Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

Н. А. Колегов, О. В. Маркова

КОММУТАТИВНОСТЬ МАТРИЦ С ТОЧНОСТЬЮ ДО МАТРИЧНОГО МНОЖИТЕЛЯ

§1. Введение

Бинарные отношения на ассоциативных кольцах и, в частности, на матричной алгебре являются важным предметом исследований современной математики и активно используются в многочисленных приложениях. В данной работе изучается одно из возможных обобщений отношения коммутирования на матричной алгебре.

Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, через $M_n(\mathbb{F})$ будем обозначать алгебру $n \times n$ матриц над полем $\mathbb{F}$. Поскольку коммутативность для матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ означает равенство между AB и BA, следующий шаг состоит в том, чтобы рассматривать такие матрицы A и B, что AB и BA линейно зависимы. Скажем, что матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ *коммутируют с точностью до множителя* $\omega \in \mathbb{F}$, если $AB = \omega BA$. Говорят, что $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ *квази-коммутируют*, если найдется некоторый ненулевой скаляр, такой что A и B коммутируют с точностью до него. Для данного $\omega \in \mathbb{F}$ и матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$ можно также определить *обобщённый централизатор* $\mathcal{C}^\omega(A) = \{B \in M_n(\mathbb{F}) : AB = \omega BA\}$.

Квази-коммутативность в более широком смысле, не обязательно матричная, является основополагающим элементом для построения теории квантовых групп [12, 16], а также одним из фундаментальных соотношений в квантовой механике [26, глава 4, §14–15] и [2].

Алгебраические свойства обобщенных централизаторов и, в частности, наличие аналога теоремы о двойном централизаторе исследованы в [5, 6]. Некоторые их численные характеристики и приложения в теории кодирования рассмотрены в [1]. Вычислению длин пар квази-коммутирующих матриц посвящены работы [9–11]. Так, в работе [11] получено полное описание возможных значений длин таких пар. Заметим, что длина является нетривиальной для вычисления характеристикой, поскольку для полной матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ задача вычисления

Ключевые слова: квази-коммутативность, коммутативность с точностью до матричного множителя, централизатор, длина множеств матриц.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01124.

длины как функции порядка матриц n поставлена ещё в 1984 г. [20] и до сих пор не решена. Тем не менее, для многих матричных множеств и собственных подалгебр часто удаётся явно вычислить длину или получить хорошие оценки, см., например, работы [7, 13, 14] и библиографию в них.

Следующим уровнем обобщения для вышеозначенного отношения квази-коммутативности является изучение матриц A, B, удовлетворяющих соотношению $AB = CBA$ для некоторой фиксированной матрицы C. Подобное *отношение C-коммутативности* естественным образом возникает в теории квантовых измерений в рамках гильбертовых пространств. Так, в [2] исследован случай унитарной матрицы C. В нашей работе для $A, C \in M_n(\mathbb{F})$ мы вводим *C-централизатор*

$$\mathcal{C}(A, C) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) \mid AX = CXA\},$$

исследуем его строение, числовые характеристики, кроме того, оцениваем возможные длины пар C-коммутирующих матриц. В невырожденном случае изучение C-коммутативности можно свести к исследованию мультипликативного коммутатора. В работах [21] и [23–25] подробно рассматриваются тройки невырожденных матриц A, B, C, таких что $C = ABA^{-1}B^{-1}$, причем C коммутирует либо с одной из матриц A, B, либо с обеими.

Наша работа построена следующим образом. В §2 вводится система обозначений и основные определения. В §3 собраны необходимые вспомогательные результаты. В §4 получен критерий того, что пространство $\mathcal{C}(A, C) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) \mid AX = CXA\}$ равно $\{0\}$, а также полное его описание для диагонализуемой A, затем условие диагонализуемости удается ослабить. Вычислена размерность $\mathcal{C}(A, C)$ и получена верхняя оценка на ранги матриц из $\mathcal{C}(A, C)$. Найден критерий совпадения $\mathcal{C}(A, C)$ и $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Ann}_r(A - \lambda C)$, где Λ – специальное подмножество спектра матрицы A (см. обозначение 2.2 ниже). В последнем случае для $B \in \mathcal{C}(A, C)$ получена верхняя оценка длины $\{A, B\}$. В §5 при $AB = CBA$, $AC = CA$, $BC = CB$ выведена каноническая форма для A, B, C, а также оценки на длину $\{A, B\}$. В §6 для диагонализуемой C с двумя собственными значениями получены оценки на длину $\{A, B\}$.

§2. Используемая система обозначений

Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $\overline{\mathbb{F}}$ – его алгебраическое замыкание. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. В дальнейшем под *первообразным* (или *примитивным*) *корнем из единицы $\gamma \in \mathbb{F}$ порядка k* понимается такой корень из единицы степени k, что $\gamma^m \neq 1$ для всех $1 \leqslant m < k$. Множество всех корней степени k из единицы стандартным образом обозначим $\sqrt[k]{1}$.

Обозначим через E, E_n единичную матрицу, через O, O_n – нулевую матрицу в $M_n(\mathbb{F})$.

Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$. Её спектр обозначим через $\sigma(A) \subseteq \overline{\mathbb{F}}$. $(A)_{ij}$ или a_{ij} обозначает элемент поля, стоящий на позиции (i, j) матрицы A. Также $\mathrm{vec}(A) = (a_{11}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{nn})^T$ – вектор-столбец, полученный "вытягиванием" матрицы A по столбцам. При этом $\mathrm{col}_j(A)$, $\mathrm{row}_i(A)$ вектор-строка и вектор-столбец, равные j-му столбцу и i-й строке матрицы A соответственно. Через $\deg(A)$ мы обозначаем степень минимального многочлена матрицы A.

В дальнейшем нам понадобится *правый аннулятор* матрицы A, а именно $\mathrm{Ann}_r(A) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) | AX = O\}$. Ядро матрицы всегда предполагается правым $\mathrm{Ker}(A) = \{v \in \mathbb{F}^n | Av = 0\}$. Определим также *централизатор* (*коммутант*) матрицы A как $\mathcal{C}(A) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) | AX = XA\}$.

Для матриц G, F размеров $r \times s$ и $p \times q$ соответственно их *тензорным (кронекеровским) произведением* $G \otimes F$ будем считать матрицу размера $rp \times sq$, которая в блочной записи имеет вид

$$\begin{pmatrix} g_{11}F & \dots & g_{1n}F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}F & \dots & g_{nn}F \end{pmatrix}.$$

Определение 2.1. Для $A, C \in M_n(\mathbb{F})$ введём *C-централизатор*

$$\mathcal{C}(A, C) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) \mid AX = CXA\}.$$

Обозначение 2.2. Пусть $A, C \in M_n(\mathbb{F})$, тогда

$$\Lambda(A, C) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \det(A - \lambda C) = 0\}.$$

Далее $\langle U \rangle$ обозначает линейную оболочку множества U в некотором понятном из контекста линейном пространстве над полем $\mathbb{F}$. Под термином *алгебра* подразумевается ассоциативная конечномерная алгебра с единицей.

Для произвольного конечного подмножества $\mathcal{S} = \{A_1, \dots, A_h\} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ определим его длину. *Длина* слова $A_{i_1} \dots A_{i_t}$, где $A_{i_j} \in \mathcal{S}$, равна t. Договоримся считать единичную матрицу E (пустое слово) словом от элементов $\mathcal{S}$ *длины* 0.

Пусть $\mathcal{S}^t$, $t \geqslant 0$, обозначает множество всех слов в алфавите $\mathcal{S}$ длины не большей t. Положим $\mathcal{L}_t(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^t \rangle$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle E \rangle \cong \mathbb{F}$.

Пусть также $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ обозначает линейную оболочку всех слов в алфавите $\mathcal{S}$. Отметим, что пространство $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ есть алгебра, порождённая множеством $\mathcal{S}$.

Определение 2.3. *Длиной множества* $\mathcal{S} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ называется число $l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{L}(\mathcal{S})\}$.

Определение 2.4. *Длиной алгебры* $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ называется число $l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$.

Слово $v \in \mathcal{S}^t$ называется *сократимым над* $\mathcal{S}$, если существует номер $i < t$ такой, что $v \in \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$, т.е. v представляется в виде линейной комбинации слов меньшей длины. В противном случае назовем его *несократимым над* $\mathcal{S}$.

§3. Вспомогательные результаты

Теорема 3.1 ([19, стр. 954, формула (2.10)]). *Пусть A, B, C – матрицы над полем $\mathbb{F}$ размеров $m \times n$, $n \times s$, $s \times t$ соответственно. Тогда*

$$\mathrm{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{vec}(B).$$

Теорема 3.2 ([23, стр. 316, теорема 3]). *Пусть $\overline{\mathbb{F}} = \mathbb{F}$, матрицы $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$ невырожденные, причём $C = ABA^{-1}B^{-1}$, $AC = CA$, $BC = CB$.*

1. *Тогда существует такая невырожденная матрица S, что*

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_s), \quad S^{-1}BS = \mathrm{diag}(B_1, \ldots, B_s),$$

$$S^{-1}CS = \mathrm{diag}(C_1, \ldots, C_s).$$

При этом для всех $i \in \{1, \ldots, s\}$ имеем $A_i, B_i, C_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$, $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i = n$ и, кроме того, существуют числа $k_i | n_i$ такие, что

(a) $\sigma(C_i) = \{\gamma_i\}$, $\gamma_i \in \sqrt[k_i]{1}$ *– примитивный;*
(b) *найдётся $a_i \in \mathbb{F}$ такое, что $\sigma(A_i) = \sqrt[k_i]{a_i}$, все собственные числа имеют одинаковую алгебраическую кратность;*
(c) *найдётся $b_i \in \mathbb{F}$ такое, что $\sigma(B_i) = \sqrt[k_i]{b_i}$, все собственные числа имеют одинаковую алгебраическую кратность;*
(d) $(\gamma_i, a_i, b_i) \neq (\gamma_j, a_j, b_j)$ *при $i \neq j$.*

2. *для всех* $i \in \{1, \dots, s\}$ *и* $\beta \in \sigma(B_i)$ *существует такая невырожденная матрица* $T \in M_{n_i}(\mathbb{F})$, *что*

$$T^{-1}A_iT = \begin{pmatrix} O & E_{n/k_i} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & E_{n/k_i} & O \\ \widetilde{A}_i & O & \dots & O & O \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}B_iT = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_i & O & \dots & O \\ O & \widetilde{C}_i\widetilde{B}_i & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O & \widetilde{C}_i^{k_i-1}\widetilde{B}_i \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}C_iT = \mathrm{diag}(\widetilde{C}_i, \dots, \widetilde{C}_i),$$

где $\widetilde{A}_i, E_{n/k_i}, \widetilde{B}_i, \widetilde{C}_i \in M_{n_i/k_i}(\mathbb{F})$, *причём выполнены следующие соотношения:*

(a) $\widetilde{C}_i^{k_i} = \widetilde{A}_i\widetilde{B}_i\widetilde{A}_i^{-1}\widetilde{B}_i^{-1}$, $\widetilde{C}_i\widetilde{B}_i = \widetilde{B}_i\widetilde{C}_i$, $\widetilde{C}_i\widetilde{A}_i = \widetilde{A}_i\widetilde{C}_i$;

(b) $\sigma(\widetilde{A}_i) = \sigma(A_i)$, $\sigma(\widetilde{C}_i) = \sigma(C_i)$;

(c) $\sigma(\widetilde{B}_i) = \{\beta\}$.

Доказательство. Указанная форма матриц получается из доказательства [23, стр. 322–323 до 2 абзаца включительно] переобозначением $\overline{A}$ как $\widetilde{A}$. □

§4. C-централизатор диагонализуемой матрицы A

Отметим, что соотношение $AX = CXA$ есть частный случай обобщённого матричного уравнения Сильвестра. В том случае, когда основное поле – это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, известны различные приближенные методы его решения, см., например, работу [22] и ее библиографию. В чисто алгебраическом контексте хотелось бы иметь точное решение. Следующая теорема решает данную задачу для диагонализуемой матрицы A.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– поле,* $A, C \in M_n(\mathbb{F})$, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{F}$. *Тогда*

1. $\mathcal{C}(A, C) = \{O\}$ *тогда и только тогда, когда* $\Lambda(A, C) = \varnothing$.

2. *Пусть* $A = Q^{-1}DQ$ *с произвольной матрицей перехода* Q *для* $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$. *Тогда*

$$\mathcal{C}(A, C) = \{YQ \mid \mathrm{col}_i(Y) \in \mathrm{Ker}(A - d_iC),\ i = 1, \dots, n\}.$$

Множество, определяемое последним равенством, не зависит от выбора матрицы перехода Q.

Доказательство. 1. Воспользуемся теоремой 3.1 для сведения матричного уравнения к линейной системе для n^2 переменных. Тогда уравнение $AX = CXA$ равносильно однородной линейной системе с матрицей $E \otimes A - A^T \otimes C$ и вектором неизвестных $\mathrm{vec}(X)$. Пусть J_A – жорданова нормальная форма матрицы A, причем $A = Q^{-1}J_AQ$, где $Q \in M_n(\mathbb{F})$, $X = Q^{-1}ZQ$, $C = Q^{-1}\widetilde{C}Q$. Тогда равенство $AX = CXA$ равносильно $J_AZ = \widetilde{C}ZJ_A$. В силу вышесказанного, матрица соответствующей линейной системы имеет вид $E \otimes J_A - J_A^T \otimes \widetilde{C}$. Полагая, что J_A – нижнетреугольная матрица с диагональю $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, можно записать

$$E \otimes J_A - J_A^T \otimes \widetilde{C} = \begin{pmatrix} J_A & O & \ldots & O \\ O & J_A & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & J_A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1\widetilde{C} & * & \ldots & * \\ O & \lambda_2\widetilde{C} & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & \lambda_n\widetilde{C} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_A - \lambda_1\widetilde{C} & * & \ldots & * \\ O & J_A - \lambda_2\widetilde{C} & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & J_A - \lambda_n\widetilde{C} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Наличие ненулевого решения у однородной линейной системы равносильно условию $\det(E \otimes J_A - J_A^T \otimes \widetilde{C}) = 0$. Это, в силу приведенных выше выкладок, эквивалентно тому, что $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : \det(J_A - \lambda_i\widetilde{C}) = 0$. Однако $\det(J_A - \lambda_i\widetilde{C}) = \det(Q^{-1}(J_A - \lambda_i\widetilde{C})Q) = \det(A - \lambda_iC)$, что завершает доказательство пункта 1.

2. В обозначениях предыдущего пункта $J_A = D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Тогда из блочно-диагонального вида последней матрицы в равенстве (4.1) следует, что $X = Q^{-1}ZQ$, где i-й столбец матрицы Z есть произвольный вектор из

$$\mathrm{Ker}(J_A - \lambda_i\widetilde{C}) = \mathrm{Ker}(D - d_i\widetilde{C}) = Q\mathrm{Ker}(Q^{-1}(D - d_i\widetilde{C})Q) = Q\mathrm{Ker}(A - d_iC).$$

Остаётся только обозначить $Q^{-1}Z = Y$. Поскольку в процессе решения матричного уравнения все преобразования были равносильны, то итоговая формула для C-централизатора не зависит от выбора матрицы перехода Q. □

Условие диагонализуемости матрицы A можно немного ослабить.

Следствие 4.2. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $A, C \in M_n(\mathbb{F})$, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{F}$. Пусть жорданова нормальная форма J_A матрицы A обладает следующим свойством: для каждого $\lambda \in \sigma(A)$ такого, что найдётся клетка размера не менее 2, выполнено условие $\det(A - \lambda C) \neq 0$. Положим $A = Q^{-1} J_A Q$ с произвольной матрицей перехода Q, где J_A имеет диагональ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Тогда*

$$\mathcal{C}(A, C) = \{YQ \mid \operatorname{col}_i(Y) \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_i C),\ i = 1, ..., n\}. \tag{4.2}$$

Множество, определяемое последним равенством, не зависит от выбора матрицы перехода Q.

Доказательство. Рассмотрим последнюю матрицу в равенстве (4.1). Для всех $\lambda \in \sigma(A)$, таких что все их жордановы клетки имеют размер 1, соответствующие столбцы матрицы $Z = QXQ^{-1}$ вычисляются, как в предыдущей теореме 4.1. Оставшиеся собственные числа A удовлетворяют условию $\det(A - \lambda C) \neq 0$. Тогда, в силу блочно-диагонального вида последней матрицы в равенстве (4.1), получим, что все соответствующие столбцы матрицы Z обращаются в ноль. Остается произвести преобразования из доказательства пункта 2 предыдущей теоремы 4.1. $\square$

Предложение 4.3. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $A, C \in M_n(\mathbb{F})$, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{F}$. Предположим, что матрица A диагонализуема или удовлетворяет условиям следствия 4.2. Если $\kappa(\lambda)$ – алгебраическая кратность λ как собственного числа матрицы A, то*

$$\dim\ \mathcal{C}(A, C) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \kappa(\lambda) \cdot \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda C).$$

Доказательство. Обозначим $\Lambda = \Lambda(A, C)$. Проведем доказательство, построив базис заявленной мощности. Если $\Lambda = \varnothing$, то все очевидно. Пусть $\Lambda \neq \varnothing$. Обозначим $m_\lambda = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda C)$. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ введем множество $\Upsilon_\lambda \subseteq \{1, \ldots, n\}$ всех номеров столбцов матриц из $\mathcal{C}(A, B)$, соответствующих собственному числу λ согласно формуле (4.2) (соответствие задается индексом i). Ясно, что $|\Upsilon_\lambda| = \kappa(\lambda)$. Введем отображение $\psi : \mathbb{F}^n \times \{1, \ldots, n\} \to M_n(\mathbb{F})$ такое, что если $\psi(v, l) = H$, то

$$\forall i \in \{1, \ldots n\} :\ \operatorname{col}_i(H) = \begin{cases} v, & \text{если } i = l; \\ \overrightarrow{0}, & \text{если } i \neq l. \end{cases}$$

Теперь для каждого $\lambda \in \Lambda$ выберем базис $\{v_i^\lambda\}_{i=1}^{m_\lambda}$ пространства $\operatorname{Ker}(A - \lambda C)$. Мы утверждаем, что базис $\mathcal{C}(A, C)$ образуют матрицы из множества

$$\Delta = \{\psi(v_i^\lambda, l)Q \mid \lambda \in \Lambda,\ i \in \{1, \ldots, m_\lambda\},\ l \in \Upsilon_\lambda\},$$

где Q – произвольная матрица перехода к жордановой нормальной форме для матрицы A, т.е. $A = Q^{-1}J_A Q$. Действительно, в силу нашего построения, а также теоремы 4.1 и следствия 4.2, имеем $\langle\Delta\rangle = \mathcal{C}(A, C)$. Проверим теперь линейную независимость матриц из Δ. Пусть для некоторых $\alpha_{il}^\lambda \in \mathbb{F}$ выполнено

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i=1}^{m_\lambda}\sum_{l\in\Upsilon_\lambda} \alpha_{il}^\lambda\ \psi(v_i^\lambda, l)Q = O.$$

Умножая справа на Q^{-1} и рассматривая это равенство для отдельных столбцов, получаем

$$\sum_{i=1}^{m_\lambda} \alpha_{il}^\lambda v_i^\lambda = 0,\ \lambda \in \Lambda, \quad l \in \Upsilon_\lambda.$$

Откуда, в силу линейной независимости v_i^λ, получим, что все $\alpha_{il}^\lambda = 0$, что и требовалось. Теперь заметим, что

$$\dim \mathcal{C}(A, C) = |\Delta| = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\Upsilon_\lambda| m_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} \kappa(\lambda) \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda C).$$

Поскольку для всех $\lambda \in \sigma(A) \setminus \Lambda$ выполнено $\operatorname{Ker}(A – \lambda C) = \{0\}$, то суммирование в последней сумме можно записать по всему множеству $\sigma(A)$. □

Предложение 4.4. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $A, C \in M_n(\mathbb{F})$, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{F}$ и пусть A диагонализуема или удовлетворяет условиям следствия* 4.2. *Если $\kappa(\lambda)$ – алгебраическая кратность λ как собственного числа матрицы A, то для любой матрицы $B \in \mathcal{C}(A, C)$ имеет место оценка*

$$\operatorname{rk}\ B \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda(A,C)} \min\{\kappa(\lambda), \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda C)\}.$$

В частности, если существует такое $\lambda \in \sigma(A)$, что

$$\kappa(\lambda) > \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda C),$$

то $\mathcal{C}(A, C)$ есть пространство вырожденных матриц.

Доказательство. Положим $\Lambda = \Lambda(A, C)$. Пусть матрица $B \in \mathcal{C}(A, C)$ имеет вид, как в теореме 4.1 или следствии 4.2. Без ограничения общности можно считать, что $Q = E$, так как $\mathrm{rk}\ B = \mathrm{rk}\ BQ^{-1}$. Воспользуемся тем фактом, что ранг матрицы равен рангу системы векторов-столбцов. Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}\ B &= \dim\langle\{\mathrm{col}_i(B) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}\rangle \\ &= \dim\langle \bigcup_{\lambda\in\sigma(A)} \{\mathrm{col}_i^\lambda(B) \mid i \in \{1, \ldots, \kappa(\lambda)\}\}\rangle,\end{aligned}$$

где верхний индекс λ для col_i^λ означает, что столбец соответствует $\lambda \in \sigma(A)$ согласно формуле (4.2). Далее,

$$\dim\langle \bigcup_{\lambda\in\sigma(A)} \{\mathrm{col}_i^\lambda(B) \mid i \in \{1, \ldots, \kappa(\lambda)\}\}\rangle \leqslant \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \dim\langle\{\mathrm{col}_i^\lambda(B) \mid i \in \{1, \ldots, \kappa(\lambda)\}\}\rangle$$

Поскольку $\mathrm{col}_i^\lambda(B) \in \mathrm{Ker}(A-\lambda C)$, то $\dim\{\mathrm{col}_i^\lambda(B) \mid i \in \{1, \ldots, \kappa(\lambda)\}\} \leqslant \min\{\kappa(\lambda), \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda C)\}$. Теперь осталось заметить, что суммирование по $\lambda \in \sigma(A)$ можно заменить на $\lambda \in \Lambda(A, C)$ из определения $\Lambda(A, C)$. В том случае, когда $\exists \lambda \in \sigma(A) : \kappa(\lambda) > \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda C)$, имеем

$$\mathrm{rk}\ B \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda(A,C)} \min\{\kappa(\lambda), \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda C)\} < \sum_{\lambda\in\Lambda} \kappa(\lambda) \leqslant \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \kappa(\lambda) = n. \quad \square$$

Предложение 4.5. *Пусть $\mathbb{F}$– поле, $A, C \in M_n(\mathbb{F})$, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{F}$. Предположим, что A диагонализуема или удовлетворяет условиям следствия* 4.2. *Обозначим $\Lambda = \Lambda(A, C)$. Пусть $\Lambda \neq \varnothing$. Тогда*

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ann}_r(A - \lambda C) \subseteq \mathcal{C}(A, C) \subseteq \langle \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ann}_r(A - \lambda C)\rangle.$$

При этом следующие условия эквивалентны:

1. $\mathcal{C}(A, C) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ann}_r(A - \lambda C)$*;*

2. *для любых* $\lambda, \mu \in \Lambda : \mathrm{Ann}_r(A - \lambda C) = \mathrm{Ann}_r(A - \mu C)$; 3. *выполнено хоть одно из двух условий:*

(a) $|\Lambda| = 1$*;*

(b) *выполнено одно из следующих эквивалентных соотношений:*

(i) $\mathcal{C}(A, C) = \mathrm{Ann}_r(A) \cap \mathrm{Ann}_r(C)$*;*

(ii) $\forall \lambda \in \Lambda \quad \mathrm{Ann}_r(A) \cap \mathrm{Ann}_r(C) = \mathrm{Ann}_r(A - \lambda C)$.

Доказательство. Сами включения сразу следуют из теоремы 4.1 и следствия 4.2. Докажем вторую часть предложения.

($1 \Leftrightarrow 2$) Достаточность сразу получается из упомянутого двойного включения. Докажем необходимость. В этом случае из условия

$$Y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ann}_r(A - \lambda C),$$

откуда, очевидно, следует

$$\mathrm{col}_i(Y) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ker}(A - \lambda C), \ i = 1, \ldots, n,$$

затем, по формуле (4.2), для всех $\mu \in \Lambda$ имеем

$$\mathrm{Ker}(A - \mu C) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ker}(A - \lambda C).$$

Значит, все $\mathrm{Ker}(A-\lambda C)$, $\lambda \in \Lambda$, совпадают. Поэтому все $\mathrm{Ann}_r(A-\lambda C)$, $\lambda \in \Lambda$, совпадают.

($1 \Rightarrow$ (3.a или 3.b.i)) Предположим, что пункт 3.a не выполнен. Тогда $\exists \lambda, \mu \in \Lambda : \ \ \mu \neq \lambda$. Берём произвольную матрицу $X \in \mathcal{C}(A, C)$. По условию, $(A - \mu C)X = O$ и $(A - \lambda C)X = O$. Вычитая из одного равенства другое, получим $(\lambda - \mu)CX = O$, т.е. $CX = O$, но тогда $AX = CXA = O$ и поэтому $\mathcal{C}(A, C) \subseteq \mathrm{Ann}_r(A) \cap \mathrm{Ann}_r(C)$. Обратное включение очевидно.

(3.b.ii $\Rightarrow$ 3.b.i) Двойное включение из первой части теоремы превращается в требуемое равенство.

($3.\mathrm{b.i} \Rightarrow 1, (3.\mathrm{b.i}\&1) \Rightarrow 3.\mathrm{b.ii}$) Из следующей цепочки включений получаем 1:

$$\mathcal{C}(A, C) = \mathrm{Ann}_r(A) \cap \mathrm{Ann}_r(C) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ann}_r(A - \lambda C) \subseteq \mathcal{C}(A, C).$$

Далее, пользуясь эквивалентностью условий 1 и 2, получаем

$$\mathcal{C}(A, C) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ann}_r(A - \lambda C) = \mathrm{Ann}_r(A - \lambda C).$$

Следовательно, выполнено условие 3.b.ii.

(3.a $\Rightarrow$ 2) Очевидно. $\square$

Замечание 4.6. Обратим внимание на тот факт, что если выполнены условия предложения 4.5, то $\mathcal{C}(A, C)$ является алгеброй. Однако пример $C = E$, $\mathcal{C}(A, C) = \mathcal{C}(A)$ показывает, что предыдущее предложение не даёт необходимого условия замкнутости $\mathcal{C}(A, C)$ относительно матричного произведения.

Следствие 4.7. *Пусть* $\mathbb{F}$*– произвольное поле,* $A, C \in M_n(\mathbb{F})$*,* $A \neq O$*,* $\Lambda(A, C) \neq \varnothing$*,* A *диагонализуема над* $\overline{\mathbb{F}}$ *или удовлетворяет следствию* 4.2 *над* $\overline{\mathbb{F}}$*. Пусть также выполнено хоть одно из эквивалентных условий* 1–3 *предложения* 4.5 *над* $\overline{\mathbb{F}}$*. Возьмём произвольную* $B \in \mathcal{C}(A, C) \setminus \{O\}$*. Тогда*

$$l(\{A, B\}) \leqslant \deg(A) + \deg(B) - 2 \leqslant n.$$

Доказательство. Поскольку линейная зависимость над полем равносильна линейной зависимости над любым расширением этого поля, то можно считать, что $\sigma(A) \subseteq \mathbb{F}$. Обозначим $m = \deg(A) + \deg(B) - 1$. В силу предложения 4.5, имеются две возможности.

Случай 1. Пусть $\Lambda(A, C) = \{\lambda\}$. В силу теоремы 4.1 и следствия 4.2, можно считать, что

$$A = \begin{pmatrix} \lambda E_k & O \\ O & G \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} H & O \\ F & O \end{pmatrix},$$

где k – алгебраическая кратность λ как собственного значения A, $E_k, H \in M_k(\mathbb{F})$. Следовательно, $BA = \lambda B$. Теперь рассмотрим произвольное слово над $\{A, B\}$ длины m. Если оно содержит BA в качестве подслова, то оно сократимо ввиду предыдущего. В противном случае, имеем слово одного из следующих видов: A^m, B^m, $A^j B^i$, $i + j = m$. Каждое из них сократимо ввиду теоремы Гамильтона–Кэли. Для завершения доказательства остаётся заметить, что $\deg(A) \leqslant n - k + 1$, $\deg(B) \leqslant k + 1$.

Случай 2. Имеем $B \in \operatorname{Ann}_r(A) \cap \operatorname{Ann}_r(C)$. Поскольку $AB = O$, то, рассуждая в точности, как в предыдущем пункте (поменяв A и B местами), получим $l(\{A, B\}) \leqslant m-1$. Оставшееся неравенство получается следующим образом:

$$\dim \operatorname{Ker}(A) \geqslant \operatorname{rk} B \Rightarrow \operatorname{rk} A + \dim \operatorname{Ker}(A) \geqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$
$$\Rightarrow n \geqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B \Rightarrow n \geqslant \deg(A) - 1 + \deg(B) - 1. \square$$

§5. Изучение C-коммутативности в случае, когда матрица C коммутирует с A и B

Изучим соотношение $AB = CBA$ в том случае, когда выполнено естественное условие из случая $C = \alpha E$, т.е. будем предполагать, что $A, B \in \mathcal{C}(C)$, или $AC = CA$, $BC = CB$. В этом и следующем параграфах приводятся несколько обобщений результатов из работы [10]. Поэтому в дальнейшем мы неоднократно будем ссылаться на утверждения, а также части доказательств из [10].

Теорема 5.1. *Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$, $A, C, B \in M_n(\mathbb{F})$, $AB = CBA$, $AC = CA$, $BC = CB$. Тогда найдётся невырожденная матрица U такая, что*

$$U^{-1}CU = \begin{pmatrix} O_{r_1} & * & * \\ O & R & * \\ O & O & C' \end{pmatrix}, \quad U^{-1}AU = \begin{pmatrix} X & * & * \\ O & P & * \\ O & O & A' \end{pmatrix},$$

$$U^{-1}BU = \begin{pmatrix} Y & * & * \\ O & Q & * \\ O & O & B' \end{pmatrix}.$$

(1) *$O_r, X, Y \in M_{r_1}(\mathbb{F})$, $0 \leqslant r_1 \leqslant n$, O_{r_1} – нулевая матрица, X, Y верхнетреугольные, $XY = O$, $(YX)^n = O$.*

(2) *$P, Q, R \in M_{r_2}(\mathbb{F})$, $0 \leqslant r_2 \leqslant n$, P, Q, R верхнетреугольные, $(PQ)^n = (QP)^n = O$, R невырожденная.*

(3) *$A', B', C' \in M_m(\mathbb{F})$, $0 \leqslant m \leqslant n$, $r_1 + r_2 + m = n$, A', B', C' невырожденные, а значит, удовлетворяют условиям теоремы* 3.2.

Доказательство. Если C невырожденная, то $r_1 = 0$. Предположим, что $\mathrm{Ker}(C) \neq \{0\}$. Если $C = O$, то $r_2 = m = 0$, и все следует из [10, стр. 7, лемма 2.3 доказательство, пункт 2]. Иначе $\mathrm{Ker}(C) \ncong \mathbb{F}^n$, но оно является инвариантным подпространством для матриц A, B, так как $AC = CA$, $BC = CB$. Поэтому найдётся невырожденная матрица U_1 такая, что

$$U_1^{-1}CU_1 = \begin{pmatrix} O_{r_1} & * \\ O & C'' \end{pmatrix}, \ U_1^{-1}AU_1 = \begin{pmatrix} X & * \\ O & A'' \end{pmatrix}, \ U_1^{-1}BU_1 = \begin{pmatrix} Y & * \\ O & B'' \end{pmatrix}.$$

Поскольку $XY = O$, то, в силу [10, стр. 7, лемма 2.3 доказательство, пункт 2], можно считать, что X, Y верхнетреугольные. По построению C'' невырожденная и $A''B'' = C''B''A''$, $C''A'' = A''C''$, $C''B'' = B''C''$. Если A'' и B'' обе невырожденные, то $r_2 = 0$. Пусть хотя бы одна из матриц вырожденная. Без ограничения общности полагаем $\det(B'') =$

0 (случай $\det(A'') = 0$ разбирается аналогично). Тогда $\exists v \in \mathrm{Ker}(B'')$: $v \neq 0$. В силу того, что $B''(A''v) = C''^{-1}A''B''v = 0$, получим, что $V = \langle\{v, A''v, A''^2v, \ldots\}\rangle$ есть инвариантное подпространство для A'' и B''. Следовательно $\exists w \in V$, $\exists\lambda \in \mathbb{F}$: $A''w = \lambda w$, $B''w = 0$. Далее, ввиду $B''C''w = C''B''w = 0$ и $A''C''w = C''A''w = \lambda C''w$, получим аналогично, что пространство $W = \langle\{w, C''w, C''^2w, \ldots\}\rangle$ инвариантно относительно A'', B'', C''. Значит, $\exists u \in W$, $\exists\mu \in \mathbb{F}$: $B''u = 0$, $A''u = \lambda u$, $C''u = \mu u$. Тогда найдётся невырожденная U_2 такая, что

$$U_2^{-1}C''U_2 = \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & C_1'' \end{pmatrix}, \quad U_2^{-1}A''U_2 = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1'' \end{pmatrix}, \quad U_2^{-1}B''U_2 = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & B_1'' \end{pmatrix}.$$

Далее, рассуждая по индукции, приходим к форме описанной выше. □

Следствие 5.2. *Пусть $A, C, B \in M_n(\mathbb{F})$, $AB = CBA$, $AC = CA$, $BC = CB$, $(AB)^n = (BA)^n = O$. Тогда $l(\{A, B\}) \leqslant n-1$, $l(\{A, B, C\}) \leqslant n-1$ и, более того, $l(\mathcal{L}(\{A, B\})) \leqslant n-1$ и $l(\mathcal{L}(\{A, B, C\})) \leqslant n-1$.*

Доказательство. Пусть сначала $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$. Воспользуемся теоремой 5.1. Очевидно, $m = 0$. Тогда алгебры $\mathcal{L}(\{A, B\}) \subseteq \mathcal{L}(\{A, B, C\})$ изоморфны некоторым подалгебрам $T_n(\mathbb{F})$. Значит, согласно [8, следствие 4.3], $l(\mathcal{L}(\{A, B, C\})) \leqslant n-1$ и $l(\mathcal{L}(\{A, B\})) \leqslant n-1$. В случае произвольного поля воспользуемся тем фактом, что длина алгебры не убывает при переходе к алгебраическому замыканию поля [8, предложение 5.1]. В итоге,

$$l(\{A, B\}) \leqslant l_{\mathbb{F}}(\mathcal{L}(\{A, B\})) \leqslant l_{\overline{\mathbb{F}}}(\mathcal{L}(\{A, B\})) \leqslant n-1,$$
$$l(\{A, B, C\}) \leqslant l_{\mathbb{F}}(\mathcal{L}(\{A, B, C\})) \leqslant l_{\overline{\mathbb{F}}}(\mathcal{L}(\{A, B, C\})) \leqslant n-1.$$ □

Обозначение 5.3.

$$\mathcal{K}(C) = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists\gamma \in \sigma(C) : \ \gamma \in \sqrt[k]{1} - \text{примитивный}\}.$$

Теорема 5.4. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$ невырожденные, $AB = CBA$, $AC = CA$, $AB = BA$. Тогда*

$$l(\{A, B\}) \geqslant \max\{2k - 2 \mid k \in \mathcal{K}(C)\}.$$

Доказательство. Поскольку длина семейства матриц не меняется при переходе к расширению поля, то можно считать, что матрицы A, B, C имеют тот же вид, что и в теореме 3.2.

Случай $s = 1$. Достаточно показать, что слово $B^{k-1}A^{k-1}$ несократимо. Пусть верно обратное, т.е. $B^{k-1}A^{k-1} \in \mathcal{L}^{2k-3}(\{A, B\})$. Рассуждая как в [10, доказательство леммы 3.4, пункт I], с учетом расположения нулей в матрице A нетрудно показать, что $B^{k-1}A^{k-1}$ есть линейная комбинация слов, в которых A встречается ровно $k-1$ раз. Отсюда, учитывая, что $AB = CBA$ и $C \in \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$, получим

$$B^{k-1}A^{k-1} = \sum_{t=0}^{k-2} \sum_{m=0}^{t(k-1)} \alpha_{m,t} C^m B^t A^{k-1}$$

для некоторых $\alpha_{m,t} \in \mathbb{F}$. Разделим обе части равенства на A^{k-1} справа и сгруппируем слагаемые по степеням B:

$$B^{k-1} = \sum_{t=0}^{k-2} \Big(\sum_{m=0}^{t(k-1)} \alpha_{m,t} C^m \Big) B^t$$

Теперь воспользуемся блочным видом матриц B, C (пункт 2 теоремы 3.2)

$$(\widetilde{B}\widetilde{C}^h)^{k-1} = \sum_{t=0}^{k-2} \Big(\sum_{m=0}^{t(k-1)} \alpha_{m,t} \widetilde{C}^m \Big) (\widetilde{B}\widetilde{C}^h)^t, \quad h = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Далее учтём, что $\widetilde{B}\widetilde{C} = \widetilde{C}\widetilde{B}$, $\sigma(\widetilde{B}) = \{\beta\}$, $\sigma(\widetilde{C}) = \{\gamma\}$:

$$(\beta\gamma^h)^{k-1} = \sum_{t=0}^{k-2} \Big(\sum_{m=0}^{t(k-1)} \alpha_{m,t} \gamma^m \Big) (\beta\gamma^h)^t, \quad h = 0, 1, \ldots, k-1,$$

$$\gamma^{h(k-1)} = \sum_{t=0}^{k-2} \Big(\sum_{m=0}^{t(k-1)} \alpha_{m,t} \gamma^m \Big) \beta^{t-k+1} \gamma^{ht}, \quad h = 0, 1, \ldots, k-1,$$

$$\gamma^{h(k-1)} = \sum_{t=0}^{k-2} \nu_t \gamma^{ht}, \quad h = 0, 1, \ldots, k-1,$$

где $\nu_t = \sum\limits_{m=0}^{t(k-1)} \alpha_{m,t} \gamma^m \beta^{t-k+1}$. Мы получили линейную систему относительно ν_t. Заметим, что расширенная матрица такой системы равна $(H)_{ht} = \gamma^{ht}$ для $h, t = 0, \ldots, k-1$. В силу того, что H является матрицей Вандермонда и γ есть примитивный корень из 1 степени k, получим $\det(H) \neq 0$. Поэтому, по теореме Кронекера–Капелли, система относительно ν_t неразрешима. Это противоречие завершает доказательство первого случая.

Случай $s \geqslant 2$. Поскольку матрицы A, B, C имеют блочно-диагональный вид, то все следует из свойств длины прямой суммы матриц (см. [8, теорема 4.1]). $\square$

§6. Оценки длины в случае диагонализуемой C

Рассмотрим пару $\{A, B\}$, такую что $AB = CBA$, $AC = CA$, $BC = CB$, C диагонализуема, $|\sigma(C)| = 2$. С точностью до подобия полагаем $C = D = d_1 E_{n_1} \oplus d_2 E_{n_2}$. По теореме об общем виде матрицы, коммутирующей с данной [15, § 16.6], имеем $A = A_1 \oplus A_2$, $B = B_1 \oplus B_2$, $A_i B_i = d_i B_i A_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, используя теорему о длине прямой суммы [8, теорема 4.1], получим

$$\max_{i=1,2}\{l(\{A_i, B_i\})\} \leqslant l(\{A, B\}) \leqslant l(\{A_1, B_1\}) + l(\{A_2, B_2\}) + 1. \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. *Пусть* $A, B, D \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geqslant 3$, D *диагональная,* $AB = DBA$, $AD = DA$, $BD = DB$, $|\sigma(D)| = 2$, *матрица* AB *нильпотентна. Тогда* $l(\{A, B\}) \leqslant n - 1$; *более того,* $l(\mathcal{L}(\{A, B\})) \leqslant n - 1$. *При этом для любого* $k \in \{1, \dots, n-1\}$ *существуют* $A^{(k)}, B^{(k)} \in M_n(\mathbb{F})$ *такие, что*

(1) *хоть одна из матриц* $A^{(k)}B^{(k)}$ *или* $B^{(k)}A^{(k)}$ *отлична от нуля;*
(2) $A^{(k)}B^{(k)} = DB^{(k)}A^{(k)}$;
(3) $l(\{A^{(k)}, B^{(k)}\}) = k$.

Доказательство. Оценка $l(\{A, B\}) \leqslant n-1$ следует из неравенств (6.1) и $l(\{A_i, B_i\}) \leqslant n_i - 1$, $i = 1, 2$ [10, лемма 2.3]. Не ограничивая общности, полагаем $n_1 \geqslant n_2$. Так как $n \geqslant 3$, то $n_1 \geqslant 2$. Обозначим

$$\widetilde{D}_k = \operatorname{diag}(1, d_1, \dots, d_1^{k-1}).$$

1. Для $k \in \{1, \dots, n_1 - 1\}$ можно взять $A^{(k)} = J_{k+1}(0) \oplus O_{n-k-1}$, $B^{(k)} = \widetilde{D}_{k+1} \oplus O_{n-k-1}$. Тогда $l(\{A^{(k)}, B^{(k)}\}) = k$ по [10, теорема 2.4].

2. Пусть $k \in \{n_1, \dots, n-1\}$. В этом случае, положим $A^{(k)} = J_{n_1}(0) \oplus J_{k-n_1+1}(1) \oplus O_{n_2+n_1-k-1}$, $B^{(k)} = \widetilde{D}_{n_1} \oplus O_{n_2}$. Поскольку второй диагональный блок в матрице $B^{(k)}$ нулевой, то $l(\{A^{(k)}, B^{(k)}\}) \geqslant \deg(A^{(k)}) - 1 = k$. Неравенство в обратную сторону следует из 6.1. Действительно,

$$l(\{A^{(k)}, B^{(k)}\}) \leqslant l(\{J_{n_1}(0), \widetilde{D}_{n_1}\}) + l(\{J_{k-n_1+1}(1)\}) + 1.$$

При этом $l(\{J_{n_1}(0), \widetilde{D}_{n_1}\}) = n_1 - 1$ [10, теорема 2.4] и

$$l(\{J_{k-n_1+1}(1)\}) = \deg(J_{k-n_1+1}(1)) - 1 = k - n_1,$$

откуда $l(\{A^{(k)}, B^{(k)}\}) \leqslant k$. $\square$

Теорема 6.2. *Пусть* $A, B, D \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geqslant 3$, D *диагональная,*

$$AB = DBA, \quad AD = DA, \quad BD = DB, \quad |\sigma(D)| = 2,$$
$$M = \max\{l(\{A_1, B_1\}), l(\{A_2, B_2\})\}.$$

Тогда

$$M \leqslant l(\{A, B\}) \leqslant \max\{M+2,\ \deg(A)-1,\ \deg(B)-1\} \leqslant \max\{M+2,\ n-1\}.$$

Доказательство. Нижняя оценка $l(\{A, B\}) \geqslant M$ выполнена согласно (6.1).

Заметим, что $AB - d_2BA = (d_1 - d_2)B_1A_1 \oplus O$, $AB - d_1BA = O \oplus (d_2 - d_1)B_2A_2$. Поскольку $d_1 \neq d_2$, то $B_1A_1 \oplus O, O \oplus B_2A_2 \in \mathcal{L}_2(\{A, B\})$. Отсюда следует, что для любого одночлена $v(x, y) \in \mathbb{F}\langle x, y\rangle$ степени не выше M, содержащего обе переменные, элементы $v(A_1, B_1) \oplus O$ и $O \oplus v(A_2, B_2)$ содержатся в $\mathcal{L}_M(\{A, B\})$.

Для краткости обозначим $K = \max\{M + 2,\ \deg(A) - 1,\ \deg(B) - 1\}$. Рассмотрим произвольное слово W над $\{A, B\}$ длины $K + 1$.

Случай 1. Пусть слово W содержит каждую из букв A и B. Тогда, используя $AB = DBA$, можно показать, что $W = D^p\widetilde{W}AB$, где слово $\widetilde{W}$ имеет длину не меньшую $M + 1$ и $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В проекциях на каждый из двух диагональных блоков получим $W_i = d_i^p\widetilde{W}_iA_iB_i$, $i = 1, 2$. В силу $M = \max\{l(\{A_1, B_1\}), l(\{A_2, B_2\})\}$, получим $\widetilde{W}_i \in \mathcal{L}_M(\{A_i, B_i\})$, $i = 1, 2$. Далее,

$$\begin{aligned} W = D^p\widetilde{W}AB &= d_1^p\widetilde{W}_1A_1B_1 \oplus O + O \oplus d_2^p\widetilde{W}_2A_2B_2 \\ &= d_1^p\Big(\sum_{0\leqslant i+j\leqslant M} \alpha_1(i,j)A_1^iB_1^j\Big)A_1B_1 \oplus O \\ &\qquad + O \oplus d_2^p\Big(\sum_{0\leqslant i+j\leqslant M} \alpha_2(i,j)A_2^iB_2^j\Big)A_2B_2 \\ &= v_1(A_1, B_1) \oplus O + O \oplus v_2(A_2, B_2), \end{aligned}$$

где $v_1, v_2 \in \mathbb{F}\langle x, y\rangle$ – многочлены степени не выше M с нулевыми свободными членами, каждый моном которых содержит обе переменные x, y. Поэтому, в силу сказанного выше, $W \in \mathcal{L}_M(\{A, B\}) \subseteq \mathcal{L}_K(\{A, B\})$, что и требовалось.

Случай 2. Пусть W – слово над $\{A\}$ (случай $\{B\}$ разбирается аналогично). Тогда, в силу условия $K \geqslant \deg(A) - 1$, слово W сократимо. $\square$

Авторы выражают глубокую благодарность А. Э. Гутерману за полезные обсуждения при подготовке статьи.

Список литературы

1. A. Alahmadi, S. P. Glasby, C. E. Praeger, *On the dimension of twisted centralizer codes.* — Finite Fields Appl. **48** (2017), 43–59.
2. J. A. Brooke, P. Busch, D. B. Pearson, *Commutativity up to a factor of bounded operators in complex Hilbert space.* — R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **458**, No. 2017 (2002), 109–118.
3. N. Chriss, V. Ginzburg, *Representation Theory and Complex Geometry.* Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1997.
4. С. М. Чуйко, *О решении билинейного матричного уравнения.* — Чебышевский сб. **17**, No. 2 (2016), 196–205.
5. G. Dolinar, A. Guterman, B. Kuzma, O. Markova, *Double centralizing theorem with respect to q-commutativity relation.*— J. Algebra Appl. **18**, No. 1 (2019), 1950003.
6. G. Dolinar, A. Guterman, B. Kuzma, O. Markova, *Extremal generalized centralizers in matrix algebras.* — Comm. Algebra **46**, No. 7 (2018), 3147–3154.
7. A. Guterman, T. Laffey, O. Markova, H. Šmigoc, *A resolution of Paz's conjecture in the presence of a nonderogatory matrix.* — Linear Algebra Appl. **543** (2018) 234–250.
8. A. E. Guterman, O. V. Markova, *Commutative matrix subalgebras and length function.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 1790–1805.
9. А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, *Проблема реализуемости значений длины для пары квази-коммутирующих матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 59–73.
10. A. E. Guterman, O. V. Markova, V. Mehrmann, *Lengths of quasi-commutative pairs of matrices.* — Linear Algebra Appl. **498** (2016), 450–470.
11. A. E. Guterman, O. V. Markova, V. Mehrmann, *Length realizability for pairs of quasi-commuting matrices.* — Linear Algebra Appl. **568** (2019), 135–154.
12. C. Kassel, *Quantum Groups* (Graduate Texts Math. **155**). Springer-Verlag, New York, 1995.
13. Н. А. Колегов, О. В. Маркова, *Системы порождающих матричных алгебр инцидентности над конечными полями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 120–144.
14. W. E. Longstaff, P. Rosenthal, *On the lengths of irreducible pairs of complex matrices.* — Proc. Amer. Math. Soc. **139**, No. 11 (2011), 3769–3777.
15. А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры.* М., Наука, 1970.
16. Yu. I. Manin, *Quantum Groups and Non-Commutative Geometry*, CRM, Montréal, 1988.
17. О. В. Маркова, *Характеризация коммутативных матричных подалгебр максимальной длины над произвольным полем.* — Вестн. Моск. унив. Сер.1. Математика. Механика **5** (2009), 53–55.
18. H. Neudecker, *A note on Kronecker matrix products and matrix equation systems.* — SIAM J. Appl. Math. **18**, No. 3 (1969), 603-606.

19. H. Neudecker, *Some theorems on matrix differentiation with special reference to kronecker matrix products.* — J. Amer. Statist. Assoc. **64**, No. 327 (1969), 953–963.
20. A. Paz, *An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables.* — Linear Multilinear Algebra **15** (1984), 161–170.
21. H. Shapiro. *Commutators which commute with one factor.* — Pacific J. Math. Special Issue: "Olga Taussky-Todd: in memoriam" (1997), 323–336.
22. C. Song, G. Chen, L. Zhao, *Iterative solutions to coupled Sylvester-transpose matrix equations.* — Appl. Math. Model. **35** (2011), 4675–4683.
23. R. C. Thompson, *Multiplicative matrix commutators commuting with both factors.* — J. Math. Annl. Appl. **18** (1967), 315–335.
24. R. C. Thompson, *Some matrix factorization theorems. I.* — Pacific. J. Math. **33**, No. 3 (1970), 763–810.
25. R. C. Thompson, *Some matrix factorization theorems. II.* — Pacific. J. Math. **33**, No. 3 (1970), 811–822.
26. Г. Вейль, *Теория групп и квантовая механика.* М., Наука, 1986.

Kolegov N. A., Markova O. V. Commutativity of matrices up to a matrix factor.

The matrix relation $AB = CBA$ is investigated. An explicit description of the space of matrices B satisfying this relation is obtained for an arbitrary fixed matrix C and a diagonalizable matrix A. The connection between this space and the family of right annihilators of the matrices $A-\lambda C$, where λ ranges over the set of eigenvalues of the matrix A, is studied. In the case where $AB = CBA$, $AC = CA$, $BC = CB$, a canonical form for A, B, C, generalizing Thompson's result for invertible A, B, C, is introduced. Also bounds for the length of pairs of matrices $\{A, B\}$ of the form indicated are provided.

Поступило 8 октября 2019 г.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
119991 Москва

E-mail: na.kolegov@ya.ru

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова;
Московский физико-технический институт
141701, Московская область,
г. Долгопрудный

E-mail: ov_markova@mail.ru