Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2018 г.

Х. Д. Икрамов

О КРИТЕРИЯХ КОНГРУЭНТНОСТИ НОРМАЛЬНЫХ И СОПРЯЖЕННО-НОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

1. Пусть A – комплексная $n \times n$-матрица. В этой заметке мы различаем два типа конгруэнтных преобразований: T-конгруэнции, т.е. преобразования вида

$$A \to S^T AS, \tag{1}$$

и $*$-конгруэнции

$$A \to S^* AS. \tag{2}$$

В обеих формулах S – произвольная невырожденная матрица.

Всякий раз, когда это необходимо, мы можем без потери общности ограничиться рассмотрением только невырожденных матриц A. Объясним это на примере $*$-конгруэнций. Как показано в [1], матрицу S в соотношениях (1) и (2) можно выбрать так, чтобы A приобрела вид

$$B \oplus J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_p}, \tag{3}$$

где $J_{n_1}, \dots, J_{n_p}$ – жордановы клетки порядков $n_1, \dots, n_p$ соответственно с нулем на главной диагонали, а B – невырожденная матрица, определяемая с точностью до конгруэнции. Совокупность клеток J_{n_1}, …, J_{n_p}, называемая сингулярной частью представления (3), может быть выделена из A посредством несложных алгоритмов, описанных в [1,2]. Это выделение особенно просто для нормальных матриц, имеющих общее ядро со своими сопряженными матрицами. Для них все клетки J_{n_k} имеют порядок 1, а их число равно дефекту матрицы. Какой бы алгоритм выделения ни был выбран, после его выполнения остается невырожденная матрица B.

Нам понадобятся несколько фактов, касающихся $*$-конгруэнций. Назовем A *юнитоидной* матрицей, если матрицу S в (2) можно выбрать так, чтобы S^*AS имела диагональный вид $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Дополнительной конгруэнцией с диагональной трансформирующей матрицей модули ненулевых диагональных элементов можно сделать равными единице. Полученная диагональная матрица

$$\Theta = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_r}, 0, \dots, 0) \tag{4}$$

Ключевые слова: $*$-конгруэнтность, T-конгруэнтность, подобие, псевдоподобие, унитарная конгруэнтность, полярное разложение.

рассматривается как каноническая форма исходной юнитоидной матрицы A относительно $*$-конгруэнций. Числа $\theta_1, \ldots, \theta_r$ называются каноническими углами матрицы A; их число r равно рангу этой матрицы.

То, что матрица (4) и числа θ_i действительно являются каноническими, т.е. однозначно определены матрицей A, показано в [3]. Этот факт в переложении на язык полуторалинейных форм есть обобщение классического закона инерции с эрмитова случая на юнитоидный.

Хорошо известный класс юнитоидных матриц составляют нормальные матрицы, приводимые к диагональному виду посредством унитарных $*$- конгруэнций (являющихся в то же время унитарными подобиями). Для матриц этого класса канонические углы суть аргументы ненулевых собственных значений. По поводу закона инерции для нормальных матриц см. [4].

Нормальными являются, в частности, унитарные матрицы. Для этого частного случая в [3] доказано следующее важное утверждение.

Теорема 1. *Если две унитарные матрицы $*$-конгруэнтны, то они унитарно подобны.*

Представим невырожденную нормальную матрицу A ее полярным разложением

$$A = HQ. \tag{5}$$

Эрмитова положительно определенная матрица H и унитарная матрица Q однозначно определяются матрицей A и коммутируют. Если

$$\lambda_j = \rho_j e^{i\theta_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

суть собственные значения матрицы A, то числа ρ_j и $e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, являются собственными значениями соответственно для H и U.

Пусть $\tilde{A}$ – еще одна невырожденная нормальная матрица с полярным разложением

$$\tilde{A} = \tilde{H}\tilde{Q}. \tag{6}$$

Чтобы матрицы A и $\tilde{A}$ были $*$-конгруэнтны, они должны иметь одни и те же канонические углы $\theta_1, \ldots, \theta_n$, т.е. унитарные матрицы Q и $\tilde{Q}$ должны иметь одни и те же собственные значения. Мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Невырожденные нормальные матрицы A и $\tilde{A}$ тогда и только тогда $*$-конгруэнтны, когда (унитарно) $*$-конгруэнтны (иначе говоря, унитарно подобны) унитарные матрицы Q и $\tilde{Q}$ в их полярных разложениях* (5) *и* (6).

Подобие двух унитарных (и, более общо, двух диагонализуемых) матриц есть обстоятельство, которое можно проверить рациональным вычислением, т.е. вычислением, использующим лишь конечное число арифметических операций. В самом деле, достаточно убедиться в том, что Q и $\tilde{Q}$ имеют один и тот же характеристический многочлен. Однако, чтобы превратить в рациональный критерий саму теорему 2, нужно указать рациональный способ построения характеристического многочлена для унитарного сомножителя полярного разложения без вычисления этого сомножителя. Существует ли такой способ, в настоящее время неизвестно.

2. Приведенные в предыдущем разделе факты о $*$-конгруэнциях в основном известны (исключением является теорема 2). В данном сообщении мы хотим установить аналоги этих фактов в теории T-конгруэнций.

Свойство нормальности сохраняется унитарными $*$-конгруэнциями. По отношению к T-конгруэнциям аналогичной инвариантностью обладает свойство сопряженной нормальности. Напомним, что комплексная $n \times n$-матрица A называется сопряженно-нормальной, если

$$AA^* = \overline{A^*A}.$$

Черта над символом матрицы обозначает поэлементное сопряжение.

Простейшей формой, к которой нормальная матрица может быть приведена унитарным подобием, является диагональная матрица ее собственных значений. Аналогом этого факта в теории T-конгруэнций является следующее утверждение (см., например, [5]).

Теорема 3. *Всякая сопряженно-нормальная матрица A посредством подходящей унитарной T-конгруэнции может быть приведена к блочно-диагональному виду с диагональными блоками порядков* 1 *и* 2. *Блоки порядка* 1 *суть неотрицательные числа $\mu_1, \ldots, \mu_k$; блокам второго порядка можно придать вид эрмитовых матриц*

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_j \\ \overline{\mu_j} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mu_j \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}. \tag{7}$$

Числа μ_t имеют такое истолкование: $\mu_1, \dots, \mu_k$ суть арифметические квадратные корни из неотрицательных собственных значений матрицы $A\overline{A}$; каждому числу μ_j, $j > k$, в спектре $A\overline{A}$ соответствует пара комплексно-сопряженных собственных значений $\mu_j^2, \overline{\mu_j}^2$.

Собственные значения матрицы $A\overline{A}$ являются инвариантами не только унитарных Т-конгруэнций, выполняемых с матрицей A, но и более общего класса преобразований, называемых псевдоподобиями (consimilarities):

$$A \to S^{-1} A \overline{S}.$$

Выясним условия Т-конгруэнтности невырожденных сопряженно-нормальных матриц A и $\tilde{A}$. Общий критерий Т-конгруэнтности для пары невырожденных (не обязательно сопряженно-нормальных) матриц C и D формулируется следующим образом (см. [6, теорема 4.5.27]).

Теорема 4. *Невырожденные матрицы C и D тогда и только тогда Т-конгруэнтны, когда матрицы $C^{-T}C$ и $D^{-T}D$ подобны.*

Напомним, что $C^{-T}C$ называется коквадратом матрицы C.

Вычислим коквадрат для блочно-диагональной формы B_A невырожденной сопряженно-нормальной матрицы A. Ее диагональная часть $\mu_1 \oplus \dots \oplus \mu_k$, состоящая сейчас только из положительных чисел, преобразуется в единичную матрицу I_k. Матрица (7), где $\mu_j = \rho_j e^{i\theta_j}$, превращается в коквадрате в диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} e^{2i\theta_j} & 0 \\ 0 & e^{-2i\theta_j} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в данном случае коквадрат есть диагональная матрица D_A, однозначно определяемая аргументами чисел μ_t.

Дадим истолкование этой матрицы D_A. Для этого вернемся к исходной блочно-диагональной матрице B_A:

$$B_A = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_k & & & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & \mu_{k+1} \\ \overline{\mu_{k+1}} & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} 0 & \mu_l \\ \overline{\mu_l} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

где $2l - k = n$. Представим B_A произведением

$$B_A = HU.$$

Здесь H – диагональная матрица

$$H = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_k, \rho_{k+1}, \rho_{k+1}, \ldots, \rho_l, \rho_l),$$

а U – унитарная матрица вида

$$I_k \oplus \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_{k+1}} \\ e^{-i\theta_{k+1}} & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_l} \\ e^{-i\theta_l} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица U составлена из аргументов чисел μ_t и имеет тот же коквадрат, что и B_A. Это обстоятельство не вызывает удивления, если учесть, что блочно-диагональная форма матрицы A, описываемая в теореме 3, является нормальной матрицей.

Из всего сказанного вытекает, что в случае сопряженно-нормальных матриц теорема 4 может быть переформулирована таким образом.

Теорема 5. *Невырожденные сопряженно-нормальные матрицы A и $\tilde{A}$ тогда и только тогда Т-конгруэнтны, когда, с точностью до перестановок диагональных блоков, совпадают и, следовательно, Т-конгруэнтны унитарные сомножители U и $\tilde{U}$ в разложениях $B_A = HU$ и $B_{\tilde{A}} = \tilde{H}\tilde{U}$ их блочно-диагональных форм.*

Это утверждение можно рассматривать как Т-аналог теоремы 2. Чтобы аналогия между двумя теоремами стала более полной, нужно показать, что для проверки Т-конгруэнтности унитарных матриц нет необходимости в предварительном приведении A и $\tilde{A}$ к блочно-диагональному виду.

Пусть S – унитарная матрица, трансформирующая A в матрицу B_A:

$$B_A = S^T A S.$$

Тогда

$$A = \overline{S} B_A S^* = \overline{S} H U S^* = (\overline{S} H S^T)(\overline{S} U S^*).$$

Полученное представление матрицы A есть не что иное, как ее полярное разложение. Действительно, матрица $\overline{S} H S^T$ эрмитова и положительно определена, а $\overline{S} U S^*$ – унитарная матрица, полученная из U унитарной Т-конгруэнцией. Теперь теорема 5 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 6. *Невырожденные сопряженно-нормальные матрицы A и $\tilde{A}$ тогда и только тогда T-конгруэнтны, когда (унитарно) T-конгруэнтны унитарные сомножители их полярных разложений.*

Эта формулировка есть точный аналог теоремы 2.

Для практической проверки T-конгруэнтности между A и $\tilde{A}$ теорема 4 все же предпочтительней. Дело в том, что коквадраты обеих матриц можно найти рациональным вычислением, после чего опять же рационально вычисляются характеристические многочлены этих коквадратов. Заметим, что оба коквадрата суть унитарные матрицы.

Что касается теоремы 6, то ее использование предполагает вычисление характеристических многочленов для унитарных сомножителей полярных разложений. Здесь мы встречаемся с той же трудностью, что и в теореме 2.

Список литературы

1. R. A. Horn, V. V. Sergeichuk, *A regularization algorithm for matrices of bilinear and sesquilinear forms.* — Linear Algebra Appl. **412** (2006), 380–395.
2. Х. Д. Икрамов, *О конгруэнтном выделении жордановых блоков из вырожденной квадратной матрицы.* — Сиб. ж. вычисл. матем. **21**, No. 3 (2018), 255–258.
3. C. R. Johnson, S. Furtado, *A generalization of Sylvester's law of inertia.* — Linear Algebra Appl. **338** (2001), 287–290.
4. Х. Д. Икрамов, *О законе инерции для нормальных матриц.* — Докл. РАН **380** (2001), 7–8.
5. H. Fassbender, Kh. D. Ikramov, *Conjugate-normal matrices: A survey.* — Linear Algebra Appl. **429** (2008), 1425–1441.
6. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis. Second Edition.* Cambridge Univ. Press (2013).

Ikramov Kh. D. Congruence criteria for normal and conjugate-normal matrices.

Complex $n \times n$ matrices A and B are said to be T-congruent if $B = S^T AS$ and $*$-congruent if $B = S^* AS$, where S is an arbitrary nonsingular matrix. For several facts related to normal matrices and $*$-congruences, analogs in the theory of T-congruences, concerning conjugate-normal matrices, are found.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: `ikramov@cs.msu.su`

Поступило 18 января 2019 г.