Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

Х. Д. Икрамов

К ОПЫТУ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЭРМИТОВОЙ КОНГРУЭНЦИИ

1. Термины “собственное значение”, “спектр” и “инвариантное подпространство” используются в теории линейных операторов и параллельной ей теории квадратных матриц. Их не принято применять в связи с полуторалинейными и квадратичными формами. В настоящем сообщении мы попробуем нарушить этот негласный запрет и привнести некоторые спектральные понятия в теорию упомянутых форм.

Пусть $\mathcal{B}(x,y)$ – полуторалинейная форма, определенная на $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n$. Фиксируем в $\mathbf{C}^n$ базис $e=\{e_1,\dots,e_n\}$. Если определить $n\times n$-матрицу A_e формулами

$$a_{ij}=\mathcal{B}(e_i,e_j),\qquad i,j=1,2,\dots,n,$$

то форму $\mathcal{B}$ можно записать через координаты векторов x и y как

$$\mathcal{B}(x,y)=x^TA\overline{y}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i\overline{y_j}.$$

Пусть $f=\{f_1,\dots,f_n\}$ – любой другой базис в $\mathbf{C}^n$ и S – матрица перехода от e к f:

$$[f_1,\dots,f_n]=[e_1,\dots,e_n]S.$$

В новом базисе матричное представление формы $\mathcal{B}$ дает матрица

$$A_f=S^*A_eS. \tag{1}$$

Поэтому вместо формы $\mathcal{B}$ можно рассматривать соответствующий ей класс комплексных $n\times n$-матриц, связанных попарно соотношениями (1) для всевозможных невырожденных матриц S. Преобразование (1) матрицы A_e в A_f называется эрмитовой конгруэнцией или *-конгруэнцией, а мы будем, как правило, говорить просто о конгруэнции. Наши построения будут в значительной мере основываться на предложенной Сергейчуком и Хорном канонической форме комплексных матриц относительно эрмитовых конгруэнций (см. [1, раздел 4.5]).

Ключевые слова: эрмитова конгруэнция, полуторалинейная форма, коквадрат невырожденной матрицы, инвариантные подпространства.

Эту же форму можно считать канонической для соответствующей полуторалинейной формы.

2. Конгруэнтное преобразование

$$A \to \widetilde{A} = S^* A S \tag{2}$$

можно выбрать так, чтобы матрица $\widetilde{A}$ приобрела вид

$$B \oplus J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_p}. \tag{3}$$

Здесь $J_{n_1}, \ldots, J_{n_p}$ – жордановы клетки порядков $n_1, \ldots, n_p$ соответственно с нулем на главной диагонали, а B – невырожденная матрица, определяемая с точностью до конгруэнции. Представление (3) называется регуляризующим разложением матрицы A, прямая сумма $J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_p}$ – *сингулярной частью* этого разложения, а о матрице B говорят, что она определяет его *регулярную часть*. Все эти определения и термины заимствованы нами из статьи [2].

Простой рациональный алгоритм выделения из матрицы ее жордановых клеток J_{n_i} предложен в [3]. Применяя этот алгоритм к матрице A, мы или получим из нее невырожденную матрицу B, или убедимся, что A вовсе не имеет регулярной части.

Таким образом, не будет потери общности в предположении, что исходная форма $\mathcal{B}$ невырожденна, как и ее матрицы в различных базисах. Невырожденной матрице A можно сопоставить ее коквадрат. Так называется матрица

$$\mathcal{C}_A = A^{-*} A. \tag{4}$$

Если A подвергается конгруэнции

$$A \to \widetilde{A} = X^* A X,$$

то

$$A^{-1} \to \widetilde{A}^{-1} = X^{-1} A^{-1} X^{-*}$$

и

$$\mathcal{C}_A = A^{-*} A \to \mathcal{C}_{\widetilde{A}} = X^{-1} \mathcal{C}_A X,$$

т.е. коквадрат матрицы A претерпевает подобие, задаваемое той же матрицей X.

3. Предположим, что невырожденная матрица A может быть посредством конгруэнции приведена к виду прямой суммы

$$S^*AS = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Здесь B и C – невырожденные матрицы порядков k и l $(k+l=n)$. Из (5) выводим

$$S^{-1}A^{-*}S^{-*} = \begin{pmatrix} B^{-*} & 0 \\ 0 & C^{-*} \end{pmatrix}$$

и

$$(S^{-1}A^{-*}S^{-*})(S^*AS) = S^{-1}(A^{-*}A)S = \begin{pmatrix} B^{-*}B & 0 \\ 0 & C^{-*}C \end{pmatrix}.$$

Тем самым первые k столбцов матрицы S образуют базис инвариантного подпространства $\mathcal{L}$ коквадрата $\mathcal{C}_A$, и его сужение на $\mathcal{L}$ есть коквадрат подматрицы B. Точно так же последние l столбцов в S дают базис инвариантного подпространства $\mathcal{M}$, дополнительного к $\mathcal{L}$. Ему соответствует коквадрат подматрицы C. Резюмируем эти наблюдения следующим образом.

Лемма 1. *Если конгруэнция*

$$A \longrightarrow S^*AS$$

приводит матрицу A к прямой сумме (5)*, то подобие с той же трансформирующей матрицей S приводит коквадрат $\mathcal{C}_A$ к прямой сумме*

$$\mathcal{C}_A = \mathcal{C}_B \oplus \mathcal{C}_C.$$

Пусть, наоборот, подобие с трансформирующей матрицей X приводит к прямой сумме коквадрат $\mathcal{C}_A$:

$$X^{-1}(A^{-*}A)X = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$X^*AX = X^*A^*X \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Обозначим через A_X матрицу X^*AX и представим A_X в блочном виде, согласованном с прямой суммой $F \oplus G$:

$$A_X = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Из соотношения (6) выводим для блоков A_{ij} равенства:

$$A_{11} = A_{11}^* F, \qquad A_{22} = A_{22}^* G,$$

$$A_{12} = A_{21}^* G, \qquad A_{21} = A_{12}^* F.$$

Из последних двух равенств имеем

$$A_{12} - F^* A_{12} G = 0,$$

$$A_{21} - G^* A_{21} F = 0.$$

Итак, блоки A_{12} и A_{21} суть решения однородных матричных уравнений Стейна. Известно (см., например, [4]), что эти уравнения имеют только тривиальные решения $A_{12} = 0$ и $A_{21} = 0$, если для собственных значений матриц F и G выполнены условия

$$\overline{\lambda_i(F)} \lambda_j(G) \neq 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \; j = 1, 2, \ldots, l. \qquad (7)$$

Здесь k и l – порядки блоков F и G.

Предполагая, что условия (7) выполнены, находим

$$A_{12} = 0, \; A_{21} = 0, \; F = A_{11}^{-*} A_{11}, \; G = A_{22}^{-*} A_{22}.$$

Следующая лемма подводит итог проделанных выкладок.

Лемма 2. *Пусть подобие*

$$\mathcal{C}_A \longrightarrow X^{-1} \mathcal{C}_A X$$

приводит кoквадрат $\mathcal{C}_A$ к прямой сумме $F \oplus G$, причем для блоков F и G выполнены условия (7). *Тогда конгруэнция с той же трансформирующей матрицей X приводит A к прямой сумме*

$$A_{11} \oplus A_{22},$$

а матрицы F и G суть кoквадраты соответственно блоков A_{11} и A_{22}.

Определяя подпространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ так же, как в рассуждениях леммы 1 (с заменой матрицы S на X), получаем пару дополняющих друг друга инвариантных подпространства кoквадрата $\mathcal{C}_A$. Поскольку определение “инвариантное” относится к действию линейного оператора на этих подпространствах, их роль по отношению к полуторалинейной форме $\mathcal{B}(x, y)$ правильней характеризовать термином “пара разлагающих подпространств”, т.е. подпространств, разлагающих $\mathcal{B}(x, y)$ в прямую сумму форм с меньшей областью определения.

Подпространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ можно ассоциировать с подмножествами σ_F и σ_G всего спектра σ матрицы $\mathcal{C}_A$:

$$\sigma = \sigma_F \cup \sigma_G. \tag{8}$$

Этот спектр σ можно считать характеристикой формы $\mathcal{B}$, а разложение (8) – характеристикой пары разлагающих подпространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$.

4. Можно ли найти разложение (8), удовлетворяющее условиям (7)?

Спектр σ всякого коквадрата обладает следующим свойством: если $\lambda \in \sigma$ и $|\lambda| \neq 1$, то число $\overline{\lambda^{-1}}$ также принадлежит σ, причем параметры жордановой структуры, относящиеся к λ и $\overline{\lambda^{-1}}$, одинаковы.

Совокупность собственных значений матрицы $\mathcal{C}_A$, имеющих модуль 1, будем называть унимодулярной частью ее спектра. Прочие собственные значения образуют его неунимодулярную часть. Если обе эти части непусты, то они дают разложение спектра, удовлетворяющее условиям (7).

Пусть $\mathcal{B}_F$ и $\mathcal{B}_G$ – формы, соответствующие указанному разложению. Если в унимодулярной части спектра присутствуют несколько различных собственных значений, то $\mathcal{B}_F$ можно разложить в прямую сумму форм, отвечающих каждому из них. Аналогичное утверждение справедливо в отношении формы $\mathcal{B}_G$ и неунимодулярной части спектра, если вместо различных собственных значений говорить о различных парах собственных значений вида $(\lambda,\overline{\lambda^{-1}})$.

Может случиться, что одному и тому же собственному значению λ соответствуют несколько жордановых клеток в жордановой форме коквадрата. Этот случай не поддается анализу средствами, использованными выше. Однако более тонкие рассуждения (см., например, [1]) показывают, что и здесь возможно разложение пространства в прямую сумму приводящих подпространств, каждое из которых ассоциируется с единственной жордановой клеткой для числа λ с модулем 1 либо парой клеток одинакового порядка для чисел λ и $\overline{\lambda^{-1}}$, где $|\lambda| \neq 1$.

Список литературы

1. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis. Second Edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
2. R. A. Horn, V. V. Sergeichuk, *A regularization algorithm for matrices of bilinear and sesquilinear forms.* — Linear Algebra Appl. **412** (2006), 380–395.
3. Х. Д. Икрамов, *О конгруэнтном выделении жордановых блоков из вырожденной квадратной матрицы.* — Сиб. ж. вычисл. матем. **21** (2018), 255–258.
4. Х. Д. Икрамов, *Численное решение матричных уравнений*, Наука, М., 1984.

Ikramov Kh. D. An attempt of spectral theory for the $*$-congruence transformations.

The paper discusses the possibility of reducing a square complex matrix A to a direct sum of smaller matrices by using $*$-congruence transformations. It turns out that this possibility is related to appropriate partitions of the spectrum of the cosquare of A. This makes it possible to associate the direct summands of the sum with subsets of the latter spectrum.

Московский государственный университет,
Ленинские горы, 119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 14 января 2019 г.