Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

Л. Ю. Колотилина

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ КЛАССЫ НЕВЫРОЖДЕННЫХ МАТРИЦ И ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ИХ ОБРАТНЫХ

§1. Введение

Изучению различных подклассов $\mathcal{H}$-матриц уделяется большое внимание в литературе (см., в частности, [1–8, 10–16, 20]). Среди таких классов следует упомянуть класс матриц со строгим диагональным преобладанием (SDD), классы матриц Некрасова и матриц некрасовского типа, классы S-SDD и S-некрасовских матриц, класс матриц Дашница–Зусмановича (DZ) и матриц типа Дашница–Зусмановича (DZT), а также их блочные обобщения.

Важно отметить, что все упомянутые классы определяются таким образом, что заданная матрица A принадлежит некоторому классу тогда и только тогда, когда этому же классу принадлежит и ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$$

Более того, для $\mathcal{H}$-матриц A из указанных выше классов верхние оценки бесконечной нормы их обратных в действительности выводятся для матриц сравнения $\mathcal{M}(A)$, а не для самих матриц A, после чего применяется классическое неравенство Островского [17]

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty. \tag{1.1}$$

В настоящей работе (см. §2) мы расширяем некоторые подклассы класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, перенося соответствующие условия с $\mathcal{M}(A)$ на сами матрицы A. Таким образом мы получаем расширенные классы, которые уже не являются подклассами класса $\mathcal{H}$-матриц. Тем не менее, для таких матриц все же можно получить верхние оценки $\|A^{-1}\|_\infty$. Более того, для матрицы A, принадлежащей некоторому

Ключевые слова: матрица Некрасова, Q-некрасовская матрица, $\{P_1, P_2\}$-некрасовская матрица, DZ матрица, S-SDD матрица, S-некрасовская матрица, матрица со строгим диагональным преобладанием (SDD), обратная матрица, бесконечная норма, верхняя оценка, $\mathcal{M}$-матрица, $\mathcal{H}$-матрица.

подклассу класса $\mathcal{H}$-матриц, который мы расширяем, новая оценка является, вообще говоря, более точной, чем известная.

В §2 мы будем многократно использовать следующий классический результат.

Теорема 1.1 ([9, 19]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – SDD матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\{|a_{ii}| - r_i(A)\}} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\{\mathcal{M}(A)e\}_i}. \tag{1.2}$$

Напомним, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является матрицей со строгим диагональным преобладанием (SDD матрицей), если выполнены неравенства

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$r_i(A) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

– усеченные абсолютные строчные суммы.

В заключение данного краткого введения приведем обозначения, используемые в работе:
$e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор;
I_n – единичная матрица порядка n;
e_i^T, $i = 1, \dots, n$, – i-ая строка матрицы I_n;
e_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, – матричные единицы.

§2. Результаты

В этом параграфе рассматриваются некоторые расширения классов некрасовских, Q-некрасовских, $\{P_1, P_2\}$-некрасовских и матриц Дашница–Зусмановича (DZ), и для матриц A из указанных расширенных классов с помощью одного и того же подхода устанавливаются верхние оценки нормы $\|A^{-1}\|_\infty$, которые, вообще говоря, улучшают соответствующие оценки для матриц из расширяемых классов.

2.1. Базовые результаты. Представленная ниже теорема является ключом ко всем оценкам, установленным в данной работе.

Теорема 2.1. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *и* $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– невырожденные матрицы. Тогда*

$$|A^{-1}|e \leqslant |(\Delta^{-1}GA)^{-1}|e, \tag{2.1}$$

где диагональная матрица $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ *определяется соотношением*

$$\Delta e = |G|e. \tag{2.2}$$

Доказательство. Поскольку G – невырожденная матрица, все диагональные элементы матрицы Δ положительны, а тогда, в силу (2.2), мы имеем

$$\Delta^{-1}|G|e = e. \tag{2.3}$$

Обозначая $B := GA$ и используя (2.3), мы выводим:

$$\begin{aligned}|A^{-1}|e &= |B^{-1}G|e = |B^{-1}\Delta \cdot \Delta^{-1}G|e\\ &\leqslant |B^{-1}\Delta| \cdot \Delta^{-1}|G|e = |B^{-1}\Delta|e = |(\Delta^{-1}GA)^{-1}|e. \qquad \square\end{aligned}$$

Из теоремы 2.1 немедленно вытекает следующая оценка для $\|A^{-1}\|_\infty$.

Следствие 2.1. *В условиях теоремы* 2.1 *справедливо неравенство*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|(\Delta^{-1}GA)^{-1}\|_\infty. \tag{2.4}$$

Отметим, что следствие 2.1 является обобщением теоремы 5.1 из работы [6], которая позволяет получать верхние оценки $\|A^{-1}\|_\infty$ для матриц A из различных подклассов класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц и формализует общий подход, ранее использованный в статьях [3] и [4].

Простейшим условием невырожденности матрицы является условие строгого (строчного) диагонального преобладания. Предполагая, что матрица GA имеет строгое диагональное преобладание и применяя следствие 2.1 и теорему 1.1, мы легко устанавливаем следующий результат, существенный для дальнейшего.

Теорема 2.2. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть матрица* $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *такова, что произведение* GA *является SDD матрицей. Тогда обе матрицы* A *и* G *невырождены, и справедлива следующая оценка:*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{|G|e\}_i}{\{\mathcal{M}(GA)e\}_i}. \tag{2.5}$$

Доказательство. По следствию 2.1, мы имеем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|(\Delta^{-1}GA)^{-1}\|_\infty.$$

Теперь для завершения доказательства остается лишь применить теорему 1.1 к SDD матрице $\Delta^{-1}GA$ и воспользоваться определением матрицы Δ. $\square$

В связи с теоремой 2.2 представляются уместными следующие замечания.

1. Если матрица GA имеет строгое диагональное преобладание, то для любой невырожденной диагональной матрицы D матрица DGA с отмасштабированными строками также имеет строгое диагональное преобладание, а оценка (2.5), очевидно, инвариантна относительно масштабирования строк G.

2. Если матрица A обратима и $G = A^{-1}$, то оценка (2.5) даёт точное значение $\|A^{-1}\|_\infty$.

3. Если исходная матрица A сама имеет строгое преобладание и $G = I_n$, то оценка (2.5) сводится к классической оценке (1.1).

В предположении, что условия теоремы 2.2 выполнены для некоторых специфических матриц G, можно ввести в рассмотрение новые матричные классы, которые будут обобщать различные подклассы класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц и, в частности, классы матриц некрасовского типа. Примеры таких более широких классов мы рассматриваем в следующих разделах.

2.2. Некрасовские и слабо некрасовские матрицы. Начнем с обобщения класса матриц Некрасова. Пусть $A = D - L - U$ – стандартное расщепление матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ на ее диагональную (D), строго нижнюю треугольную ($-L$) и строго верхнюю треугольную ($-U$) части соответственно. В этих обозначениях, как известно (см. [3, 8, 18]), A является матрицей Некрасова тогда и только тогда, когда

$$(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)e > 0. \tag{2.6}$$

Другими словами, A есть матрица Некрасова тогда и только тогда, когда матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$, умноженная слева на неотрицательную нижнюю треугольную матрицу $(|D| - |L|)^{-1}$, имеет строгое диагональное преобладание.

Введем следующее определение. Будем говорить, что матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, с ненулевыми диагональными элементами является *слабо некрасовской*, если матрица $(D-L)^{-1}A = I_n-(D-L)^{-1}U$ имеет строгое диагональное преобладание, т.е.

$$\mathcal{M}((D - L)^{-1}A)e > 0. \tag{2.7}$$

Заметим, что

$$\mathcal{M}((D-L)^{-1}A)e = \mathcal{M}(I_n - (D-L)^{-1}U)e \geqslant [I_n - |(D-L)^{-1}U|]e$$
$$\geqslant [I_n - (|D|-|L|)^{-1}|U|]e = (|D|-|L|)^{-1}\mathcal{M}(A)e, \tag{2.8}$$

где мы применили неравенство Островского (1.1)

$$|(D-L)^{-1}| \leqslant (|D|-|L|)^{-1} \tag{2.9}$$

к $\mathcal{H}$-матрице $D-L$. Основываясь на (2.8), мы заключаем, что любая матрица Некрасова тем более является и слабо некрасовской.

Применяя теорему 2.2 и неравенство (2.8), мы немедленно получаем следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – слабо некрасовская матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{|(D-L)^{-1}|e\}_i}{\{\mathcal{M}((D-L)^{-1}A)e\}_i} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{|(D-L)^{-1}|e\}_i}{1-\{|(D-L)^{-1}U|e\}_i}. \tag{2.10}$$

Напомним, что для матрицы Некрасова A справедлива следующая оценка, предложенная в работе [3] и улучшающая оценки из [10]:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{|(|D|-|L|)^{-1}|e\}_i}{\{(|D|-|L|)^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i}$$
$$= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{|(|D|-|L|)^{-1}|e\}_i}{1-\{(|D|-|L|)^{-1}|U|e\}_i}. \tag{2.11}$$

Итак, всякая некрасовская матрица является слабо некрасовской. Кроме того, как следует из неравенств (2.8) и (2.9), в применении к матрице Некрасова оценка (2.10), применимая к матрицам из более широкого класса, улучшает, вообще говоря, известную оценку (2.11).

2.3. Q-некрасовские и слабо Q-некрасовские матрицы. Рассмотрим теперь расширение класса так называемых Q-некрасовских матриц. В соответствии с определением из работы [4], матрица $A = D-L-U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, с ненулевыми диагональными элементами называется Q-некрасовской, если матрица

$$M^{-1}\mathcal{M}(A) = I_n - M^{-1}|L||D|^{-1}|U| \tag{2.12}$$

имеет строгое диагональное преобладание. Здесь и ниже мы используем обозначение

$$M = (|D|-|L|)|D|^{-1}(|D|-|U|) = \mathcal{M}(A) + |L||D|^{-1}|U|. \tag{2.13}$$

Поскольку матрица M является монотонной, матрица A является Q-некрасовской в том и только том случае, когда

$$M^{-1}\mathcal{M}(A)e = (I_n - M^{-1}|L||D|^{-1}|U|)e > 0, \tag{2.14}$$

или, что эквивалентно,

$$M^{-1}|L||D|^{-1}|U|e < e. \tag{2.14$'$}$$

Напомним, что, как показано в работе [4], класс Q-некрасовских матриц содержит некрасовские матрицы в качестве подкласса и сам содержится в классе невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.

Для того, чтобы расширить класс Q-некрасовских матриц, введем следующее определение.

Будем говорить, что матрица $A = D-L-U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, с ненулевыми диагональными элементами является *слабо Q-некрасовской*, если матрица

$$\widehat{M}^{-1}A = I_n - \widehat{M}^{-1}LD^{-1}U, \tag{2.15}$$

где мы полагаем

$$\widehat{M} = (D-L)D^{-1}(D-U) = A + LD^{-1}U, \tag{2.16}$$

имеет строгое диагональное преобладание. Иными словами, A является слабо Q-некрасовской матрицей тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{M}(\widehat{M}^{-1}A)e > 0. \tag{2.17}$$

Ясно, что если

$$|\widehat{M}^{-1}LD^{-1}U|e < e, \tag{2.18}$$

то матрица (2.15) имеет строгое диагональное преобладание, так что A – слабо Q-некрасовская матрица.

Заметим, что

$$|\widehat{M}^{-1}| \leqslant (|D|-|U|)^{-1}|D|(|D|-|L|)^{-1} = M^{-1} \tag{2.19}$$

и

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\widehat{M}^{-1}A)e = \mathcal{M}(I_n - \widehat{M}^{-1}LD^{-1}U)e &\geqslant (I_n - |\widehat{M}^{-1}LD^{-1}U|)e \\ &\geqslant (I_n - M^{-1}|L||D|^{-1}|U|)e = M^{-1}\mathcal{M}(A)e.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Применяя теорему 2.2 к слабо Q-некрасовской матрице A и $G = \widehat{M}^{-1}$, где $\widehat{M}$ определена в (2.16), и учитывая (2.20), для нормы обратной A^{-1} мы получаем следующую верхнюю оценку.

Теорема 2.4. *Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является слабо Q-некрасовской. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{|\widehat{M}^{-1}|e\}_i}{\{\mathcal{M}(\widehat{M}^{-1}A)e\}_i} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{|\widehat{M}^{-1}|e\}_i}{1-\{|\widehat{M}^{-1}LD^{-1}U|e\}_i}. \quad (2.21)$$

Из соотношений (2.20) немедленно вытекает, что произвольная Q-некрасовская матрица является слабо Q-некрасовской. Следовательно, к Q-некрасовской матрице применимы оценки (2.21). Более того, как следует из неравенств (2.19) и (2.20), для Q-некрасовской матрицы A обе оценки из (2.21) улучшают, вообще говоря, оценку, предложенную в работе [4], т.е.

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{|\widehat{M}^{-1}|e\}_i}{1-\{|\widehat{M}^{-1}LD^{-1}U|e\}_i} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{M^{-1}e\}_i}{\{M^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i}. \quad (2.22)$$

2.4. $\{P_1, P_2\}$-некрасовские и слабо $\{P_1, P_2\}$-некрасовские матрицы. Следующим подклассом класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, который можно расширить тем же способом, является класс так называемых $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц, где P_1 и P_2 – некоторые матрицы-перестановки. Этот класс недавно был введен в работе [12], а затем исследовался в работах [8, 20].

Следуя работам [8,20] (и несколько расширяя исходное определение, предложенное в [12]), будем говорить, что матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является $\{P_1, P_2\}$-некрасовской для некоторых матриц-перестановок P_1 и P_2 порядка n, если

$$\min\left\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\right\} < |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.23)$$

т.е. выполняется следующее векторное неравенство:

$$\min\{h^{P_1}(A), h^{P_2}(A)\} < |D|. \quad (2.23')$$

Здесь и ниже для заданных матрицы $A = (a_{ij}) = D - L - U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и матрицы-перестановки P порядка n мы полагаем

$$h^P(A) = |D|[I_n - G^P\mathcal{M}(A)]e, \quad (2.24)$$

где

$$P^TAP = D_P - L_P - U_P \quad (2.25)$$

– это стандартное расщепление матрицы P^TAP с симметрично переставленными строками и столбцами, и

$$G^P := P(|D_P| - |L_P|)^{-1}P^T. \quad (2.26)$$

В работе [8] была установлена следующая оценка нормы обратной к $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрице, улучшающая ранее полученные результаты из статей [12] и [20].

Теорема 2.5 ([8]). *Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является $\{P_1, P_2\}$-некрасовской, где P_1, $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – некоторые матрицы-перестановки. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{Ge\}_i}{\{G\mathcal{M}(A)e\}_i}, \tag{2.27}$$

где неотрицательная матрица $G = G(P_1, P_2)$ определяется следующим образом:
для $i = 1, \ldots, n$,
i-ая строка матрицы G совпадает с i-ой строкой G^{P_1}, если либо i-ая строка $G^{P_2}\mathcal{M}(A)$ не имеет строгого диагонального преобладания, либо

$$\frac{e_i^T G^{P_1} e}{e_i^T G^{P_1}\mathcal{M}(A)e} \leqslant \frac{e_i^T G^{P_2} e}{e_i^T G^{P_2}\mathcal{M}(A)e}, \tag{2.28}$$

и i-ая строка G совпадает с i-ой строкой G^{P_2}, если либо i-ая строка $G^{P_1}\mathcal{M}(A)$ не имеет строгого диагонального преобладания, либо

$$\frac{e_i^T G^{P_2} e}{e_i^T G^{P_2}\mathcal{M}(A)e} \leqslant \frac{e_i^T G^{P_1} e}{e_i^T G^{P_1}\mathcal{M}(A)e}. \tag{2.29}$$

Ясно, что любая некрасовская матрица содержится в классе (I_n, I_n)-некрасовских матриц, и для любых матриц-перестановок P_1 и P_2 класс $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц содержит, в частности, все SDD матрицы.

Следует также отметить, что, как показано в работе [12] (более короткое доказательство этого факта представлено в [8]), класс $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц является подклассом класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.

Заметим, что приведенное выше определение (2.23) и соотношение (2.24) означают, что A является $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрицей тогда и только тогда, когда для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, i-ая строка по крайней мере одной из Z-матриц $G^{P_j}\mathcal{M}(A)$, $j = 1, 2$, имеет строгое диагональное преобладание. Таким образом, имеет место следующая характеризация $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц.

Лемма 2.1 ([8]). *Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – некоторые матрицы-перестановки, $n \geqslant 2$. Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является $\{P_1, P_2\}$-некрасовской тогда и только тогда, когда*

$$\max_{j=1,2} \{e_i^T G^{P_j} \mathcal{M}(A)e\} > 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.30}$$

Класс $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц может быть расширен следующим образом.

Будем говорить, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, с ненулевыми диагональными элементами является *слабо $\{P_1, P_2\}$-некрасовской*, где P_1 и P_2 – некоторые матрицы-перестановки порядка n, если выполняется следующее условие:

$$\max_{j=1,2} \left\{ e_i^T \mathcal{M}(\widehat{G}^{P_j} A)e \right\} > 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.31}$$

т.е. при $i = 1, \dots, n$ i-ая строка по крайней мере одной из матриц $\widehat{G}^{P_j} A$, $j = 1, 2$, имеет строгое диагональное преобладание.

Здесь и в дальнейшем для заданной матрицы-перестановки $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ мы полагаем

$$\widehat{G}^P := P(D_P - L_P)^{-1} P^T, \tag{2.32}$$

где D_P и L_P определены в соответствии с (2.25). Заметим, что в силу (1.1) мы имеем

$$|\widehat{G}^P| \leqslant G^P. \tag{2.33}$$

Установим теперь поэлементное матричное неравенство

$$\mathcal{M}(\widehat{G}^P A) \geqslant G^P \mathcal{M}(A). \tag{2.34}$$

Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} P^T \mathcal{M}(\widehat{G}^P A)P &= \mathcal{M}(P^T \widehat{G}^P AP) = \mathcal{M}[(D_P - L_P)^{-1}(P^T AP)] \\ &= \mathcal{M}[I_n - (D_P - L_P)^{-1} U_P] \geqslant I_n - |(D_P - L_P)^{-1}|\, |U_P| \\ &\geqslant I_n - (|D_P| - |L_P|)^{-1} |U_P| = (|D_P| - |L_P|)^{-1} \mathcal{M}(P^T AP) \\ &= P^T [P(|D_P| - |L_P|)^{-1} P^T \mathcal{M}(A)]P = P^T [G^P \mathcal{M}(A)]P. \end{aligned}$$

Из неравенства (2.34) следует, что любая $\{P_1, P_2\}$-некрасовская матрица тем более является и слабо $\{P_1, P_2\}$-некрасовской.

Для того, чтобы получить аналог оценки (2.27) для слабо $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц, определим матрицу $\widehat{G} = \widehat{G}(P_1, P_2)$ следующим образом:
для $i = 1, \dots, n$,

i-ая строка матрицы $\widehat{G}$ совпадает с i-ой строкой $\widehat{G}^{P_1}$, если либо i-ая строка $\widehat{G}^{P_2}A$ не имеет строгого диагонального преобладания, либо

$$\frac{e_i^T|\widehat{G}^{P_1}|e}{e_i^T\mathcal{M}(\widehat{G}^{P_1}A)e} \leqslant \frac{e_i^T|\widehat{G}^{P_2}|e}{e_i^T\mathcal{M}(\widehat{G}^{P_2}A)e}, \tag{2.35}$$

и i-ая строка $\widehat{G}$ совпадает с i-ой строкой $\widehat{G}^{P_2}$, если либо i-ая строка $\widehat{G}^{P_1}A$ не имеет строгого диагонального преобладания, либо

$$\frac{e_i^T|\widehat{G}^{P_2}|e}{e_i^T\mathcal{M}(\widehat{G}^{P_2}A)e} \leqslant \frac{e_i^T|\widehat{G}^{P_1}|e}{e_i^T\mathcal{M}(\widehat{G}^{P_1}A)e}. \tag{2.36}$$

Используя неравенства (2.33) и (2.34), нетрудно установить следующий результат.

Теорема 2.6. *Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является слабо $\{P_1, P_2\}$-некрасовской, где P_1, $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – некоторые матрицы-перестановки. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{|\widehat{G}|e\}_i}{\{\mathcal{M}(\widehat{G}A)e\}_i}, \tag{2.37}$$

где матрица $\widehat{G} = \widehat{G}(P_1, P_2)$ определена выше.

Доказательство. В силу определений слабо $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрицы и матрицы $\widehat{G}$, мы имеем $\mathcal{M}(\widehat{G}A)e > 0$, что означает, что матрица $\widehat{G}A$ имеет строгое диагональное преобладание. Теперь для завершения доказательства остается лишь применить теорему 2.2. □

В завершение этого раздела мы покажем, что для произвольной $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрицы A оценка теоремы 2.6 является, вообще говоря, более точной, чем оценка теоремы 2.5.

Действительно, предположим, что при некотором фиксированном i имеет место равенство

$$e_i^T G = e_i^T G^{P_1}, \tag{2.38}$$

откуда, в силу определения матрицы G, следует, что

$$e_i^T G^{P_1}\mathcal{M}(A)e > 0. \tag{2.39}$$

Из (2.34) и (2.39) вытекает, что

$$e_i^T\mathcal{M}(\widehat{G}^{P_1}A)e \geqslant e_i^T G^{P_1}\mathcal{M}(A)e > 0. \tag{2.40}$$

Ввиду (2.33), мы также имеем

$$e_i^T|\widehat{G}^{P_1}|e \leqslant e_i^T G^{P_1} e. \tag{2.41}$$

Теперь надо рассмотреть следующие две возможности:
(i) $e_i^T\widehat{G} = e_i^T\widehat{G}^{P_1}$
и
(ii) $e_i^T\widehat{G} = e_i^T\widehat{G}^{P_2}$.

В первом случае, используя (2.40), (2.41) и (2.38), мы выводим

$$\frac{e_i^T|\widehat{G}|e}{e_i^T\mathcal{M}(\widehat{G}A)e} = \frac{e_i^T|\widehat{G}^{P_1}|e}{e_i^T\mathcal{M}(\widehat{G}^{P_1}A)e}$$

$$\leqslant \frac{e_i^T G^{P_1} e}{e_i^T G^{P_1}\mathcal{M}(A)e} = \frac{e_i^T Ge}{e_i^T G\mathcal{M}(A)e}.$$

Во втором случае, используя определение $\widehat{G}$, (2.33), (2.34) и (2.38), мы выводим

$$\frac{e_i^T|\widehat{G}|e}{e_i^T\mathcal{M}(\widehat{G}A)e} = \frac{e_i^T|\widehat{G}^{P_2}|e}{e_i^T\mathcal{M}(\widehat{G}^{P_2}A)e}$$

$$\leqslant \frac{e_i^T|\widehat{G}^{P_1}|e}{e_i^T\mathcal{M}(\widehat{G}^{P_1}A)e} \leqslant \frac{e_i^T G^{P_1} e}{e_i^T G^{P_1}\mathcal{M}(A)e} = \frac{e_i^T Ge}{e_i^T G\mathcal{M}(A)e}.$$

Таким образом, в предположении (2.38) мы имеем

$$\frac{e_i^T|\widehat{G}|e}{e_i^T\mathcal{M}(\widehat{G}A)e} \leqslant \frac{e_i^T Ge}{e_i^T G\mathcal{M}(A)e}. \tag{2.42}$$

Оставшийся случай, где

$$e_i^T G = e_i^T G^{P_2},$$

рассматривается аналогично.

Итак, неравенство (2.42) выполняется при всех $i = 1, \ldots, n$. Это в точности означает, что в применении к $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрице A теорема 2.6, применимая к более широкому классу слабо $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц, улучшает оценку теоремы 2.5, т.е. имеют место неравенства

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{|\widehat{G}|e\}_i}{\{\mathcal{M}(\widehat{G}A)e\}_i} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{Ge\}_i}{\{G\mathcal{M}(A)e\}_i}. \tag{2.43}$$

2.5. DZ и слабые DZ матрицы. В этом разделе мы рассмотрим расширение класса DZ матриц (матриц Дашница–Зусмановича). Напомним, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется DZ матрицей, если существует такое j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что

$$\Big[|a_{ii}| - r_i^j(A)\Big]\ |a_{jj}| > |a_{ij}|\ r_j(A), \quad i \neq j,\ i = 1, \dots, n. \tag{2.44}$$

Здесь и ниже мы используем обозначение

$$r_i^j(A) = r_i(A) - |a_{ij}|, \quad \text{где} \quad i \neq j.$$

Класс DZ был введен в работе [1]. Как хорошо известно, он является подклассом класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.

Ясно, что любая матрица A является DZ матрицей тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ является DZ матрицей.

Как несложно понять (см. [7]), условие (2.44) означает в точности тот факт, что матрица

$$B = T^j \mathcal{M}(A), \tag{2.45}$$

полученная в результате гауссова исключения всех ненулевых элементов $-|a_{ij}|$ j-го столбца матрицы $\mathcal{M}(A)$ посредством ее умножения слева на неотрицательную матрицу

$$T^j := I_n + \sum_{i=j} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} e_{ij}, \tag{2.46}$$

есть SDD $\mathcal{M}$-матрица.

Некоторые верхние оценки нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для DZ матрицы A рассматриваются в работе [7]. Следуя подходу, используемому в настоящей работе, применим теорему 2.2 к матрице $\mathcal{M}(A)$, полагая $G = T^j$. Тогда мы получим следующий результат.

Теорема 2.7. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – DZ матрица, удовлетворяющая условию* (2.44)*. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{1}{|a_{jj}| - r_j(A)},\ \max_{i\neq j} \frac{1 + |a_{ij}|/|a_{jj}|}{e_i T^j \mathcal{M}(A) e}\right\}$$

$$= \max\left\{\frac{1}{|a_{jj}| - r_j(A)},\ \max_{i\neq j} \frac{|a_{ij}| + |a_{jj}|}{[|a_{ii}| - r_i^j(A)]\ |a_{jj}| - |a_{ij}|\ r_j(A)}\right\}, \tag{2.47}$$

где матрица T^j определена в (2.46)*.*

Для того, чтобы обобщить класс DZ матриц, мы вводим следующее определение.

Будем говорить, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, с ненулевыми диагональными элементами является *слабой DZ матрицей*, если при некотором j, $1 \leqslant j \leqslant n$, матрица

$$\widehat{B} = \widehat{T}^j A, \tag{2.48}$$

где

$$\widehat{T}^j := I_n - \sum_{i=j} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} e_{ij}, \tag{2.49}$$

имеет строгое диагональное преобладание.

Заметим, что матрица $\widehat{B}$ является результатом гауссова исключения ненулевых элементов j-го столбца исходной матрицы A.

Применяя теорему 2.2 к слабой DZ матрице A, мы получаем следующий аналог теоремы 2.7.

Теорема 2.8. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – слабая DZ матрица, такая что матрица* (2.48) *имеет строгое диагональное преобладание. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{1}{|a_{jj}| - r_j(A)},\ \max_{i\neq j} \frac{1 + |a_{ij}|/|a_{jj}|}{e_i \mathcal{M}(\widehat{T}^j A) e}\right\}, \tag{2.50}$$

где матрица $\widehat{T}^j$ определена в (2.49).

Поскольку, как легко видеть, $|\widehat{T}^j| = T^j$ и справедливо поэлементное матричное неравенство

$$\mathcal{M}(\widehat{T}^j A) \geqslant T^j \mathcal{M}(A),$$

то всякая DZ матрица тем более является и слабой DZ матрицей, и в применении к DZ матрице A теорема 2.8 дает улучшение оценки теоремы 2.7.

В заключение этого параграфа мы упомянем, не вдаваясь в подробности, что класс DZT (Dashnic–Zusmanovich type) матриц также можно расширить аналогичным способом. При этом оценка нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для слабой DZT матрицы A, получаемая с помощью теоремы 2.2, в применении к DZT матрице A будет, по крайней мере, не хуже, чем соответствующая оценка, получаемая применением той же теоремы 2.2

к матрице сравнения $\mathcal{M}(A)$. Что касается других результатов, относящихся к оценке нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для DZT матрицы A, мы отсылаем заинтересованного читателя к статьям [7] и [15].

§3. Заключительные замечания

В §2 нами был представлен универсальный подход, основанный на теореме 2.2, к выводу верхних оценок для бесконечной нормы обратной к матрице, которую можно преобразовать в матрицу со строгим диагональным преобладанием посредством левого умножения на некоторую невырожденную матрицу G.

Мы представили расширения некоторых подклассов класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц (состоящих из некрасовских, Q-некрасовских, $\{P_1, P_2\}$-некрасовских и DZ матриц), получаемые переносом соответствующих условий с матриц сравнения на исходные матрицы. Матрицы из всех расширенных классов допускают преобразование в матрицы со строгим диагональным преобладанием посредством левого умножения на соответствующие матрицы G. Наличие этого свойства у матриц из расширенных классов позволило нам единообразно (с помощью теоремы 2.2) получить верхние оценки для бесконечной нормы их обратных. Более того, в применении к матрицам из исходных подклассов класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц новые оценки, применимые к матрицам из более широких классов, оказываются, вообще говоря, более точными, чем известные.

В этой связи представляются уместными следующие замечания.

1. Ясно, что если отвлечься от известных подклассов класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, то естественно рассматривать и матрицы преобразования G, отличающиеся от рассмотренных в данной работе. Например, в качестве G можно использовать верхнюю треугольную часть заданной матрицы, или же ее блочно диагональную часть, или ее блочную (нижнюю или верхнюю) треугольную часть и т.д. Вообще, в качестве G можно использовать любую приближенную обратную к A, если только матрица GA имеет строгое диагональное преобладание. Более того, различные строки матрицы G можно выбирать из различных соображений и независимо друг от друга.

2. Ясно, что задача нахождения матрицы G такой, что GA имеет строгое диагональное преобладание, является существенно более простой, чем нахождение точной обратной A^{-1}. Однако, если нам известна

такая приближенная обратная, то, применяя теорему 2.2, можно получить верхнюю оценку нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для произвольной невырожденной матрицы A.

3. Поскольку оценка (2.5) инвариантна относительно масштабирования строк матрицы G, мы можем дополнительно предположить, не теряя общности, что $\{GA\}_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$. В этом предположении, очевидно, чем ближе матрица GA к единичной (в смысле близости $\mathcal{M}(GA)e$ к e), тем точнее оценка (2.5). В предельном случае, когда $GA = I_n$, оценка (2.5) даёт точное значение нормы $\|A^{-1}\|_\infty$.

4. Все оценки, установленные в настоящей работе, получены с помощью теоремы 2.2, которая сама основывается на следствии 2.1 и классической оценке (1.2), которая является старейшей и простейшей оценкой бесконечной нормы обратной к SDD матрице. Однако для обратных к матрицам со строгим диагональным преобладанием известны и другие оценки, которые, вообще говоря, являются более точными, чем оценка (1.1), см., например, [4]. Ясно, что подобные оценки также можно использовать в сочетании со следствием 2.1. Оценки, получаемые таким образом, будут точнее, но одновременно и сложнее, чем оценка теоремы 2.2.

5. Подход, основанный на применении теоремы 2.2, допускает дальнейшее обобщение, если заданная матрица преобразуется к некоторой матрице из более широкого класса, чем класс SDD матриц, при условии, что новый класс инвариантен относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы и для матриц из этого класса имеются верхние оценки бесконечной нормы обратной.

В качестве примера, иллюстрирующего подобное обобщение, можно перейти от класса матриц со строгим диагональным преобладанием к более широкому классу так называемых S-SDD матриц, где S – некоторое подмножество множества индексов $\{1, \dots, n\}$, которые впервые рассматривались в работе [14]. Таким образом мы приходим к так называемым S-некрасовским матрицам, введенным в работе [13]. Действительно, как показано в [5], матрица $A = D - L - U$ является S-некрасовской тогда и только тогда, когда матрица $(|D|-|L|)^{-1}\mathcal{M}(A)$ является S-SDD матрицей. Таким образом, оценку для $\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty$, предложенную в [11], можно получить, применяя следствие 2.1 к матрице сравнения $\mathcal{M}(A)$ и используя известную оценку для нормы обратной к S-SDD матрице, впервые установленную в статье [16] (см.

также [2]). Соответственно, если матрица A с ненулевыми диагональными элементами такова, что $(D-L)^{-1}A$ есть S-SDD матрица, то в терминологии данной работы матрицу A естественно назвать *слабо S-некрасовской*. Такая матрица A будет, очевидно, невырожденной, а верхнюю оценку для $\|A^{-1}\|_\infty$ можно получить, применяя к ней следствие 2.1 и известную оценку для обратной к S-SDD матрице.

Список литературы

1. Л. С. Дашниц, М. С. Зусманович, *О некоторых критериях регулярности матриц и локализации их спектра.* — Ж. вычисл. мат. мат. физ. **10**, No. 5 (1970), 1092–1097.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки бесконечной нормы обратных к матрицам Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **419** (2013), 111–120.
4. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных для обобщенных матриц Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 182–195.
5. Л. Ю. Колотилина, *Некоторые характеризации некрасовских и S-некрасовских матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 152–165.
6. Л. Ю. Колотилина, *Новые подклассы класса $\mathcal{H}$-матриц и соответствующие оценки обратых матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 148–171.
7. Л. Ю. Колотилина, *О матрицах Дашница–Зусмановича (DZ) и матрицах типа Дашница–Зусмановича (DZT) и их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 145–165.
8. Л. Ю. Колотилина, *Матрицы некрасовского типа и оценки для их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 169–183.
9. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Ind. Appl. Math. **11** (1963), 95–104.
10. L. Cvetković, P.-F. Dai, K. Doroslovački, Y.-T. Li, *Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **219** (2013), 5020–5024.
11. L. Cvetković, V. Kostić, K. Doroslovački, *Max-norm bounds for the inverse of S-Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **218** (2012), 9498–9503.
12. L. Cvetković, V. Kostić, M. Nedović, *Generalizations of Nekrasov matrices and applications.* — Open Math. **13** (2015), 96–105.
13. L. Cvetković, V. Kostić, S. Rauški, *A new subclass of H-matrices.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 206–210.
14. Y. M. Gao, X. H. Wang, *Criteria for generalized diagonal dominant and M-matrices.* — Linear Algebra Appl. **169** (2009), 257–268.
15. C. Li, L. Cvetković, Y. Wei, J. Zhao, *An infinity norm bound for the inverse of Dashnic–Zusmanovich type matrices with applications.* — Linear Algebra Appl. **565** (2019), 99–122.
16. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of SDD and $\mathcal{S}-SDD$ matrices.* — J. Comput. Appl. Math. **206** (2007), 666–678.

17. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
18. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
19. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
20. Y. Wang, L. Gao, *An improvement of the infinity norm bound for the inverse of* $\{P_1, P_2\}$*-Nekrasov matrices.* — J. Ineq. Appl. 2019:**177** (2019).

Kolotilina L. Yu. New classes of nonsingular matrices and upper bounds for their inverses.

The paper introduces new classes of nonsingular matrices, which extend some known subclasses of the class of nonsingular $\mathcal{H}$-matrices, such as the Nekrasov, Q-Nekrasov, $\{P_1, P_2\}$-Nekrasov, and DZ matrices. For matrices in the classes introduced, upper bounds for $\|A^{-1}\|_\infty$ are derived (in a unified manner) and shown to improve the known bounds for matrices from the corresponding subclasses of nonsingular $\mathcal{H}$-matrices.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия

Поступило 30 сентября 2019 г.

E-mail: lilikona@mail.ru