}, \tag{2.12}$$

откуда вытекает, что

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{\substack{i \in S, j \in \bar{S}:\\ a_{ij} \neq 0}} f_{ij}(A, S).$$

Теперь для завершения доказательства теоремы нам остается рассмотреть тот случай, когда $p \in \bar{S}$.

Если $r_p^S(A) = 0$, то, рассуждая, как и выше, мы выводим

$$|a_{pp}| = |a_{pp} x_p| \leqslant |(Ax)_p| + r_p^{\bar{S}}(A)$$

и

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{|a_{pp}| - r_p^{\bar{S}}(A)} \leqslant \max_{\substack{j \in \bar{S}:\\ r_j^S(A) = 0}} \frac{1}{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)}.$$

Если же $r_p^S(A) \neq 0$, то мы выбираем $q \in S$ таким образом, что $a_{pq} \neq 0$ и

$$|x_q| = \max_{\substack{j \in S:\\ a_{pj} \neq 0}} |x_j|.$$

Если $|x_q| = 0$, то

$$|a_{pp}| - r_p^{\bar{S}}(A) \leqslant |(Ax)_p| \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1}$$

и

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty &\leqslant \frac{1}{|a_{pp}| - r_p^{\bar{S}}(A)} \leqslant \frac{|a_{qq}| + r_p^S(A)}{[|a_{pp}| - r_p^{\bar{S}}(A)]|a_{qq}| - r_p^S(A) r_q(A)} \\ &\leqslant \max_{\substack{i \in S, j \in \bar{S}:\\ a_{ji} \neq 0}} \frac{|a_{ii}| + r_j^S(A)}{[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)]|a_{ii}| - r_j^S(A) r_i(A)} = \max_{\substack{i \in S, j \in \bar{S}:\\ a_{ji} \neq 0}} f_{ji}(A, \bar{S}).\end{aligned}$$

Наконец, если $x_q \neq 0$, то, рассуждая, как при выводе (2.12), мы получаем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{|a_{qq}| + r_p^S(A)}{[|a_{pp}| - r_p^{\bar S}(A)]|a_{qq}| - r_p^S(A) r_q(A)}$$
$$\leqslant \max_{\substack{i\in S, j\in \bar S:\\ a_{ji}\neq 0}} \frac{|a_{ii}| + r_j^S(A)}{[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)]|a_{ii}| - r_j^S(A) r_i(A)} = \max_{\substack{i\in S, j\in \bar S:\\ a_{ji}\neq 0}} f_{ji}(A, \bar S).$$

Теорема доказана. □

Теперь из теоремы 2.1 мы выведем следствие. Заметим, что если $r_i^{\bar S}(A) = 0$, $i \in S$, то для всех $j \in \bar S$ имеем

$$f_{ij}(A, S) = \frac{1}{|a_{ii}| - r_i^S(A)};$$

аналогично, если $r_j^S(A) = 0$, $j \in \bar S$, то для всех $i \in S$ справедливо равенство

$$f_{ji}(A, \bar S) = \frac{1}{|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)}.$$

В силу последних соотношений, мы имеем

$$\max\left\{ \max_{\substack{i\in S:\\ r_i^{\bar S}(A)\neq 0}} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i^S(A)}, \max_{\substack{i\in S, j\in \bar S:\\ a_{ij}\neq 0}} f_{ij}(A, S) \right\} \leqslant \max_{i\in S, j\in \bar S} f_{ij}(A, S)$$

и

$$\max\left\{ \max_{\substack{j\in \bar S\\ r_j^S(A)\neq 0}} \frac{1}{|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)}, \max_{\substack{i\in S, j\in \bar S:\\ a_{ji}\neq 0}} f_{ji}(A, \bar S) \right\} \leqslant \max_{i\in S, j\in \bar S} f_{ji}(A, \bar S).$$

Итак, из теоремы 2.1 вытекает следующая, несколько более простая, но одновременно и менее точная, оценка, справедливая для S-OB матриц, для которых (в отличие от S-SOB матриц) величины $f_{ij}(A, S)$ и $f_{ji}(A, \bar S)$ корректно определены при всех $i \in S$ и $j \in \bar S$.

Следствие 2.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – S-OB матрица, где $S \subset \langle n\rangle$, $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S, j\in \bar S} \max\left\{f_{ij}(A, S),\ f_{ji}(A, \bar S)\right\}. \tag{2.13}$$

Важно отметить, что для SDD матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, оценка (2.13) является, вообще говоря, более точной, чем классическая оценка (1.2), т.е.

$$\max_{i\in S, j\in \bar{S}} \max\left\{f_{ij}(A,S),\ f_{ji}(A,\bar{S})\right\} \leqslant \max_{i\in n} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}. \qquad (2.14)$$

Действительно, как нетрудно убедиться, для всех $i \neq j$ и для произвольного подмножества S мы имеем

$$f_{ij}(A,S) \leqslant \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)},$$

если

$$|a_{ii}| - r_i(A) \leqslant |a_{jj}| - r_j(A),$$

и, аналогично,

$$f_{ij}(A,S) \leqslant \frac{1}{|a_{jj}| - r_j(A)},$$

если

$$|a_{jj}| - r_j(A) \leqslant |a_{ii}| - r_i(A),$$

откуда и следует неравенство (2.14).

§3. S-SDDS и S-SDD матрицы

В этом параграфе мы вводим в рассмотрение новый класс матриц $\{S\text{-SDDS}\}$, учитывающий их структуру разреженности. Затем мы показываем, что матрицы из этого класса являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами и выводим для них верхнюю оценку бесконечной нормы обратной.

Напомним, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-SDD матрицей (см., например, [3, 17]), если выполняются следующие два условия:

$$|a_{ii}| > r_i^S(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S \qquad (3.1)$$

и

$$[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\ [|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)] > r_i^{\bar{S}}(A)\ r_j^S(A) \text{ для всех } i \in S \text{ и } j \in \bar{S}. \quad (3.2)$$

Как хорошо известно, класс S-SDD является подклассом класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц и содержит класс SDD матриц.

Мы расширяем класс $\{S\text{-SDD}\}$, вводя следующее определение.

Будем говорить, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-SDDS (S-SDD Sparse) матрицей, если выполнены следующие условия:

$$|a_{ii}| > r_i^S(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S; \qquad (3.3)$$

$$|a_{jj}| > r_j^{\bar S}(A) \quad \text{для всех} \quad j \in \bar S; \tag{3.4}$$

$$[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)] > r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A)$$

$$\text{для всех } i \in S \text{ и всех } j \in \bar S \text{ таких, что } a_{ij} \neq 0 \text{ или } a_{ji} \neq 0. \tag{3.5}$$

Поскольку условия (3.3)–(3.5), очевидно, выполнены для любой S-SDD матрицы A, то

$$\{\mathrm{SDD}\} \subseteq \{S\text{-SDD}\} \subseteq \{S\text{-SDDS}\}. \tag{3.6}$$

Начнем изучение S-SDDS матриц, устанавливая следующий базовый результат.

Лемма 3.1. *Пусть $S \subset \langle n \rangle$, где $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$, пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ вырождена и пусть*

$$Ax = 0 \tag{3.7}$$

для некоторого ненулевого вектора $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$. Положим

$$|x_p| = \max_{i \in \langle n \rangle} |x_i|. \tag{3.8}$$

Если $p \in S$, то либо

$$|a_{pp}| - r_p^S(A) \leqslant 0, \tag{3.9}$$

либо найдется такой индекс $q \in \bar S$, что $a_{pq} \neq 0$ и

$$[|a_{pp}| - r_p^S(A)]\,[|a_{qq}| - r_q^{\bar S}(A)] \leqslant r_p^{\bar S}(A)\, r_q^S(A). \tag{3.10}$$

Доказательство. Если $r_p^{\bar S}(A) = 0$, то

$$0 = (Ax)_p = a_{pp}x_p + \sum_{\substack{j\neq p\\ j\in S}} a_{pj}x_j,$$

откуда

$$|a_{pp}||x_p| \leqslant r_p^S(A)|x_p|,$$

что и доказывает (3.9).

Если $r_p^{\bar S}(A) \neq 0$, то выберем $q \in \bar S$ такое, что $a_{pq} \neq 0$ и

$$|x_q| = \max_{\substack{j\in \bar S\\ a_{pj}\neq 0}} |x_j|. \tag{3.11}$$

В этом случае, мы имеем

$$|a_{pp}||x_p| \leqslant r_p^S(A)|x_p| + r_p^{\bar S}(A)|x_q|$$

и

$$[|a_{pp}| - r_p^S(A)]|x_p| \leqslant r_p^{\bar S}(A)|x_q|. \tag{3.12}$$

Если $x_q = 0$, то из (3.12) следует, что

$$[|a_{pp}| - r_p^S(A)] \leqslant 0,$$

так что имеет место неравенство (3.9).

Если же $x_q \neq 0$, то мы выводим

$$|a_{qq}||x_q| \leqslant r_q^S(A)|x_p| + r_q^{\bar{S}}(A)|x_q|,$$

$$[|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)]|x_q| \leqslant r_q^S(A)|x_p|. \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13), учитывая, что $x_p \neq 0$ и $x_q \neq 0$, получаем:

$$[|a_{pp}| - r_p^S(A)]\,[|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)] \leqslant r_p^{\bar{S}}(A)\, r_q^S(A).$$

Лемма доказана. □

Из леммы 3.1 мы немедленно получаем следующий критерий невырожденности матриц, учитывающий их структуру разреженности и зависящий от разбиения $\langle n\rangle = S \cup \bar{S}$.

Теорема 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-SDDS матрицей для некоторого подмножества $S \subset \langle n\rangle$, где $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$. Тогда A невырождена.*

Доказательство. Допустим, что матрица A вырождена и что $Ax = 0$ для некоторого ненулевого вектора $x = (x_i)$. Пусть p определяется в соответствии с (3.8).

Если $p \in S$, то, по лемме 3.1, либо верно неравенство (3.9), либо $a_{pq} \neq 0$, $q \in \bar{S}$ и выполнено условие (3.10). Если же $p \in \bar{S}$, то, по лемме 3.1, где S заменяется на $\bar{S}$, либо $|a_{pp}| - r_p^{\bar{S}}(A) \leqslant 0$, либо для некоторого $q \in S$ мы имеем $a_{pq} \neq 0$ и

$$[|a_{qq}| - r_q^S(A)]\,[|a_{pp}| - r_p^{\bar{S}}(A)] \leqslant r_q^{\bar{S}}(A)\, r_p^S(A).$$

Но в условиях теоремы оба случая невозможны, а значит матрица A является невырожденной. □

Следующая теорема утверждает, что всякая S-SDDS матрица в действительности является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.

Теорема 3.2. *Пусть при некотором $S \subset \langle n\rangle$, где $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$ и $n \geqslant 2$, матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является S-SDDS матрицей. Тогда A – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица.*

Доказательство. Заметим, что условия (3.3)–(3.5) выполняются для A тогда и только тогда, когда они выполняются для ее матрицы сравнения $\mathcal{M}(A)$. Следовательно, по теореме 3.1, матрица $\mathcal{M}(A)$ невырождена, и нам остается показать, что $\mathcal{M}(A)$ является $\mathcal{M}$-матрицей. Для этого, ввиду [11, Condition D_{15} of Theorem 6.2.3], достаточно показать, что матрица $\mathcal{M}(A) + \varepsilon I_n$ невырождена при любом $\varepsilon \geqslant 0$. Но условия (3.3)–(3.5), справедливые для $\mathcal{M}(A)$, заведомо выполняются и для $\mathcal{M}(A)+\varepsilon I_n$. Значит, по теореме 3.1, матрица $\mathcal{M}(A)+\varepsilon I_n$ невырождена при всех $\varepsilon \geqslant 0$, так что A является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей. $\square$

В силу (3.6) и теоремы 3.2, мы имеем

$$\{\mathrm{SDD}\} \subseteq \{S\text{-SDD}\} \subseteq \{S\text{-SDDS}\} \subseteq \{\mathcal{H}\},$$

что является новым доказательством того факта, что любая S-SDD матрица является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.

Теперь мы готовы представить верхнюю оценку нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для S-SDDS матрицы A.

Теорема 3.3. *Пусть $S \subset \langle n\rangle$, где $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$, и пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является S-SDDS матрицей. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{\substack{i\in S:\\ r_i^{\bar S}(A)=0}} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i^S(A)},\ \max_{\substack{j\in \bar S:\\ r_j^{S}(A)=0}} \frac{1}{|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)},\right.$$
$$\left. \max_{\substack{p\in S, q\in \bar S:\\ a_{pq}\neq 0}} f_{pq}^S(A),\ \max_{\substack{p\in S, q\in \bar S:\\ a_{qp}\neq 0}} f_{qp}^{\bar S}(A) \right\}. \tag{3.14}$$

Здесь для $i \in S$ и $j \in \bar S$ таких, что $a_{ij} \neq 0$, мы полагаем

$$f_{ij}^S(A) := \frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A) + r_i^{\bar S}(A)}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)] - r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A)}. \tag{3.15}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 1.1, предположим, что вектор $x = (x_i)$ удовлетворяет условию

$$|(Ax)_i| \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1}, \quad i = 1,\dots,n, \tag{3.16}$$

и

$$1 = |x_p| = \max_{i\in\langle n\rangle} |x_i|.$$

Сперва рассмотрим тот случай, когда $p \in S$.

Если $r_p^{\bar{S}}(A) = 0$, то

$$|a_{pp}| - r_p^S(A) \leqslant |(Ax)_p| \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1}. \tag{3.17}$$

Поскольку A является S-SDDS матрицей, то самое левое выражение в (3.17) положительно, и мы имеем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{|a_{pp}| - r_p^S(A)} \leqslant \max_{\substack{i \in S: \\ r_i^{\bar{S}}(A)=0}} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i^S(A)}. \tag{3.18}$$

Если $r_p^{\bar{S}}(A) \neq 0$, то выберем такое $q \in \bar{S}$, что $a_{pq} \neq 0$ и

$$|x_q| = \max_{\substack{j \in \bar{S}: \\ a_{pj} \neq 0}} |x_j|.$$

Тогда, как легко убедиться, верны неравенства

$$|a_{pp}| - r_p^S(A) - |(Ax)_p| \leqslant r_p^{\bar{S}}(A)|x_q| \tag{3.19}$$

и

$$[|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)]|x_q| \leqslant |(Ax)_q| + r_q^S(A). \tag{3.20}$$

Если $x_q \neq 0$, то из (3.19) и (3.20) следует, что

$$[|a_{pp}| - r_p^S(A) - |(Ax)_p|]\, [|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)] \leqslant r_p^{\bar{S}}(A)\, [|(Ax)_q| + r_q^S(A)],$$

или

$$\begin{aligned} &[|a_{pp}| - r_p^S(A)]\, [|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)] - r_p^{\bar{S}}(A)\, r_q^S(A) \\ &\leqslant |(Ax)_p|[|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)] + |(Ax)_q| r_p^{\bar{S}}(A) \\ &\leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1}[|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A) + r_p^{\bar{S}}(A)], \end{aligned}$$

где мы использовали (3.16). Поскольку первое выражение в последней цепочке неравенств положительно, мы получаем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A) + r_p^{\bar{S}}(A)}{[|a_{pp}| - r_p^S(A)]\, [|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)] - r_p^{\bar{S}}(A)\, r_q^S(A)} = f_{pq}^S(A). \tag{3.21}$$

В том случае, когда $x_q = 0$, в силу (3.19) и (3.16), мы имеем

$$|a_{pp}| - r_p^S(A) \leqslant |(Ax)_p| \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1},$$

так что

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{|a_{pp}| - r_p^S(A)}. \tag{3.22}$$

Покажем, что для всех $q \in \bar{S}$ и, в частности, для выбранного выше q,

$$\frac{1}{|a_{pp}| - r_p^S(A)} \leqslant f_{pq}^S(A). \tag{3.23}$$

Действительно,

$$\frac{1}{|a_{pp}| - r_p^S(A)} = \frac{|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)}{[|a_{pp}| - r_p^S(A)]\,[|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)]}$$
$$\leqslant \frac{|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A) + r_p^{\bar{S}}(A)}{[|a_{pp}| - r_p^S(A)]\,[|a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)] - r_p^{\bar{S}}(A)\, r_q^S(A)} = f_{pq}^S(A).$$

Итак, в том случае, когда $p \in S$, в силу (3.18), (3.21) и (3.22)–(3.23), мы имеем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{\substack{i \in S:\\ r_i^{\bar{S}}(A)=0}} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i^S(A)},\ \max_{\substack{p \in S, q \in \bar{S}:\\ a_{pq} \neq 0}} f_{pq}^S(A) \right\}. \tag{3.24}$$

В том же случае, когда $p \in \bar{S}$, требуемый результат получается из (3.24) заменой S на $\bar{S}$ и перестановкой p и q. Теорема доказана. □

Как легко видеть, если $r_i^{\bar{S}}(A) = 0$, где $i \in S$, то при всех $j \in \bar{S}$ мы имеем

$$f_{ij}^S(A) = \frac{1}{|a_{ii}| - r_i^S(A)}. \tag{3.25}$$

Аналогично, если $r_j^S(A) = 0$, где $j \in \bar{S}$, то при всех $i \in S$ имеем

$$f_{ji}^{\bar{S}}(A) = \frac{1}{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)}. \tag{3.26}$$

Применяя теорему 3.3 к S-SDD матрице A, принимая во внимание, что для такой матрицы A величины $f_{ij}^S(A)$ и $f_{ji}^{\bar{S}}(A)$ корректно определены при всех $i \in S$ и всех $j \in \bar{S}$, и используя (3.25)–(3.26), мы приходим к следующей известной оценке, первоначально установленной в работе [22] (см. также [1]).

Следствие 3.1. *Пусть $S \subset \langle n \rangle$, $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$ и пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ является S-SDD матрицей. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i \in S, j \in \bar{S}} \max\left\{ f_{ij}^S(A),\ f_{ji}^{\bar{S}}(A) \right\}. \tag{3.27}$$

где $f_{ij}^S(A)$ определяется в (3.15).

Как хорошо известно (см., например, [1]), для SDD матрицы A оценка (3.27) улучшает, вообще говоря, классическую оценку (1.2), а тогда и оценка (3.14) тем более улучшает (1.2).

§4. OBS и OB матрицы

В этом параграфе мы рассматриваем матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, удовлетворяющие условию

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\,r_j(A) \quad \text{для всех} \quad i \neq j. \tag{4.1}$$

Как известно с 1937 года, см. [23] и [12], такие матрицы невырождены. Более того, как нетрудно убедиться (например, применяя рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 3.2), матрицы, удовлетворяющие условию (4.1), являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами. Мы называем их OB (Ostrowski–Brauer) матрицами; некоторые авторы называют их DSDD (doubly SDD) матрицами. Относительно недавно, в 2008 году, Пань и Чень [24] (см. также [18]) установили следующую верхнюю оценку для обратной к DSDD матрице. (Вероятно, эта же оценка получена и в работе [20].)

Теорема 4.1 ([24]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является OB матрицей. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\neq j} \frac{|a_{jj}| + r_i(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)}. \tag{4.2}$$

В этом параграфе мы покажем, что оценку (4.2) можно одновременно улучшить и распространить на более широкий класс матриц. Напомним следующий результат, установленный в работе [19].

Теорема 4.2. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, неприводима и удовлетворяет условию*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| \geqslant r_i(A)\,r_j(A) \quad \textit{для всех} \quad i \neq j \quad \textit{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0, \tag{4.3}$$

причем, по крайней мере, одно из неравенств в (4.3) является строгим. Тогда матрица A невырождена.

Из теоремы 4.2 вытекает следующий результат.

Следствие 4.1. *Предположим, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, не имеет нулевых строк и удовлетворяет условию*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\,r_j(A) \quad \textit{для всех} \quad i \neq j \quad \textit{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0. \tag{4.4}$$

Тогда A невырождена.

Доказательство. Если матрица A неприводима, то она невырождена по теореме 4.2.

Если же A приводима, то каждая из ее неприводимых компонент $A[S]$, где $S \subset \langle n \rangle$, $2 \leqslant |S| \leqslant n-1$, тем более удовлетворяет условиям типа (4.4), так что все они невырождены.

Наконец, если $A[i]$, $i \in \langle n \rangle$, – неприводимая компонента порядка 1, то она невырождена, поскольку, по условию, матрица A не имеет нулевых строк. $\square$

Рассуждая, как в доказательстве теоремы 3.2, нетрудно получить следующее усиление теоремы 4.2.

Теорема 4.3. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, не имеет нулевых строк и удовлетворяет условию* (4.4). *Тогда A – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица.*

Заметим, что класс матриц, удовлетворяющих условиям теоремы 4.1, т.е. класс OB (DSDD) матриц является подклассом класса матриц, удовлетворяющих условиям теоремы 4.3, поскольку из (4.1) немедленно следует, что все диагональные элементы A ненулевые, а значит у матрицы A нет нулевых строк.

Заметим также, что в следствии 4.1 и теореме 4.3 условие, что матрица A не имеет нулевых строк, равносильно условию, что все диагональные элементы A ненулевые.

Матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, удовлетворяющие условиям теоремы 4.3, будем называть OBS (OB Sparse) матрицами.

Очевидно, что

$$\{\mathrm{SDD}\} \subset \{\mathrm{OB}\} \subset \{\mathrm{OBS}\}.$$

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 4.4. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, является OBS матрицей. Тогда*

$$||A^{-1}||_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{\substack{i \in \langle n \rangle: \\ r_i(A)=0}} |a_{ii}|^{-1}, \ \max_{i:\, r_i(A) \neq 0} \ \max_{\substack{j \neq i: \\ a_{ij} \neq 0}} \frac{|a_{jj}| + r_i(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\, r_j(A)} \right\}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3.3, выберем такой вектор $x \neq 0$, что $\|x\|_\infty = 1$ и

$$\|Ax\|_\infty \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1}, \tag{4.6}$$

и предположим, что

$$|x_p| = \|x\|_\infty = 1. \tag{4.7}$$

Если $r_p(A) = 0$, то мы имеем

$$|(Ax)_p| = |a_{pp}||x_p| = |a_{pp}|,$$

откуда, ввиду (4.6), следует, что

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant |a_{pp}|^{-1}.$$

Итак, в этом случае,

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{\substack{i\in\langle n\rangle:\\ r_i(A)=0}} |a_{ii}|^{-1},$$

и оценка (4.5) установлена.

Пусть теперь $r_p(A) \neq 0$ и пусть $q \neq p$ таково, что $a_{pq} \neq 0$ и

$$|x_q| = \max_{\substack{j\neq p:\\ a_{pj}\neq 0}} |x_j|. \tag{4.8}$$

Используя (4.7) и (4.8), мы легко получаем

$$|a_{pp}| \leqslant |(Ax)_p| + r_p(A)|x_q| \tag{4.9}$$

и

$$|a_{qq}||x_q| \leqslant |(Ax)_q| + r_q(A). \tag{4.10}$$

Если $x_q = 0$, то, в силу (4.9) и (4.6), имеем

$$|a_{pp}| \leqslant |(Ax)_p| \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1},$$

а тогда для любого $j \neq p$

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{|a_{pp}|} = \frac{|a_{jj}|}{|a_{pp}|\,|a_{jj}|} < \frac{|a_{jj}| + r_p(A)}{|a_{pp}|\,|a_{jj}| - r_p(A)\,r_j(A)} \tag{4.11}$$

и

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \min_{j\neq p} \frac{|a_{jj}| + r_p(A)}{|a_{pp}|\,|a_{jj}| - r_p(A)\,r_j(A)}.$$

Итак, в рассматриваемом случае, оценка (4.5) верна.

Остается рассмотреть ту ситуацию, когда $r_p(A) \neq 0$ и $x_q \neq 0$. В этом случае, из (4.9) и (4.10) мы получаем

$$[|a_{pp}| - |(Ax)_p|]|a_{qq}| \leqslant r_p(A)[|(Ax)_q| + r_q(A)],$$

или

$$|a_{pp}|\,|a_{qq}| - r_p(A)\,r_q(A) \leqslant |(Ax)_p||a_{qq}| + |(Ax)_q|\,r_p(A).$$

Ввиду (4.6), отсюда следует, что

$$|a_{pp}|\,|a_{qq}| - r_p(A)\,r_q(A) \leqslant \|A^{-1}\|_\infty^{-1}[|a_{qq}| + r_p(A)],$$

так что

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{\substack{j\neq p:\\ a_{pj}\neq 0}} \frac{|a_{jj}| + r_p(A)}{|a_{pp}|\,|a_{jj}| - r_p(A)\,r_j(A)}$$

$$\leqslant \max_{i:\,r_i(A)\neq 0}\ \max_{\substack{j\neq i:\\ a_{ij}\neq 0}} \frac{|a_{jj}| + r_i(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)}.$$

Теорема доказана. □

Как следует из (4.11), если условие

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\,r_j(A)$$

выполнено для всех $i \neq j$, то оценка (4.5), очевидно, не превосходит оценку (4.2). Кроме того, оценка (4.5) справедлива для более широкого класса матриц, чем оценка (4.2).

В заключение данного параграфа мы покажем, что для SDD матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, оценка (4.2), по крайней мере, не хуже, чем классическая оценка (1.2).

Действительно, пусть матрица A имеет строгое диагональное преобладание. Если $r_i(A) \neq 0$, то неравенство

$$\frac{|a_{jj}| + r_i(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)} \leqslant \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)} \tag{4.12}$$

равносильно неравенству

$$|a_{ii}| - r_i(A) \leqslant |a_{jj}| - r_j(A),$$

а если $r_i(A) = 0$, то (4.12) является равенством. С другой стороны, неравенство

$$\frac{|a_{jj}| + r_i(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)} \leqslant \frac{1}{|a_{jj}| - r_j(A)}$$

равносильно неравенству

$$|a_{jj}| - r_j(A) \leqslant |a_{ii}| - r_i(A).$$

Итак, всегда

$$\frac{|a_{jj}| + r_i(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)} \leqslant \max\left\{\frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)},\ \frac{1}{|a_{jj}| - r_j(A)}\right\}. \tag{4.13}$$

Этим показано, что для SDD матрицы A оценка (4.2) и, тем более, оценка (4.5) являются, вообще говоря, более точными, чем оценка (2.1).

Список литературы

1. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки бесконечной нормы обратных к матрицам Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **419** (2013), 111–120.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных для обобщенных матриц Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 182–195.
4. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных в норме l_∞ для некоторых блочных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 145–158.
5. Л. Ю. Колотилина, *Новые подклассы класса $\mathcal{H}$-матриц и соответствующие оценки обратых матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 148–171.
6. Л. Ю. Колотилина, *О матрицах Дашница–Зусмановича (DZ) и матрицах типа Дашница–Зусмановича (DZT) и их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 145–165.
7. Л. Ю. Колотилина, *Об одном подклассе класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц и соответствующих множествах локализации собственных и сингулярных значений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 166–178.
8. Л. Ю. Колотилина, *Матрицы некрасовского типа и оценки для их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **482** (2019), 169–183.
9. Л. Ю. Колотилина, *Некоторые новые классы невырожденных матриц и верхние оценки для их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 184–200.
10. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Ind. Appl. Math. **11** (1963), 95–104.
11. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, 1979.
12. A. Brauer, *Limits for the characteristic roots of a matrix: II.* — Duke Math. J. **14** (1947), 21–26.
13. L. Cvetković, P.-F. Dai, K. Doroslovački, Y.-T. Li, *Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **219** (2013), 5020–5024.
14. L. Cvetković, K. Doroslovački, *Max norm estimation for the inverse of block matrices.* — Appl. Math. Comput. **242** (2014), 694–706.
15. L. Cvetković, V. Kostić, K. Doroslovački, *Max-norm bounds for the inverse of S-Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **218** (2012), 9498–9503.
16. L. Cvetković, V. Kostić, S. Rauški, *A new subclass of H-matrices.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 206–210.
17. L. Cvetković, V. Kostić, R. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area.* — ETNA **18** (2004), 73–80.
18. Ping-Fan Dai, *Error bounds for linear complementarity problems of DB-matrices.* — Linear Algebra Appl. **434** (2011), 830–840.
19. L. Yu. Kolotilina, *Generalizations of the Ostrowski–Brauer theorem*, Linear Algebra Appl. **364** (2003), 65–80.

20. V. R. Kostić, L. Cvetković, D. L. Cvetković, *Pseudospectra localizations and their applications.* — Numer. Linear Algebra Appl. **23** (2016), 356–372.
21. Chaoqian Li, L. Cvetković, Yimin Wei, Jianxing Zhao, *An infinity norm bound for the inverse of Dashnic–Zusmanovich type matrices with applications.* — Linear Algebra Appl. **565** (2019), 99–122.
22. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of SDD and $\mathcal{S}$-SDD matrices.* — J. Comput. Appl. Math. **206** (2007), 666–678.
23. A. M. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
24. S. Z. Pan, S. C. Chen, *An upper bound for $\|A^{-1}\|$ of strictly doubly diagonally dominant matrices (in Chinese).* — J. Fuzhou Univ. Nat. Sci. Ed. **36** (2008), 39–642.
25. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
26. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles.* (Springer Ser. Comput. Math., **36**), Springer, 2004.

Kolotilina L. Yu. Some bounds for inverses involving matrix sparsity pattern.

The paper considers some subclasses of the class of nonsingular $\mathcal{H}$-matrices whose definitions involve matrix sparsity pattern. For matrices A in these subclasses, upper bounds for $\|A^{-1}\|_\infty$ are derived and shown to be sharper than the corresponding bounds ignoring matrix sparsity.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург
Россия
E-mail: `lilikona@mail.ru`

Поступило 14 октября 2019 г.