Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

Л. Ю. Колотилина

МАТРИЦЫ НЕКРАСОВСКОГО ТИПА И ОЦЕНКИ ДЛЯ ИХ ОБРАТНЫХ

1. Введение. В работе рассматриваются матрицы некрасовского типа, к которым, в частности, мы относим матрицы Некрасова, P-некрасовские и $\{P_1, P_2\}$-некрасовские матрицы. Здесь и ниже, P и P_i, $i = 1, 2,$ – матрицы-перестановки, используемые для симметричной перестановки строк и столбцов заданной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. В работе приводятся основные определения и результаты, касающиеся этих матричных классов, а также устанавливаются новые результаты. В частности, получены новые верхние оценки бесконечной нормы обратных к P-некрасовским и $\{P_1, P_2\}$-некрасовским матрицам и показано, что оценки для $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц улучшают ранее известные результаты из [7] и [12]. Отметим, что результаты этой работы получены с помощью одной общей теоремы, установленной в [3] (см. теорему 5 ниже), которая дает верхнюю оценку $\|A^{-1}\|_\infty$ для невырожденной $\mathcal{H}$-матрицы A, обладающей определенными свойствами. Эта теорема обобщает результаты из работ [1] и [2] и основывается на техническом приеме, впервые предложенном в статье [1]. Заметим, что данный результат применим не только к некрасовским и Q-некрасовским матрицам, но также и к матрицам типа Дашница–Зусмановича (DZT), см. [4], которые к матрицам некрасовского типа не относятся.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 представлены известные результаты, относящиеся к матрицам Некрасова. Следующий раздел 3 относится к так называемым P-некрасовским матрицам, а в основном разделе 4 рассматриваются $\{P_1, P_2\}$-некрасовские матрицы. Для $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц установлена новая верхняя оценка бесконечной нормы обратной и показано, что она точнее, чем ранее предложенные оценки. Кроме того, показано, что эта новая оценка уточняет аналогичные оценки для P-некрасовских и некрасовских

Ключевые слова: матрица Некрасова, P-некрасовская матрица, $\{P_1, P_2\}$-некрасовская матрица, обратная матрица, бесконечная норма, верхняя оценка, матрица со строгим диагональным преобладанием (SDD), $\mathcal{M}$-матрица, $\mathcal{H}$-матрица.

матриц, а также и для матриц со строгим диагональным преобладанием. В заключительном разделе 5 предложены некоторые дальнейшие обобщения $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц.

2. Матрицы Некрасова. Напомним сперва основные определения и результаты, относящиеся к матрицам Некрасова.

Говорят, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, имеет строгое диагональное преобладание (является SDD матрицей), если

$$r_i(A) < |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$r_i(A) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

и A называется матрицей Некрасова, если

$$h_i(A) < |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где величины $h_i(A)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$h_1(A) = r_1(A), \quad h_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 2, \dots, n. \tag{2}$$

Далее мы также будем использовать векторные обозначения

$$d(A) = [a_{11}, \dots, a_{nn}]^T,$$
$$r(A) = [r_1(A), \dots, r_n(A)]^T$$

и

$$h(A) = [h_1(A), \dots, h_n(A)]^T.$$

Пусть $A = D - L - U$ – стандартное расщепление матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ на ее диагональную (D), строго нижнюю треугольную $(-L)$ и строго верхнюю треугольную $(-U)$ части соответственно. В этих обозначениях, как хорошо известно и нетрудно понять, вектор $h(A)$ можно записать в виде

$$h(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e = |D|[I_n - (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)]e, \tag{2$'$}$$

и условия (1), очевидно, равносильны соотношению

$$(|D| - |L|)^{-1}|U|e < e, \tag{3}$$

или, что эквивалентно, неравенству

$$(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)e > 0. \tag{3$'$}$$

Здесь и ниже через $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$ обозначается матрица сравнения для A,

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j; \end{cases}$$

I_n – единичная матрица порядка n; $e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор, а e_i^T, $i = 1, \dots, n$, – i-ая строка матрицы I_n.

Поскольку матрица

$$(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U| \tag{4}$$

является Z-матрицей, т.е. ее внедиагональные элементы неположительны, неравенства (1), так же как и неравенства (3) и (3$'$), выражают условие строгого диагонального преобладания в матрице (4), которая получается из матрицы сравнения $\mathcal{M}(A)$ ее умножением слева на неотрицательную нижнюю треугольную матрицу $(|D| - |L|)^{-1}$. Более того, как следует из приведенных выше выкладок, для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, i-ая строка матрицы (4) имеет строгое диагональное преобладание тогда и только тогда, когда $h_i(A) < |a_{ii}|$.

Сформулируем этот простой факт в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть задана матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$. Неравенство*

$$h_i(A) < |a_{ii}|$$

выполняется для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, тогда и только тогда, кода i-ая строка Z-матрицы (4) *имеет строгое диагональное преобладание, т.е.*

$$e_i^T(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)e > 0.$$

Следовательно, A является матрицей Некрасова тогда и только тогда, когда Z-матрица (4) *имеет строгое диагональное преобладание, т.е. она является SDD $\mathcal{M}$-матрицей.*

Напомним, что характеризация матриц Некрасова в терминах неравенств (3) и (3$'$) предложена Робером [10], который также показал, что класс матриц Некрасова содержит класс матриц со строгим диагональным преобладанием и содержится в классе невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.

Для обратной к матрице Некрасова известна следующая верхняя оценка, полученная в работе [1] и улучшающая более ранние оценки из работы [6].

Теорема 1 ([1])**.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *– матрица Некрасова порядка* $n \geqslant 2$*. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)}. \tag{5}$$

Здесь и далее величины $z_i(A)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$z_1(A) = 1, \quad z_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} z_j(A) + 1, \quad i = 2, \dots, n. \tag{6}$$

В матричных обозначениях вектор $z(A) = (z_i(A))$ может быть представлен в виде

$$z(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}e. \tag{6$'$}$$

Напомним, что, как было показано в работе [1], если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является матрицей со строгим диагональным преобладанием, а значит, тем более, и матрицей Некрасова, то оценка (5) является, вообще говоря, более точной, чем классическая оценка (см. [5, 11])

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\{|a_{ii}| - r_i(A)\}} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\{\mathcal{M}(A)e\}_i}, \tag{7}$$

справедливая для любой SDD матрицы A, т.е. для SDD матрицы A выполняется неравенство

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\{\mathcal{M}(A)e\}_i}. \tag{8}$$

3. ***P*-некрасовские матрицы.** Пусть $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица-перестановка. Следуя работе [7], будем говорить, что $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является P-некрасовской матрицей, если матрица P^TAP с симметрично переставленными строками и столбцами является матрицей Некрасова, т.е.

$$h_i(P^TAP) < |\{P^TAP\}_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{9}$$

или, в векторных обозначениях,

$$h(P^TAP) < |d(P^TAP)|. \tag{9$'$}$$

Ясно, что обычная матрица Некрасова является I_n-некрасовской матрицей, так что класс Гудкова, состоящий из всех P-некрасовских матриц для всех матриц-перестановок P (см. [7]) содержит класс матриц Некрасова в качестве подкласса.

Пусть

$$A_P := P^T AP = D_P - L_P - U_P \tag{10}$$

– стандартное расщепление матрицы A_P. Тогда, по лемме 1, матрица

$$(|D_P| - |L_P|)^{-1}\mathcal{M}(A_P) = (|D_P| - |L_P|)^{-1} P^T \mathcal{M}(A)P \tag{11}$$

является SDD $\mathcal{M}$-матрицей. Отсюда следует, что Z-матрица

$$G^P \mathcal{M}(A) = P(|D_P| - |L_P|)^{-1} P^T \mathcal{M}(A) \tag{12}$$

также является SDD $\mathcal{M}$-матрицей, где

$$G^P := P(|D_P| - |L_P|)^{-1} P^T \tag{13}$$

– неотрицательная матрица.

Теперь мы готовы представить аналог леммы 1 для P-некрасовских матриц.

Лемма 2. *Пусть $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – матрица-перестановка. Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является P-некрасовской тогда и только тогда, когда Z-матрица $G^P\mathcal{M}(A)$ является SDD $\mathcal{M}$-матрицей.*

Ясно, что любая P-некрасовская матрица A одновременно с матрицей Некрасова $P^T AP$ является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей. Кроме того, поскольку свойство строгого диагонального преобладания сохраняется при симметричной перестановке строк и столбцов матрицы, то любая SDD матрица является P-некрасовской для всех матриц-перестановок P.

Применяя теорему 1, мы легко получаем следующую верхнюю оценку для бесконечной нормы обратной к P-некрасовской матрице, которая обобщает оценку теоремы 1 на случай произвольной матрицы-перестановки P.

Теорема 2. *Пусть $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица-перестановка порядка $n \geqslant 2$ и пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – P-некрасовская матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{G^P e\}_i}{\{G^P \mathcal{M}(A)e\}_i} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{e_i^T G^P e}{e_i^T G^P \mathcal{M}(A)e}, \tag{14}$$

где матрица G^P определена в (13).

Доказательство. Используя соотношения (10), ($2'$) и ($6'$), а также равенства $Pe = P^T e = e$, мы выводим

$$|\{P^TAP\}_{ii}| - h_i(P^TAP) = |\{P^TAP\}_{ii}|\ \{(|D_P| - |L_P|)^{-1}P^T\mathcal{M}(A)e\}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$z_i(P^TAP) = |\{P^TAP\}_{ii}|\ \{(|D_P| - |L_P|)^{-1}P^Te\}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Теперь, применяя оценку (5) к матрице Некрасова P^TAP, мы получаем

$$\|A^{-1}\|_\infty = \|(P^TAP)^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{(|D_P| - |L_P|)^{-1}P^Te\}_i}{\{(|D_P| - |L_P|)^{-1}P^T\mathcal{M}(A)e\}_i}$$
$$= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{P(|D_P| - |L_P|)^{-1}P^Te\}_i}{\{P(|D_P| - |L_P|)^{-1}P^T\mathcal{M}(A)e\}_i} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{G^Pe\}_i}{\{G^P\mathcal{M}(A)e\}_i}.$$

□

Следующая теорема показывает, что для SDD матрицы оценка (14) является, вообще говоря, более точной, чем классическая оценка (7).

Теорема 3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является SDD матрицей и пусть $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – произвольная матрица-перестановка. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{G^Pe\}_i}{\{G^P\mathcal{M}(A)e\}_i} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\{\mathcal{M}(A)e\}_i}, \tag{15}$$

где матрица G^P определена в (13).

Доказательство. Поскольку SDD матрица A является P-некрасовской, то левое неравенство в (15) выполнено в силу теоремы 2.

Для доказательства правого неравенства в (15) применим неравенство (8) к матрице P^TAP и получим

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{G^Pe\}_i}{\{G^P\mathcal{M}(A)e\}_i} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\{\mathcal{M}(P^TAP)e\}_i} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\{\mathcal{M}(A)e\}_i}.$$

□

4. $\{P_1, P_2\}$-некрасовские матрицы. Рассмотрим теперь класс так называемых $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц, недавно введенных в работе Цветкович и др., см. [7], где было дано следующее определение.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрицы-перестановки. Предположим, что A не является ни P_1-некрасовской, ни P_2-некрасовской матрицей. В этом предположении матрица A называется $\{P_1, P_2\}$-некрасовской, если

$$\min\left\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\right\} < |a_{ii}|, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

т.е. выполняется векторное неравенство

$$\min\{h^{P_1}(A), h^{P_2}(A)\} < |d(A)|. \tag{16$'$}$$

Здесь и далее для заданных матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и матрицы-перестановки P порядка n мы используем обозначение

$$h^P(A) = Ph(P^TAP). \tag{17}$$

Воспользовавшись соотношениями ($2'$) и (13), нетрудно убедиться, что вектор $h^P(A)$ может быть представлен в виде

$$h^P(A) = |D|[I_n - G^P\mathcal{M}(A)]e. \tag{17$'$}$$

Заметим, что в приведенном выше определении неявно предполагается, что матрицы-перестановки P_1 и P_2 различны, что представляется ограничивающим и не совсем естественным. Также было бы более естественно, если бы классы P_1- и P_2-некрасовских матриц содержались в классе $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц.

По указанным причинам мы модифицируем определение, данное в работе [7], и опускаем то требование, что $\{P_1, P_2\}$-некрасовская матрица не должна быть ни P_1-некрасовской, ни P_2-некрасовской.

Итак в дальнейшем (как и в работе [12]) мы будем говорить, что матрица A является $\{P_1, P_2\}$-некрасовской тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию (16). Теперь, в частности, любая матрица Некрасова, которая является I_n-некрасовской, содержится в классе (I_n, I_n)-некрасовских матриц, и для любых матриц-перестановок P_1 и P_2 класс $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц содержит все P_1- и P_2-некрасовские матрицы, а также, в частности, все матрицы, имеющие строгое диагональное преобладание.

Благодаря указанной модификации определения $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц все полученные для них результаты будут применимы, в частности, к P-некрасовским, некрасовским и SDD матрицам. Заметим также, что при таком расширении класса $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц не возникает никаких изменений ни в формулировках соответствующих результатов, ни в их доказательствах.

Следует отметить, что, как установлено в работе [7], класс $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц является подклассом класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. Кроме того, в той же работе были установлены две верхние оценки для бесконечной нормы обратной к $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрице. Эти оценки являются аналогами соответствующих оценок для обратных к матрицам Некрасова, ранее предложенных в работе [6].

Недавно в работе [12] оценки из [7] были улучшены посредством прямого перенесения результатов работы [1] (о чем авторы не считают нужным упомянуть) на случай $\{P_1, P_2\}$-некрасовских матриц.

Ниже мы сперва приводим короткое доказательство того факта, что любая $\{P_1, P_2\}$-некрасовская матрица является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей. Затем, применяя известный результат общего характера, мы без труда получаем новую верхнюю оценку нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для произвольной $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрицы A и показываем, что эта оценка улучшает оценку из работы [12] и, следовательно, оценки из [7].

Заметим, что приведенное выше определение (16) и соотношение (17$'$) означают, что A является $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрицей тогда и только тогда, когда для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, i-ая строка по крайней мере одной из Z-матриц $G^{P_j}\mathcal{M}(A)$, $j = 1, 2$, имеет строгое диагональное преобладание.

Итак, $\{P_1, P_2\}$-некрасовские матрицы можно охарактеризовать следующим образом.

Лемма 3. *Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – матрицы-перестановки. Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является $\{P_1, P_2\}$-некрасовской тогда и только тогда, когда*

$$\max_{j=1,2} \{e_i^T G^{P_j}\mathcal{M}(A)e\} > 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Теперь мы готовы привести новое доказательство того факта, что любая $\{P_1, P_2\}$-некрасовская матрица является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, который был впервые установлен в [7, теоремы 2.3 и 2.4].

Теорема 4. *Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – произвольные матрицы-перестановки. Тогда любая $\{P_1, P_2\}$-некрасовская матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.*

Доказательство. Из леммы 3 следует, что из строк матриц G^{P_1} и G^{P_2} можно составить матрицу $G = G(P_1, P_2)$ таким образом, что матрица

$$B := G\mathcal{M}(A) \tag{19}$$

будет SDD $\mathcal{M}$-матрицей. Точнее, i-ая строка матрицы G, $1 \leqslant i \leqslant n$, совпадает с i-ой строкой матрицы G^{P_1}, если либо i-ая строка $G^{P_2}\mathcal{M}(A)$ не имеет строгого диагонального преобладания, либо

$$\frac{e_i^T G^{P_1} e}{e_i^T G^{P_1}\mathcal{M}(A)e} \leqslant \frac{e_i^T G^{P_2} e}{e_i^T G^{P_2}\mathcal{M}(A)e}. \tag{20}$$

Аналогично, i-ая строка матрицы G, $1 \leqslant i \leqslant n$, совпадает с i-ой строкой G^{P_2}, если либо i-ая строка $G^{P_1}\mathcal{M}(A)$ не имеет строгого диагонального преобладания, либо

$$\frac{e_i^T G^{P_2} e}{e_i^T G^{P_2}\mathcal{M}(A)e} \leqslant \frac{e_i^T G^{P_1} e}{e_i^T G^{P_1}\mathcal{M}(A)e}. \tag{20$'$}$$

Поскольку SDD матрица (19) является невырожденной, то обе матрицы G и $\mathcal{M}(A)$ также невырождены. Кроме того, из (19) следует, что

$$\mathcal{M}(A)^{-1} = B^{-1}G. \tag{21}$$

Поскольку обе матрицы B^{-1} и G неотрицательны, то матрица $\mathcal{M}(A)$ монотонна, а значит она является невырожденной $\mathcal{M}$-матрицей. Тем самым доказано, что A – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица. $\square$

При выводе новой верхней оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$ нам понадобится следующий известный результат.

Теорема 5 ([3]). *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица и пусть*

$$B = G\mathcal{M}(A), \tag{22}$$

где G – невырожденная неотрицательная матрица. Тогда

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \|[\Delta^{-1}B]^{-1}\|_\infty, \tag{23}$$

где диагональная матрица $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ определяется равенством

$$\Delta e = Ge. \tag{24}$$

Заметим, что левое неравенство в (23) – это классический результат Островского [9].

Следующая теорема 6 дает верхнюю оценку $\|A^{-1}\|_\infty$ для $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрицы A, близкую к оценке из теоремы 3 работы [12], но отличную от нее. Как будет показано ниже, оценка теоремы 6 является, вообще говоря, более точной, чем оценка из [12], а значит также и более точной, чем оценки предложенные в работе [7] (см. теорему 4 в [12]).

Теорема 6. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – $\{P_1, P_2\}$-некрасовская матрица, где P_1, $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – некоторые матрицы-перестановки. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{Ge\}_i}{\{G\mathcal{M}(A)e\}_i}, \tag{25}$$

где матрица $G = G(P_1, P_2)$ определена, как в доказательстве теоремы 4.

Доказательство. По теореме 4, A – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица, и, как отмечено в ее доказательстве, матрица $B = (b_{ij}) = G\mathcal{M}(A)$ является SDD $\mathcal{M}$-матрицей. Заметим также, что матрица G является невырожденной и неотрицательной. Таким образом, можно применить теорему 5, и мы получаем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \|(\Delta^{-1}B)^{-1}\|_\infty, \tag{26}$$

где диагональная матрица $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ определяется равенством

$$\Delta e = Ge. \tag{27}$$

Поскольку обе матрицы B и $\Delta^{-1}B$ имеют строгое диагональное преобладание, применяя к $\Delta^{-1}B$ классическую оценку (7) для обратной к SDD матрице, мы немедленно получаем неравенство

$$\|(\Delta^{-1}B)^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{Ge\}_i}{\{|b_{ii}| - r_i(B)\}}.$$

Теперь для завершения доказательства теоремы остается лишь заметить, что для $\mathcal{M}$-матрицы B мы имеем

$$\{|b_{ii}| - r_i(B)\} = \{G\mathcal{M}(A)e\}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

□

Следующая теорема показывает, что в применении к P-некрасовской матрице оценка теоремы 6 позволяет улучшить оценку теоремы 2.

Теорема 7. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* P_1, $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – *матрицы-перестановки. Предположим, что* A *является* P_1*-некрасовской матрицей. Тогда* A *одновременно является и* $\{P_1, P_2\}$*-некрасовской матрицей, и справедливы неравенства*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{Ge\}_i}{\{G\mathcal{M}(A)e\}_i} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{G^{P_1}e\}_i}{\{G^{P_1}\mathcal{M}(A)e\}_i}. \tag{28}$$

Здесь матрица $G = G(P_1, P_2)$ *определяется, как в теореме* 4, *а* G^{P_1} *определяется в соответствии с* (13).

Доказательство. Тот факт, что A является $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрицей немедленно вытекает из определений P_1-некрасовской и $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матриц. Следовательно, левое неравенство в (28) непосредственно вытекает из теоремы 6.

Пусть

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{Ge\}_i}{\{G\mathcal{M}(A)e\}_i} = \frac{\{Ge\}_k}{\{G\mathcal{M}(A)e\}_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Ввиду определения составной матрицы G, возможны следующие два случая:
(i) $e_k^T G = e_k^T G^{P_1}$,
(ii) $e_k^T G = e_k^T G^{P_2}$.

В первом случае мы имеем

$$\frac{\{Ge\}_k}{\{G\mathcal{M}(A)e\}_k} = \frac{\{G^{P_1}e\}_k}{\{G^{P_1}\mathcal{M}(A)e\}_k} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{G^{P_1}e\}_i}{\{G^{P_1}\mathcal{M}(A)e\}_i},$$

что доказывает правое неравенство в (28).

Во втором случае, в силу (20′), мы имеем

$$\frac{\{Ge\}_k}{\{G\mathcal{M}(A)e\}_k} = \frac{\{G^{P_2}e\}_k}{\{G^{P_2}\mathcal{M}(A)e\}_k} \leqslant \frac{\{G^{P_1}e\}_k}{\{G^{P_1}\mathcal{M}(A)e\}_k} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{G^{P_1}e\}_i}{\{G^{P_1}\mathcal{M}(A)e\}_i}.$$

Теорема доказана. □

Используя теоремы 3 и 7, для SDD матрицы мы получаем цепочку оценок, представленную в следующей теореме.

Теорема 8. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – матрица со строгим диагональным преобладанием. Тогда для произвольных матриц-перестановок P_1, $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеют место следующие неравенства*:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{Ge\}_i}{\{G\mathcal{M}(A)e\}_i}$$
$$\leqslant \min_{j=1,2} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{G^{P_j}e\}_i}{\{G^{P_j}\mathcal{M}(A)e\}_i} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\{\mathcal{M}(A)e\}_i}, \tag{29}$$

где $G = G(P_1, P_2)$.

В заключение этого раздела мы покажем, что оценка теоремы 6 является, вообще говоря, более точной, чем оценка теоремы 3 работы [12], которую мы приводим ниже. Поскольку, как было показано в [12], установленная там теорема 3 улучшает обе оценки предложенные в [7], оценка теоремы 6 тем более улучшает оценки из [7]. Для упрощения сравнения результатов мы переформулируем теорему из работы [12] в терминах, аналогичных использованным выше.

Теорема 9 ([12])**.** *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрицей для некоторых матриц-перестановок P_1, $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{\tilde{G}e\}_i}{\{\tilde{G}\mathcal{M}(A)e\}_i}, \tag{30}$$

где матрица $\tilde{G} = \tilde{G}(P_1, P_2)$ определяется следующим образом:
i-ая строка матрицы $\tilde{G}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, совпадает с i-ой строкой G^{P_1}, если

$$e_i^T G^{P_1}\mathcal{M}(A)e \geqslant e_i^T G^{P_2}\mathcal{M}(A)e, \tag{31}$$

и i-ая строка $\tilde{G}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, совпадает с i-ой строкой G^{P_2}, если

$$e_i^T G^{P_2}\mathcal{M}(A)e \geqslant e_i^T G^{P_1}\mathcal{M}(A)e. \tag{31$'$}$$

Теорема 10. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрицей для некоторых матриц-перестановок P_1, $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{Ge\}_i}{\{G\mathcal{M}(A)e\}_i} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{\tilde{G}e\}_i}{\{\tilde{G}\mathcal{M}(A)e\}_i}, \tag{32}$$

где матрицы $G = G(P_1, P_2)$ и $\tilde{G} = \tilde{G}(P_1, P_2)$ определены, как в теоремах 4 и 9 соответственно.

Доказательство. Пусть $1 \leqslant i \leqslant n$. Предположим сперва, что

$$e_i^T G^{P_1} \mathcal{M}(A) e \geqslant e_i^T G^{P_2} \mathcal{M}(A) e,$$

так что $e_i^T \tilde{G} = e_i^T G^{P_1}$. Если $e_i^T G^{P_2} \mathcal{M}(A) e < 0$, то

$$e_i^T G = e_i^T G^{P_1} = e_i^T \tilde{G};$$

в противном случае мы имеем

$$\frac{\{\tilde{G}e\}_i}{\{\tilde{G}\mathcal{M}(A)e\}_i} = \frac{e_i^T G^{P_1} e}{e_i^T G^{P_1} \mathcal{M}(A) e}$$

$$\geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \frac{e_i^T G^{P_1} e}{e_i^T G^{P_1} \mathcal{M}(A) e}, \ \frac{e_i^T G^{P_2} e}{e_i^T G^{P_2} \mathcal{M}(A) e} \right\} = \frac{\{Ge\}_i}{\{G\mathcal{M}(A)e\}_i}.$$

Тот случай, когда

$$e_i^T G^{P_1} \mathcal{M}(A) e \leqslant e_i^T G^{P_2} \mathcal{M}(A) e,$$

рассматривается аналогично. Теорема доказана. □

5. Некоторые обобщения. Как отмечено в работе [7], определение $\{P_1, P_2\}$-некрасовской матрицы легко обобщается на случай $\{P_1, \ldots, P_k\}$-некрасовских матриц, где $k \geqslant 2$ и $P_1, \ldots, P_k$ – некоторые матрицы-перестановки. Заметим, что в определении, принятом в данной работе, не требуется ни того, чтобы матрицы P_i, $i = 1, \ldots, n$, были бы попарно различны, ни того, чтобы они отличались от единичной матрицы.

В качестве альтернативы можно также рассмотреть и следующую конструкцию.

Пусть заданы матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, и произвольные n матриц-перестановок $P_1, \ldots, P_n$. Будем говорить, что A является $\{P_1, \ldots, P_n\}$-некрасовской, если

$$e_i^T G^{P_i} \mathcal{M}(A) e > 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{33}$$

т.е. i-ая строка матрицы $G^{P_i} \mathcal{M}(A)$ имеет строгое диагональное преобладание. В этом случае, полагая

$$G = \begin{bmatrix} e_1^T G^{P_1} \\ \cdots \\ e_n^T G^{P_n} \end{bmatrix},$$

мы получаем неотрицательную невырожденную матрицу G, причем произведение $G\mathcal{M}(A)$ есть SDD $\mathcal{M}$-матрица. Применяя теорему 5, мы немедленно получаем соответствующую верхнюю оценку для $\|A^{-1}\|_\infty$.

Основываясь на описанной конструкции, мы можем сделать еще один шаг, а именно, заменить матрицы G^{P_i} на произвольные неотрицательные матрицы G_i, $i = 1, \ldots, n$, такие что i-ая строка матрицы $G_i\mathcal{M}(A)$ имеет строгое диагональной преобладание. В этом случае, $G\mathcal{M}(A)$ – SDD матрица, откуда следует, что обе матрицы G и $\mathcal{M}(A)$ являются невырожденными.

Кроме того, в этом контексте, матрицу G можно рассматривать как приближенную обратную к $\mathcal{M}(A)$, и если выполнены условия теоремы 5, то, используя G, можно получить верхнюю оценку для нормы точной обратной A^{-1}. Ясно, что на самом деле происхождение строк матрицы G не имеет никакого значения, и каждая из них может определяться независимо от остальных. Более того, если i-ая строка исходной матрицы A при некотором i имеет строгое диагональное преобладание, то можно положить $e_i^T G = e_i^T$.

Список литературы

1. Л. Ю. Колотилина, *Оцнеки бесконечной нормы обратных к матрицам Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **419** (2013), 111–120.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных для обобщенных матриц Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 182–195.
3. Л. Ю. Колотилина, *Новые подклассы класса $\mathcal{H}$-матриц и соответствующие оценки обратных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 148–171.
4. Л. Ю. Колотилина, *О матрицах Дашница–Зусмановича (DZ) и матрицах типа Дашница– Зуслановича (DZT) и их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 145–165.
5. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Ind. Appl. Math. **11** (1963), 95–104.
6. L. Cvetković, P.-F. Dai, K. Doroslovački, Y.-T.-T. Li, *Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices.* — App. Math. Comput. **219** (2013), 5020–5024.
7. L. Cvetković, V. Kostić, M. Nedović, *Generalizations of Nekrasov matrices and applications.* — Open Math. **13** (2015), 96–105.
8. L. Cvetković, V. Kostić, S. Rauški, *A new subclass of H-matrices.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 206–210.
9. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
10. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
11. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
12. Y. Wang, L. Gao, *An improvement of the infinity norm bound for the inverse of $\{P_1, P_2\}$-Nekrasov matrices.* — J. Ineq. Appl. **177** (2019).

Kolotilina L. Yu. Nekrasov type matrices and upper bounds for their inverses.

The paper considers the so-called P-Nekrasov and $\{P_1, P_2\}$-Nekrasov matrices, defined in terms of permutation matrices P, P_1, P_2, which generalize the well-known notion of Nekrasov matrices. For such matrices A, available upper bounds on $\|A^{-1}\|_\infty$ are recalled, and new upper bounds for the P-Nekrasov and $\{P_1, P_2\}$-Nekrasov matrices are suggested. It is shown that the latter bound generally improves the earlier bounds, as well as the bound for the inverse of a P-Nekrasov matrix and the classical bound for the inverse of a strictly diagonally dominant matrix.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 26 августа 2019 г.