Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

Х. Д. Икрамов

РАЦИОНАЛЬНО ПРОВЕРЯЕМЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭРМИТОВОЙ КОНГРУЭНТНОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

Пусть M_n – пространство комплексных $n \times n$-матриц. Говорят, что матрицы $A, F \in M_n$ эрмитово конгруэнтны, если

$$F = Q^* AQ \tag{1}$$

для некоторой невырожденной матрицы Q. Вместо эрмитовой конгруэнтности чаще пользуются термином $*$-конгруэнтность, отличая (1) от соотношения

$$F = Q^T AQ,$$

характеризующего обычную, или T-конгруэнтность.

Мы рассматриваем вопрос об условиях $*$-конгруэнтности заданных $n \times n$-матриц A и F. Известно, что подобие между A и F можно проверить, выполняя конечное число арифметических операций с их элементами (см., например [1, §3.4]). Вычислительный процесс с этими свойствами – конечность и использование только арифметических операций – будем называть *рациональным алгоритмом.* Для $*$-конгруэнтности такой алгоритм в случае матриц A и F общего вида пока неизвестен. Неизвестно даже, существует ли он в принципе. Однако, если A и F принадлежат какому-то классу специальных матриц, то рациональная проверка $*$-конгруэнтности может оказаться осуществимой. Например, классический критерий $*$-конгруэнтности эрмитовых матриц A и F (а именно совпадение их инерционных троек) имеет своим истоком закон инерции эрмитовых квадратичных форм. Рациональные критерии $*$-конгруэнтности были найдены для классов унитарных, аккретивных и диссипативных матриц (или, более общо, для класса матриц, чья числовая область не содержит нуля). Подробней об этом см. в [2].

Ключевые слова: $*$-конгруэнтность, рациональный алгоритм, каноническая форма относительно конгруэнций, коквадрат, теплицево разложение.

В отсутствие универсального критерия $*$-конгруэнтности мы даем обзор условий, необходимых для нее и допускающих проверку рациональными алгоритмами. В этих условиях существенную роль играет каноническая форма комплексных матриц относительно $*$-конгруэнций, введенная Сергейчуком и Хорном (см. [3]). Краткое описание этой (не слишком широко известной формы) и связанного с ней понятия коквадрата матрицы дано в §2. В последующих разделах перечисляются рациональные необходимые условия $*$-конгруэнтности и ставится вопрос о том, как дополнить эти условия до достаточных.

§2. Каноническая форма относительно $*$-конгруэнций

Конгруэнтное преобразование

$$A \to \tilde{A} = S^* A S \tag{2}$$

можно выбрать так, чтобы матрица $\tilde{A}$ приобрела вид

$$B \oplus J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_p}. \tag{3}$$

Здесь $J_{n_1}, \ldots, J_{n_p}$ – жордановы клетки порядков соответственно n_1, $\ldots, n_p$ с нулем на главной диагонали, а B – невырожденная матрица, определяемая с точностью до конгруэнции. Представление (3) называется регуляризующим разложением матрицы A, прямая сумма $J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_p}$ – *сингулярной частью* этого разложения, а о матрице B говорят, что она определяет его *регулярную часть*. Все эти определения и термины заимствованы нами из статьи [4].

Простой рациональный алгоритм выделения из матрицы ее жордановых клеток J_{n_i} предложен в [5]. Применяя этот алгоритм к заданным матрицам A и F, мы или убедимся в том, что их сингулярные части неодинаковы, и тогда A и F не могут быть конгруэнтны, или, в случае совпадения сингулярных частей, сведем вопрос о конгруэнтности к исследованию невырожденных матриц B_A и B_F, представляющих регулярные части. Это позволяет нам в дальнейшем при необходимости считать A и F невырожденными матрицами.

Каноническая форма K_A невырожденной матрицы A представляет собой блочно-диагональную матрицу. Количество диагональных блоков, их порядки и устройство определяются строением жордановой нормальной формы J матрицы

$$\mathcal{C}_A = A^{-*} A, \tag{4}$$

называемой коквадратом матрицы A. Тесная связь между этими двумя формами объясняется следующим обстоятельством: если A подвергается конгруэнции

$$A \to \tilde{A} = X^* A X,$$

то

$$A^{-1} \to \tilde{A}^{-1} = X^{-1} A^{-1} X^{-*}$$

и

$$\mathcal{C}_A = A^{-*} A \to \mathcal{C}_{\tilde{A}} = X^{-1} \mathcal{C}_A X,$$

т.е. коквадрат матрицы A претерпевает подобие, задаваемое той же матрицей X.

Диагональные блоки матрицы K_A могут быть двух типов. Первый тип – это ганкелевы матрицы вида

$$\Delta_k = \lambda \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdots & i \\ & 1 & \cdots & \\ 1 & i & & \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $|\lambda| = 1$, а индекс k указывает порядок блока. Коквадрат матрицы (5), где $\lambda = e^{i\phi}$, – это верхнетреугольная теплицева матрица с числом $e^{2i\phi}$ на главной диагонали и числом $2ie^{2i\phi}$ на первой наддиагонали (см. [6, задача 4.5.P15]). Такая матрица подобна жордановой клетке $J_k(\lambda^2)$.

Второй тип диагональных блоков в K_A – это матрицы четной размерности

$$H_{2k}(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ J_k(\mu) & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь $J_k(\mu)$ – жорданова клетка с числом μ на главной диагонали, а относительно μ можно без ограничения общности считать, что $|\mu| > 1$.

Коквадратом матрицы (6) является прямая сумма

$$J_k(\mu) \oplus J_k(\mu)^{-*}.$$

Второе слагаемое этой суммы подобно жордановой клетке $J_k(\bar{\mu}^{-1})$.

Таким образом, блоки типа (5) в канонической матрице K_A соответствуют жордановым клеткам для собственных чисел с модулем 1 в жордановой форме коквадрата $\mathcal{C}_A$, а блоки типа (6) – парам жордановых клеток вида

$$J_k(\mu) \oplus J_k(\bar{\mu}^{-1}),$$

где модуль числа μ отличен от единицы.

Расположим клетки, отвечающие собственным значениям с модулем 1 (если таковые имеются), в верхней части жордановой матрицы J и будем называть эту зону матрицы ее *унимодулярной частью*. Прочие клетки образуют *неунимодулярную часть* J. Те же названия будем использовать для двух аналогичных зон канонической матрицы K_A. Заметим, что матрица A, каноническая форма которой диагональна, названа в [7] юнитоидом (unitoid). Регулярная часть такой матрицы совпадает с ее унимодулярной зоной.

§3. Подобие коквадратов

Выкладки, проведенные в предыдущем разделе в связи с определением коквадрата, делают очевидным следующее утверждение.

Лемма 1. *Если невырожденные матрицы A и F конгруэнтны, то их коквадраты $\mathcal{C}_A$ и $\mathcal{C}_F$ подобны.*

Таким образом, подобие коквадратов есть необходимое условие конгруэнтности. Напомним, что подобие пары заданных матриц (или отсутствие подобия) можно проверить рациональным вычислением.

К сожалению, утверждение, обратное лемме 1, в общем случае неверно. Справедливо лишь то, что неунимодулярная часть матрицы J (общей жордановой формы коквадратов $\mathcal{C}_A$ и $\mathcal{C}_F$) однозначно (с точностью до порядка диагональных блоков) определяет неунимодулярную часть каждой из матриц K_A и K_F. Иначе обстоит дело с унимодулярными частями. Пусть, например, A и F – (невырожденные) эрмитовы $n \times n$-матрицы. Коквадратом обеих является единичная матрица I_n. Однако конгруэнтны A и F будут только в случае, если имеют одинаковые индексы инерции. К примеру, не будут $*$-конгруэнтны симметричные матрицы

$$A = I_2, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, чтобы установить конгруэнтность матриц A и F, нужно добавить к подобию коквадратов какие-то дополнительные проверки. Возможные варианты таких проверок обсуждаются в последующих разделах.

§4. Теплицево разложение

Напомним, что теплицевым (или эрмитовым) разложением квадратной комплексной матрицы A называется ее представление в виде

$$A = B + iC,$$

где

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad C = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Лемма 2. *Пусть матрицы A и F конгруэнтны, т.е. выполнено соотношение* (1). *Тогда*

$$F^* = Q^* A^* Q \tag{7}$$

и, как следствие, эрмитовы матрицы G и H в теплицевом разложении

$$F = G + iH$$

конгруэнтны соответственно матрицам B и C:

$$G = Q^* B Q, \qquad H = Q^* C Q. \tag{8}$$

Доказательство леммы опускаем ввиду очевидности обоих ее утверждений. Смысл же леммы состоит в том, что конгруэнтность эрмитовых матриц в парах (B, G) и (C, H) есть необходимое условие конгруэнтности неэрмитовых матриц A и F. Это необходимое условие может быть проверено рационально, причем значительно проще, чем подобие коквадратов $\mathcal{C}_A$ и $\mathcal{C}_F$.

В то же время это условие, как и подобие коквадратов, не является достаточным для конгруэнтности между A и F. Согласно равенствам (8), условие становится достаточным, только если конгруэнтность каждой из пар (B, G) и (C, H) осуществляется посредством одной и той же трансформирующей матрицы Q. Неясно, как проверить это обстоятельство. Итак, и здесь нужны какие-то дополнительные проверки.

Закончим этот раздел описанием простой ситуации, когда необходимые условия конгруэнтности удается превратить в достаточные.

Теорема 1. *Пусть коквадраты $\mathcal{C}_A$ и $\mathcal{C}_F$ невырожденных матриц A и F подобны и среди их собственных значений имеется лишь одно, причем простое, число с модулем* 1. *Если эрмитовы матрицы B и G (или же матрицы C и H) конгруэнтны, то конгруэнтны и матрицы A и F.*

Доказательство. В жордановой форме J коквадратов $\mathcal{C}_A$ и $\mathcal{C}_F$ унимодулярная зона состоит из единственного диагонального элемента $e^{2i\phi}$. Предположим, что при переходе от J к каноническим матрицам K_A и K_F для унимодулярного элемента одной из них выбирается значение $e^{i\phi}$, а для унимодулярного элемента другой – значение $-e^{i\phi}$. В этом случае одноименные индексы инерции матриц B и G должны различаться на две единицы, и то же верно для индексов инерции в паре (C, H), что невозможно, так как по условию B и G (или C и H) конгруэнтны. Итак, канонические матрицы K_A и K_F должны совпадать, а потому A и F конгруэнтны. □

§5. Линейные комбинации матриц A и A^*

В предыдущем разделе мы отметили, что соотношение (1) влечет за собой (7), а потому при любом $\alpha \in \mathbf{C}$ матрицы

$$A^\alpha = A + \alpha A^*$$

и

$$F^\alpha = F + \alpha F^*$$

конгруэнтны. Выбрав конкретное значение α, можно было бы вместо пары (A, F) исследовать конгруэнтность пары (A^α, F^α). Установить конгруэнтность этой новой пары нисколько не легче, чем для исходных матриц A и F. Однако смысл указанного перехода совсем в другом, а именно в надежде, что если матрицы A и F, имеющие подобные коквадраты $\mathcal{C}_A$ и $\mathcal{C}_F$, тем не менее не являются конгруэнтными, то это обстоятельство проявится в неподобии коквадратов $\mathcal{C}_{A^\alpha}$ и $\mathcal{C}_{F^\alpha}$. К сожалению, эта надежда оказывается иллюзорной.

Теорема 2. *Пусть коквадраты $\mathcal{C}_A$ и $\mathcal{C}_F$ невырожденных матриц A и F подобны:*

$$\mathcal{C}_F = P^{-1}\mathcal{C}_A P. \tag{9}$$

Тогда для любого $\alpha \in \mathbf{C}$ подобны и коквадраты $\mathcal{C}_{A^\alpha}$ и $\mathcal{C}_{F^\alpha}$ матриц A^α и F^α.

Разумеется, предполагается, что для выбранного α матрица A^α невырожденна и, следовательно, имеют смысл матрицы $\mathcal{C}_{A^\alpha}$ и $\mathcal{C}_{F^\alpha}$.

Доказательство. Покажем, что матрица $\mathcal{C}_{A^\alpha}$ есть многочлен от матрицы $\mathcal{C}_A$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{A^\alpha} &= (A^\alpha)^{-*}A^\alpha = (A+\alpha A^*)^{-*}(A+\alpha A^*)\\ &= (A+\alpha A^*)^{-*}A^*(\alpha I + A^{-*}A) = ((A+\alpha A^*)A^{-1})^{-*}(\alpha I + \mathcal{C}_A)\\ &= (I+\alpha A^*A^{-1})^{-*}(\alpha I+\mathcal{C}_A) = (I+\overline{\alpha}A^{-*}A)^{-1}(\alpha I + \mathcal{C}_A)\\ &= (I+\overline{\alpha}\mathcal{C}_A)^{-1}(\alpha I+\mathcal{C}_A).\end{aligned}$$

Поскольку $(I+\overline{\alpha}\mathcal{C}_A)^{-1}$ есть функция от матрицы $\mathcal{C}_A$ и, следовательно, многочлен от нее, то это же верно для матрицы $\mathcal{C}_{A^\alpha}$:

$$\mathcal{C}_{A^\alpha} = f(\mathcal{C}_A).$$

Такое же соотношение выполняется для матриц $\mathcal{C}_F$ и $\mathcal{C}_{F^\alpha}$:

$$\mathcal{C}_{F^\alpha} = f(\mathcal{C}_F).$$

Из этих двух равенств выводим

$$P^{-1}\mathcal{C}_{A^\alpha}P = P^{-1}f(\mathcal{C}_A)P = f(P^{-1}\mathcal{C}_AP) = f(\mathcal{C}_F) = \mathcal{C}_{F^\alpha},$$

т.е. матрицы $\mathcal{C}_{F^\alpha}$ и $\mathcal{C}_{A^\alpha}$ связаны тем же подобием, что и матрицы $\mathcal{C}_F$ и $\mathcal{C}_A$. □

§6. Ассоциированные матрицы

Напомним определение ассоциированных матриц в применении к рассматриваемому случаю квадратной матрицы A.

Обозначим через $Q_{k,n}$ множество всех строго возрастающих последовательностей длины k, составленных из натуральных чисел в диапазоне от 1 до n. Если $\alpha = (i_1, \dots, i_k)$ и $\beta = (j_1, \dots, j_k)$ – две такие последовательности, то символ $A[\alpha|\beta]$ обозначает подматрицу в A, стоящую на пересечении строк с номерами из α и столбцов с номерами из β.

Упорядочим каким-либо образом (например, лексикографически) $\binom{n}{k}$ элементов множества $Q_{k,n}$. Составим матрицу $C_k(A)$ размера $\binom{n}{k}$ из миноров $\det(A[\alpha|\beta])$, расположенных в выбранном порядке по α и β. Эта матрица и есть k-я ассоциированная матрица для матрицы A. Отметим, что формирование матрицы $C_k(A)$ для $k \notin \{1, n\}$ есть хотя и весьма громоздкий, но все же рациональный процесс.

Нам понадобятся следующие свойства ассоциированных матриц:

а) если $A, B \in M_n$, то

$$C_k(AB) = C_k(A)C_k(B);$$

б) $C_k(A^*) = (C_k(A))^*$;
в) если A – невырожденная матрица, то

$$(C_k(A))^{-1} = C_k(A^{-1}).$$

Лемма 3. *Если $n \times n$-матрицы A и F конгруэнтны, то при любом k, $1 < k \leqslant n$, конгруэнтны k-е ассоциированные матрицы $C_k(A)$ и $C_k(F)$.*

Действительно, из соотношения (1) немедленно следует

$$C_k(F) = (C_k(Q))^* C_k(A) C_k(Q).$$

Снова можно надеяться, что для неконгруэнтных матриц A и F, имеющих тем не менее подобные коквадраты, найдется число k такое, что коквадраты ассоциированных матриц $C_k(A)$ и $C_k(F)$ не будут подобны. Но и эта надежда оказывается тщетной.

Теорема 3. *Пусть коквадраты $\mathcal{C}_A$ и $\mathcal{C}_F$ невырожденных матриц A и F подобны, т.е. выполнено соотношение* (9). *Тогда при любом k, $1 < k \leqslant n$, подобны коквадраты k-х ассоциированных матриц $C_k(A)$ и $C_k(F)$.*

В самом деле, из (9) следует, что

$$C_k(\mathcal{C}_F) = (C_k(P))^{-1} C_k(\mathcal{C}_A) C_k(P).$$

§7. Заключение

Мы провели обзор рационально проверяемых необходимых условий $*$-конгруэнтности для пары комплексных матриц. Этот обзор показывает, что задача достраивания известных необходимых условий до достаточных остается актуальной.

Список литературы

1. Х. Д. Икрамов, *О конечных спектральных процедурах в линейной алгебре.* — Программирование, No. 1 (1994), 56–69.
2. Х. Д. Икрамов, *О проверке конгруэнтности аккретивных матриц.* — Мат. заметки **101** (2017), 854–859.
3. R. A. Horn, V. V. Sergeichuk, *Canonical forms for unitary congruence and *congruence.* — Linear Multilinear Algebra **57** (2009), 777–815.
4. R. A. Horn, V. V. Sergeichuk, *Canonical forms for complex matrices congruence and *congruence.* — Linear Algebra Appl. **416** (2006), 1010–1032.
5. Х. Д. Икрамов, *О конгруэнтном выделении жордановых блоков из вырожденной квадратной матрицы.* — Сиб. ж. вычисл. мат. **21** (2018), 255–258.
6. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis. Second Edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
7. C. R. Johnson, S. Furtado, *A generalization of Sylvester's law of inertia.* — Linear Algebra Appl. **338** (2001), 287–290.

Ikramov Kh. D. Rationally verifiable necessary conditions for Hermitian congruence of complex matrices.

A finite computational process using arithmetic operations only is called a rational algorithm. Matrices A and F are said to be Hermitian congruent if $F = Q^*AQ$ for a nonsingular matrix Q. The paper gives a survey of necessary conditions for Hermitian congruence verifiable by rational algorithms.

Московский государственный университет,
Ленинские горы, 119991 Москва, Россия
E-mail: `ikramov@cs.msu.su`

Поступило 15 января 2019 г.