Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

А. Э. Гутерман, С. В. Даниелян

О ПЕРВООБРАЗНОЙ МНОГОЧЛЕНА С КРАТНЫМИ КОРНЯМИ

§1. Введение

В этой работе мы рассматриваем алгебраически замкнутое поле $\mathbb{K}$ характеристики 0. Под производной и интегралом многочлена всюду далее понимается формальное выражение, то есть если $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, то производная определяется как $f'(x) := n a_n x^{n-1} + \dots + 2a_2 x + a_1$, а первообразная – как $F(x) := \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \dots + \frac{1}{2} a_1 x^2 + a_0 x + C$, где $C \in \mathbb{K}$ – некоторая константа.

Определение 1.1. *Будем говорить, что многочлен f является многочленом* вида (k, m), *где k, m – целые неотрицательные числа, если у многочлена f имеется ровно k различных простых корней и ровно m различных кратных корней.*

Рассмотрим некоторые многочлены и укажем их вид.

Пример 1.2. $(x - a_1)(x - a_2)$ – многочлен вида $(2, 0)$,
$(x - a_1)(x - a_2)^7$ – многочлен вида $(1, 1)$,
$(x - a_1)^4(x - a_2)^5$ – многочлен вида $(0, 2)$.

Определение 1.3. *Многочлен $F \in \mathbb{K}[x]$ называется* полным интегралом *многочлена $f \in \mathbb{K}[x]$, если $F' = f$ и для любого $a \in \mathbb{K}$ из условия $(x-a)^2 | f$ следует, что $(x-a) | F$. Иначе говоря, любой кратный корень многочлена f является корнем многочлена F.*

Рассмотрим некоторые примеры интегралов.

Пример 1.4. Пусть $f(x) = x^2$.

1. Многочлен $F_1(x) = x^3$ является полным интегралом многочлена $f(x)$, так как 0 является корнем многочлена $F_1(x)$.

2. Многочлен $F_2(x) = x^3 + 1$, хоть и является интегралом многочлена $f(x)$, полным интегралом являться не будет, так как 0 не является корнем $F_2(x)$.

Ключевые слова: многочлены, кратные корни, производные, матрицы.
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01124.

Связь корней многочлена с корнями его производной активно изучалась, начиная с работ Гаусса. В [2] рассматривалась задача изучения корней производной как положения равновесия в некотором поле сил. А именно, если в корнях комплексного многочлена поместить частицы, масса которых равна кратности корня, и считать, что сила притяжения, создаваемая частицей, обратно пропорциональна расстоянию до частицы, то положения равновесия поля сил этой системы расположены в точности в корнях производной многочлена, отличных от корней исходного многочлена. Из этого утверждения легко следует теорема Гаусса-Люка [4], утверждающая, что корни производной многочлена принадлежат выпуклой оболочке корней этого многочлена. В дальнейшем этот результат обобщался и уточнялся, см. [5, глава 1]. В то же время, ряд вопросов по-прежнему остается открытым; самый известный из них – это гипотеза Сендова [5, глава 1, раздел 7]. Другое направление исследований в этой области: охарактеризовать пары многочленов, все корни которых и их производных совпадают, см. [6, 7]. Всесторонне изучаются также критические значения многочлена, их совпадения и связанные с ним стратификации пространств многочленов, см., например, [1].

Заметим, что хотя связь корней производной с корнями исходного многочлена рассматривалась, обратная задача сохранения кратных корней многочлена при переходе к его интегралу остается неизученной. В настоящей работе мы исследуем эту проблему. Описаны виды многочленов, для которых полный интеграл существует или не существует независимо от значения корней; исследованы вопросы единственности полного интеграла.

Статья построена следующим образом. §2 посвящен изучению связей между корнями многочлена с кратными корнями и корнями его производной. В §3 описаны полные интегралы многочленов некоторого специального вида.

§2. Свойства многочленов с кратными корнями

Для наших рассмотрений актуально следующее свойство векторных пространств.

Лемма 2.1 ([3, теорема 1.2])**.** *Векторное пространство над бесконечным полем не может быть представлено в виде конечного объединения собственных подпространств.*

Определение 2.2. *Пусть $\mathbb{K}_l[x]$ – пространство многочленов степени не выше l и заданы попарно различные элементы $b_1, \ldots, b_s \in \mathbb{K}$. Через $U_i \subseteq \mathbb{K}_l[x]$ будем обозначать подпространство многочленов, равных нулю в точке b_i, $i = 1, \ldots, s$, а через $U_0 \subseteq \mathbb{K}_l[x]$ – подпространство многочленов степени строго меньшей l. Также обозначим $U = U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_s$.*

Лемма 2.3. *Подпространства $U_0, U_1, \ldots, U_s$ являются собственными линейными подпространствами $\mathbb{K}_l[x]$.*

Доказательство. Для любых многочленов $f, g \in \mathbb{K}[x]$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ имеем

$$\deg(f+g) \leqslant \max(\deg(f), \deg(g)),$$

$$\deg(\lambda f) \leqslant \deg(f),$$

откуда получаем, что U_0 является линейным подпространством пространства $\mathbb{K}_l[x]$, и так как $x^l \notin U_0$, то U_0 является собственным подпространством $\mathbb{K}_l[x]$.

Далее, для любых многочленов $f, g \in \mathbb{K}[x]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ и $a \in \mathbb{K}$ такого, что $f(a) = g(a) = 0$, имеем:

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) = 0,$$

$$(\lambda f)(a) = \lambda f(a) = 0.$$

Поэтому $U_1, \ldots, U_s$ являются линейными подпространствами $\mathbb{K}_l[x]$. Так как $1 \notin U_i, i = 1, \ldots, s$, получаем, что $U_1, \ldots, U_s$ являются собственными подпространствами $\mathbb{K}_l[x]$. □

Следствие 2.4. *Не существует собственного подпространства $W \subset \mathbb{K}_l[x]$ такого, что $\mathbb{K}_l[x] = U \cup W$.*

Доказательство. Для любого собственного подпространства $W \subset \mathbb{K}_l[x]$ справедливо, что множество $U \cup W := U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_s \cup W$ является конечным объединением собственных подпространств $\mathbb{K}_l[x]$. Поэтому, по лемме 2.1, получаем, что $\mathbb{K}_l[x] \neq U \cup W$. □

Обозначение 2.5. Пусть заданы различные числа $b_1, \ldots, b_s$ и целые неотрицательные элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{K}$. Тогда

$$q(x) := (x-b_1)^{\alpha_1} \ldots (x-b_s)^{\alpha_s} \in \mathbb{K}[x],$$

$$Q(x) := q(x)(x-b_1) \ldots (x-b_s) \in \mathbb{K}[x].$$

Лемма 2.6. *Рассмотрим многочлены* $q, Q \in \mathbb{K}[x]$ *из обозначения* 2.5. *Тогда для любого ненулевого многочлена* $g \in \mathbb{K}[x]$ *верно, что* $q \,|\, (gQ)'$, *т.е.* $f(x) = \frac{gQ'}{q}$ *является многочленом и* $\deg(f) = \deg(g) + s - 1$.

Доказательство. Для введенного многочлена Q, как показывает непосредственная проверка, $Q'(x) = (x-b_1)^{\alpha_1} h(x)$, где

$$h(x) = (x-b_1)\Big((x-b_2)^{\alpha_2+1}\cdots(x-b_s)^{\alpha_s+1}\Big)' \\ + (\alpha_1+1)(x-b_2)^{\alpha_2+1}\cdots(x-b_s)^{\alpha_s+1}.$$

Следовательно, $(x-b_1)^{\alpha_1}|Q'$. Аналогично, $(x-b_i)^{\alpha_i}|Q'$ для всех $i = 1, \dots, s$. Так как $b_1, \dots, b_s$ попарно различны, получаем, что произведение соответствующих одночленов q делит Q'.

Для любого многочлена g имеем $(gQ)' = g'Q + gQ'$, а так как $q \,|\, Q$ и $q \,|\, Q'$, получаем, что $q \,|\, (gQ)'$. Более того,

$$\begin{aligned} \deg\left(\frac{(gQ)'}{q}\right) &= \deg((gQ)') - \deg(q) = \deg(gQ) - 1 - \deg(q) \\ &= \deg(g) + \deg(Q) - 1 - \deg(q) \\ &= \deg(g) - 1 - (\deg(Q) - \deg(q)) = \deg(g) + s - 1. \quad \square \end{aligned}$$

Для попарно различных элементов $b_1, \dots, b_s \in \mathbb{K}$ рассмотрим многочлены $q, Q \in \mathbb{K}[x]$ из обозначения 2.5, построенные по $b_1, \dots, b_s$, и отображение пространств многочленов

$$\begin{aligned} &\varphi_{l,s} : \mathbb{K}_l[x] \longrightarrow \mathbb{K}_{l+s-1}[x], \\ &\varphi_{l,s} : g \longmapsto f = \frac{(Qg)'}{q}. \end{aligned}$$

Также рассмотрим подпространство $U \subset \mathbb{K}_{l+s-1}[x]$, построенное в определении 2.2 для $b_1, \dots, b_s$.

Лемма 2.7. *Определенное выше отображение* $\varphi_{l,s}$ *имеет следующие свойства:*

1. $\varphi_{l,s}$ *является линейным отображением;*
2. *ядро* $Ker\,\varphi_{l,s} = 0$;
3. *если* $s > 1$, *то* $(Im\,\varphi_{l,s}) \cup U \subset \mathbb{K}_{l+s-1}[x]$, *причем это включение является строгим;*
4. *если* $s = 1$, *то отображение* $\varphi_{l,s}$ *обратимо.*

Доказательство. 1. Из леммы 2.6 имеем, что $f := \frac{(Qg)'}{q}$ является многочленом. Поэтому отображение $\varphi_{l,s}$ определено корректно. Покажем, что отображение $\varphi_{l,s}$ линейно. Действительно,

$$\begin{aligned}\varphi_{l,s}(g_1+g_2) &= \frac{(Q(g_1+g_2))'}{q} = \frac{(Qg_1+Qg_2)'}{q} \\ &= \frac{(Qg_1)'}{q} + \frac{(Qg_2)'}{q} = \varphi_{l,s}(g_1)+\varphi_{l,s}(g_2), \\ \varphi_{l,s}(\lambda g) &= \frac{(Q\lambda g)'}{q} = \lambda\frac{(Qg)'}{q} = \lambda\varphi_{l,s}(g).\end{aligned}$$

2. Допустим, что существует многочлен $0 \neq g \in \operatorname{Ker}\varphi_{l,s}$. Тогда $f = \frac{(Qg)'}{q} = 0$. По лемме 2.6, имеем:

$$0 = \deg(f) = \deg\left(\frac{(Qg)'}{q}\right) = \deg(g) + s - 1 \geqslant \deg(g),$$

откуда получаем, что $\deg(g) \leqslant 0$, что невозможно в силу выбора g. Значит, $\operatorname{Ker}\varphi_{l,s} = 0$.

3. Известно, что размерность пространства выражается как

$$\dim \mathbb{K}_l[x] = \dim\operatorname{Ker}\varphi_{l,s} + \dim\operatorname{Im}\varphi_{l,s},$$

откуда

$$\dim\operatorname{Im}\varphi_{l,s} = \dim\mathbb{K}_l[x] - \dim\operatorname{Ker}\varphi_{l,s} = l+1-0 < l+s,$$

так как $s>1$. Значит, $\operatorname{Im}\varphi_{l,s}$ – собственное подпространство $\mathbb{K}_{l+s-1}[x]$. Тогда, по следствию 2.4, получаем, что $\mathbb{K}_{l+s-1}[x] \neq \operatorname{Im}\varphi_{l,s} \cup U$.

4. Имеем

$$\begin{aligned}\dim\operatorname{Im}\varphi_{l,s} &= \dim\mathbb{K}_l[x] - \dim\operatorname{Ker}\varphi_{l,s} = \dim\mathbb{K}_l[x] \\ &= l+1 = l+s = \dim\mathbb{K}_{l+s-1}[x],\end{aligned}$$

так как $s = 1$. Значит, отображение $\varphi_{l,s}$ сюръективно. Поскольку $\operatorname{Ker}\varphi_{l,s} = 0$, то $\varphi_{l,s}$ биективно. Тогда отображение $\varphi_{l,s}$ обратимо. □

Лемма 2.8. *Пусть $\varphi_{l,s}$ – линейное отображение из леммы 2.7. Тогда $Im\varphi_{l,s} \nsubseteq U$.*

Доказательство. 1. Покажем, что $\operatorname{Im}\varphi_{l,s} \nsubseteq U_0$. Действительно, по лемме 2.6,

$$\deg(\varphi_{l,s}(x^l)) = \deg\left(\frac{(Qx^l)'}{q}\right) = \deg(x^l) + s - 1 = l + s - 1$$

– максимальная степень, значит, $\varphi_{l,s}(x^l) \notin U_0$.

2. Теперь покажем, что $\operatorname{Im} \varphi_{l,s} \nsubseteq U_i$, $i = 1, \ldots, s$. Действительно, $\varphi_{l,s}(1) = \frac{Q'}{q}$. Обозначим через $\mu_f(x_0)$ кратность корня x_0 многочлена $f(x)$. Тогда из определения многочленов Q и q имеем: $\mu_Q(b_i) = \alpha_i + 1$, откуда, $\mu_{Q'}(b_i) = \alpha_i$, тогда как $\mu_q(b_i) = \alpha_i$ для всех $i = 1, \ldots, s$. Следовательно, $\frac{Q'}{q}(b_i) \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, s$. Отсюда получаем, что $\varphi_{l,s}(1) \notin U_i, i = 1, \ldots, s$. Тогда $\operatorname{Im} \varphi_{l,s} \nsubseteq U_i, i = 1, \ldots, s$.

3. Из пп. 1 и 2 следует, что подпространства $\operatorname{Im} \varphi_{l,s} \cap U_i$, $i = 0, \ldots, s$ – собственные подпространства $\operatorname{Im} \varphi_{l,s}$, и значит, по лемме 2.1, получаем, что $\operatorname{Im} \varphi_{l,s} \nsubseteq U := U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_s$. Действительно, если $\operatorname{Im} \varphi_{l,s} \subseteq U$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \varphi_{l,s} &= \operatorname{Im} \varphi_{l,s} \cap U = \operatorname{Im} \varphi_{l,s} \cap (U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_s) \\ &= (\operatorname{Im} \varphi_{l,s} \cap U_0) \cup (\operatorname{Im} \varphi_{l,s} \cap U_1) \cup \ldots \cup (\operatorname{Im} \varphi_{l,s} \cap U_s),\end{aligned}$$

откуда следует, что пространство $\operatorname{Im} \varphi_{l,s}$ является конечным объединением своих собственных подпространств, что противоречит лемме 2.1. $\square$

Определение 2.9. *Будем говорить, что матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K}[x])$$

сохраняет наибольший общий делитель многочленов, если для любых многочленов $f, g \in \mathbb{K}[x]$ выполняется равенство $\mathrm{GCD}(f, g) = \mathrm{GCD}((f, g)A)$. *Здесь* $\mathrm{GCD}((f, g)A) = \mathrm{GCD}(a_{11}f + a_{21}g, a_{12}f + a_{22}g)$ *– наибольший общий делитель многочленов, полученных при умножении строки (f, g) на матрицу A.*

Определение 2.10. *Обозначим через Γ подгруппу в $GL_2(\mathbb{K}[x])$, порожденную матрицами*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{K}[x], \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \right\}.$$

Лемма 2.11. *Пусть матрица $A \in \Gamma$, тогда матрица A сохраняет наибольший общий делитель многочленов.*

Доказательство. 1. Пусть $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $(f, g)A = (g, f)$. Таким образом, $\mathrm{GCD}(f, g) = \mathrm{GCD}(g, f) = \mathrm{GCD}((f, g)A)$.

2. Пусть $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}$, тогда $(f,g)A = (f+hg,g)$. Пусть $d_1 = \mathrm{GCD}(f,g), d_2 = \mathrm{GCD}(f+hg,g)$. Тогда $d_1|f, d_1|hg$ и, значит, $d_1|(f+hg)$. Так как, по определению, $d_1|g$, то $d_1|d_2$.

С другой стороны, $d_2|hg$, $d_2|(f+hg)$, а значит $d_2|f$ и, следовательно, $d_2|d_1$. Получаем, что $d_1 = d_2$.

3. Пусть $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Тогда $(f,g)A = (\lambda_1 f, \lambda_2 g)$. Таким образом, $\mathrm{GCD}(f,g) = \mathrm{GCD}(\lambda_1 f, \lambda_2 g) = \mathrm{GCD}((f,g)A)$.

4. Пусть, наконец, $A = A_1 \dots A_l$, где

$$A_i \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{K}[x], \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \right\}, \quad i = 1, \dots, l.$$

Обозначим $(u_0, v_0) = (f,g)$, $(u_i, v_i) = (u_{i-1}, v_{i-1})A_i$, $i = 1, \cdots, l$. Тогда $\mathrm{GCD}(u_i, v_i) = \mathrm{GCD}(u_{i-1}, v_{i-1})$ по доказанному в пп. 1, 2 и 3. Значит

$$\begin{aligned} \mathrm{GCD}(f,g) &= \mathrm{GCD}(u_0, v_0) = \mathrm{GCD}(u_1, v_1) \\ &= \cdots = \mathrm{GCD}(u_l, v_l) = \mathrm{GCD}((f,g)A). \end{aligned} \qquad \square$$

Лемма 2.12. *Для любых многочленов $f, g \in \mathbb{K}[x]$, хотя бы один из которых отличен от 0, существует матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \Gamma$ такая, что $(f,g)A = (\mathrm{GCD}(f,g), 0)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по сумме степеней $\deg(f) + \deg(g)$.

1. База индукции: $\deg(f) + \deg(g) = 0$. Тогда f, g – константы. По условию, хотя бы один из них не равен нулю.

1а. Пусть $f \neq 0$, $g = 0$. Тогда $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{f} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$ и $(f,g)A = (1,0) = (\mathrm{GCD}(f,g), 0)$.

1б. Пусть $f \neq 0$, $g \neq 0$. Тогда $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{g} & 0 \\ 0 & \frac{1}{g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{f}{g} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $(f,g)A = (1,0) = (\mathrm{GCD}(f,g), 0)$. Действительно,

$$(f,g)A=(f,g)\begin{pmatrix}\frac{1}{g}&0\\0&\frac{1}{g}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{f}{g}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=(\frac{f}{g},1)\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{f}{g}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=(0,1)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=(1,0).$$

1в. Пусть $f=0$, $g\neq 0$. Тогда $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{g}&0\\0&\frac{1}{g}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ и $(f,g)A=(1,0)=(\mathrm{GCD}(f,g),0)$.

2. Пусть $\deg(f)+\deg(g)=s>0$ и для всех $i<s$ лемма верна.

2а. Рассмотрим случай $\deg(f)\geqslant\deg(g)$. Тогда $\deg(f)>0$. Пусть c_1 – старший коэффициент f, c_2 – старший коэффициент g. Если $g=0$, то, выбрав матрицу $A_0=\begin{pmatrix}1/c_1&0\\0&1\end{pmatrix}$, получим

$$(f,g)A=\left(\frac{1}{c_1}f,g\right)=\left(\frac{1}{c_1}f,0\right)=\big(\mathrm{GCD}(f,g),0\big).$$

Поэтому пусть теперь $g\neq 0$. Тогда выберем матрицу

$$A_0=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{c_1}{c_2}x^{\deg(f)-\deg(g)}&1\end{pmatrix}\in\Gamma$$

и многочлен $f_0:=f-\frac{c_1}{c_2}x^{\deg(f)-\deg(g)}g$. Тогда

$$(f,g)A_0=(f_0,g).$$

По лемме 2.11 получаем, что $\mathrm{GCD}(f,g)=\mathrm{GCD}(f_0,g)$. Далее, так как $\deg(f_0)<\deg(f)$, то $\deg(f_0)+\deg(g)<s=\deg(f)+\deg(g)$, поэтому, по предположению индукции, существует матрица $A_1\in\Gamma$ такая, что $(f_0,g)A_1=(\mathrm{GCD}(f_0,g),0)=(\mathrm{GCD}(f,g),0)$. Тогда искомая матрица A равна A_0A_1. Действительно,

$$(f,g)A=(f,g)A_0A_1=(f_0,g)A_1=(\mathrm{GCD}(f,g),0).$$

2б. Пусть $\deg(f)<\deg(g)$. Положим $A_0=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ и обозначим $(f_0,g_0)=(g,f)=(f,g)A_0$. По пункту 2а, существует матрица $A_1\in\Gamma$, такая что $(f_0,g_0)A_1=(\mathrm{GCD}(f_0,g_0),0)=(\mathrm{GCD}(f,g),0)$. Тогда искомая матрица A равна A_0A_1. Действительно,

$$(f,g)A=(f,g)A_0A_1=(f_0,g_0)A_1=(\mathrm{GCD}(f,g),0).$$

□

Лемма 2.13. *Пусть матрица $A \in GL_2(\mathbb{K}[x])$ сохраняет наибольший общий делитель многочленов. Тогда $A \in \Gamma$.*

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда для любых многочленов $f, g \in \mathbb{K}[x]$ имеют место соотношения:

$$(f, g)A = (a_{11}f + a_{21}g, a_{12}f + a_{22}g),$$
$$\mathrm{GCD}(f, g) = \mathrm{GCD}(a_{11}f + a_{21}g, a_{12}f + a_{22}g).$$

Тогда, подставляя 0 вместо f и g, получаем, что для любых многочленов $f, g \in \mathbb{K}[x]$ справедливы равенства

$$f = \mathrm{GCD}(f, 0) = \mathrm{GCD}(a_{11}f + a_{21} \cdot 0, a_{12}f + a_{22} \cdot 0) = \mathrm{GCD}(a_{11}f, a_{12}f),$$
$$g = \mathrm{GCD}(0, g) = \mathrm{GCD}(a_{11} \cdot 0 + a_{21}g, a_{12} \cdot 0 + a_{22}g) = \mathrm{GCD}(a_{21}g, a_{22}g).$$

Отсюда получаем, что $\mathrm{GCD}(a_{11}, a_{12}) = \mathrm{GCD}(a_{21}, a_{22}) = 1$. В силу леммы 2.12, существует матрица $A_0 \in \Gamma$ такая, что

$$(a_{11}, a_{12})A_0 = (\mathrm{GCD}(a_{11}, a_{12}), 0) = (1, 0).$$

Обозначим $(c_1, c_2) := (a_{21}, a_{22})A_0$. Тогда

$$\begin{aligned}(a_{11}f + a_{21}g, a_{12}f + a_{22}g)A_0 &= f(a_{11}, a_{12})A_0 + g(a_{21}, a_{22})A_0 \\ &= f(1, 0) + g(c_1, c_2) = (f + c_1g, c_2g).\end{aligned}$$

По лемме 2.11,

$$\mathrm{GCD}(f + c_1g, c_2g) = \mathrm{GCD}(a_{11}f + a_{21}g, a_{12}f + a_{22}g) = \mathrm{GCD}(f, g).$$

Рассмотрим произвольный многочлен $g_0 \in \mathbb{K}[x]$ и многочлен $f_0 := c_2 - c_1g_0$. Тогда

$$\mathrm{GCD}(f_0, g_0) = \mathrm{GCD}(f_0 + c_1g_0, c_2g_0) = \mathrm{GCD}(c_2, c_2g_0) = c_2.$$

Получается, что $c_2 \mid g_0$ для произвольного многочлена g_0, откуда следует, что c_2 – ненулевая константа. Тогда рассмотрим еще две матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2} \end{pmatrix} \in \Gamma, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c_1 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Для любых многочленов $f, g \in \mathbb{K}[x]$ имеем

$$\begin{aligned}(f, g)AA_0A_1A_2 &= (a_{11}f + a_{21}g, a_{12}f + a_{22}g)A_0A_1A_2 \\ &= (f + c_1g, c_2g)A_1A_2 = (f + c_1g, g)A_2 = (f, g).\end{aligned}$$

Поэтому $AA_0A_1A_2 = E$, а так как $A_0A_1A_2 \in \Gamma$, то $A \in \Gamma$. □

Объединяя утверждения леммы 2.11 и леммы 2.13, получаем

Следствие 2.14. *Матрица $A \in GL_2(\mathbb{K}[x])$ сохраняет наибольший общий делитель многочленов тогда и только тогда, когда $A \in \Gamma$.*

Лемма 2.15. *Пусть даны матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \Gamma$ и многочлены $f, g \in \mathbb{K}[x]$, не имеющие общих кратных корней. Тогда если существуют многочлены $p, q \in \mathbb{K}[x]$ такие, что для любого $t \in \mathbb{K}$ выполняется $(f+tg, f'+tg')A = (p+tq, 0)$, то $p = \mathrm{GCD}(f, f'), q = \mathrm{GCD}(g, g')$.*

Доказательство. 1. При $t = 0$ получаем, что

$$(f, f')A = (f + 0 \cdot g, f' + 0 \cdot g)A = (p + 0 \cdot q, 0) = (p, 0),$$

поэтому, по лемме 2.11, имеем $p = \mathrm{GCD}(p, 0) = \mathrm{GCD}(f, f')$.

2. Далее, выразим $(f + tg, f' + tg')A$ двумя способами:

$$(f + tg, f' + tg')A$$
$$= (a_{11}f + a_{21}f' + t(a_{11}g + a_{21}g'), a_{12}f + a_{22}f' + t(a_{12}g + a_{22}g')).$$

По доказанному в п. 1 имеем: $a_{11}f + a_{21}f' = p$ и $a_{12}f + a_{22}f' = 0$. С другой стороны, по условию,

$$(f + tg, f' + tg')A = (p + tq, 0).$$

Приравнивая эти выражения, получаем

$$(p + t(a_{11}g + a_{21}g'), t(a_{12}g + a_{22}g')) = (p + tq, 0),$$

откуда, приравнивая координаты, имеем

$$a_{12}g + a_{22}g' = 0, \quad a_{11}g + a_{21}g' = q.$$

Заметим, что мы получили равенство $(g, g')A = (q, 0)$. Переходя к наибольшим общим делителям обеих частей, по лемме 2.11, получаем $q = \mathrm{GCD}(g, g')$. □

Лемма 2.16. *Пусть $f, g \in \mathbb{K}[x]$ – ненулевые многочлены с единичным старшим коэффициентом. Тогда если существует матрица $A \in \Gamma$, для которой*

$$(f, f')A = (\mathrm{GCD}(f, f'), 0) \ \text{и} \ (g, g')A = (\mathrm{GCD}(g, g'), 0),$$

то $f = g$.

Доказательство. Обозначим $p := \mathrm{GCD}(f, f')$, $q := \mathrm{GCD}(g, g')$, а также

$$v_1 := \frac{f}{p}, \quad v_2 := \frac{g}{q}, \quad w_1 := \frac{f'}{p}, \quad w_2 := \frac{g'}{q}.$$

В силу линейности A, имеем:

$$(f, f')A = p(v_1, w_1)A = p(1, 0);$$

аналогично,

$$(g, g')A = q(v_2, w_2)A = q(1, 0),$$

откуда

$$(v_1, w_1)A = (v_2, w_2)A = (1, 0).$$

Таким образом, $v_1 = v_2, w_1 = w_2$. Далее,

$$(pv_1)' = pw_1, (qv_1)' = qw_1,$$

откуда

$$q(pv_1)' = p(qv_1)' \quad \text{и} \quad p'q = pq'.$$

Получается, что рациональная функция $(\frac{p}{q})' = \frac{p'q-pq'}{q^2}$ равна нулю во всех точках, кроме корней q. Значит, $(\frac{p}{q})' = 0$ и, так как p, q имеют единичный старший коэффициент, то $p = q$, но тогда $f = v_1 p = v_2 p = v_2 q = g$. □

Лемма 2.17. *Пусть многочлены $f, g \in \mathbb{K}[x]$ не имеют общих кратных корней. Тогда* $\mathrm{GCD}(\mathrm{GCD}(f, f'), \mathrm{GCD}(g, g')) = 1$.

Доказательство. Действительно, пусть

$$d = \mathrm{GCD}(\mathrm{GCD}(f, f'), \mathrm{GCD}(g, g')) \neq 1.$$

Тогда у d есть корень a. Так как $d|f$ и $d|f'$, то a является кратным корнем f. Аналогично, a является кратным корнем g. Противоречие с условием леммы. □

Лемма 2.18. *Пусть $f, g \in \mathbb{K}[x]$ – многочлены без общих кратных корней. Тогда множество*

$$T := \{t \in \mathbb{K} \,|\, \text{многочлен } f + tg \in \mathbb{K}[x] \text{ имеет кратный корень}\}$$

конечно.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что f, g – различные ненулевые многочлены с единичным старшим коэффициентом.

Обозначим $p := \mathrm{GCD}(f, f')$, $q := \mathrm{GCD}(g, g')$. Так как, по условию, f и g не имеют общих кратных корней, то, по лемме 2.17, $\mathrm{GCD}(p, q) = 1$.

Пусть $d_t := \mathrm{GCD}(f+tg, f'+tg') \neq 1$ для бесконечного числа различных t. По лемме 2.12, получаем, что можно сконструировать матрицу $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \Gamma$ такую, что $(f, f')B = (p, 0)$.

Тогда, по лемме 2.11, имеем:

$$\begin{aligned} d_t &= \mathrm{GCD}(f+tg, f'+tg') = \mathrm{GCD}((f+tg, f'+tg')B) \\ &= \mathrm{GCD}(p + t(b_{11}g + b_{21}g'), t(b_{12}g + b_{22}g')). \end{aligned}$$

Рассмотрим $h := b_{12}g + b_{22}g' \in \mathbb{K}[x]$. Предположим, что $h \neq 0$. Так как

$$d_t = \mathrm{GCD}(p + t(b_{11}g + b_{21}g'), t(b_{12}g + b_{22}g')),$$

то $d_t \,|\, h$ для любого $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Тогда рассмотрим бесконечное множество $T := \{t \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \,|\, d_t \neq 1\}$. Для каждого $t \in T$ существует $z_t \in \mathbb{K}$ такой, что $h(z_t) = d_t(z_t) = 0$. Тогда, поскольку многочлен h имеет конечное количество корней, найдутся такие различные $t_1, t_2 \in T$, что $z_{t_1} = z_{t_2}$. Тогда, взяв $z_0 = z_{t_1} = z_{t_2}$, получаем

$$d_{t_1}(z_0) = d_{t_2}(z_0) = (b_{12}g + b_{22}g')(z_0) = h(z_0) = 0.$$

Таким образом,

$$f(z_0) + t_1 g(z_0) = f(z_0) + t_2 g(z_0) = 0$$

и

$$f'(z_0) + t_1 g'(z_0) = f'(z_0) + t_2 g'(z_0) = 0,$$

откуда $f(z_0) = f'(z_0) = g(z_0) = g'(z_0) = 0$, и z_0 – общий кратный корень f и g, что противоречит условию леммы.

Следовательно, $h = 0$. Тогда, по лемме 2.15, получаем, что

$$(f, f')B = (p, 0), (g, g')B = (q, 0),$$

откуда, в силу леммы 2.16, получаем $f = g$. Противоречие с определением f и g. □

Лемма 2.19. *Пусть многочлены $f, q \in \mathbb{K}[x]$ удовлетворяют условию $q \,|\, \mathrm{GCD}(f, f')$ и многочлен $\frac{f'}{q}$ не имеет кратных корней. Тогда существует $a \in \mathbb{K}$ такое, что $f(a) \neq 0$ и для любого натурального l*

1. $q(x-a)^{l-1} \,|\, (f(x-a)^l)'$, *т.е* $\frac{(f(x-a)^l)'}{q(x-a)^{l-1}}$ *– многочлен;*
2. *многочлен* $\frac{(f(x-a)^l)'}{q(x-a)^{l-1}}$ *не имеет кратных корней.*

Доказательство. 1. Действительно, преобразуем

$$h(x) := \frac{(f(x-a)^l)'}{q(x-a)^{l-1}} = \frac{f'(x-a)^l + lf(x-a)^{l-1}}{q(x-a)^{l-1}} = \frac{f'}{q}(x-a) + l\frac{f}{q}.$$

Так как $q \mid \mathrm{GCD}(f, f')$, то рациональные функции $\frac{f}{q}, \frac{f'}{q}$ являются многочленами, а значит $h(x)$ является многочленом, и, следовательно, $((x-a)^{l-1}q) \mid ((x-a)^l f)'$.

2. Обозначим $f_0 := x\frac{f'}{q} + l\frac{f}{q}$, $g_0 := -\frac{f'}{q}$. Заметим, что $h(x) = f_0 + ag_0$. Тогда, так как по условию многочлен g_0 не имеет кратных корней, f_0 и g_0 не имеют общих кратных корней. А значит, по лемме 2.18, существует бесконечно много различных $t \in \mathbb{K}$, таких что $f_0 + tg_0$ не имеет кратных корней. Мы можем выбрать из этого бесконечного множества такое t, что $f(t) \neq 0$, так как у многочлена f конечное число корней. Тогда, взяв $a = t$, получим, что многочлен h не имеет кратных корней и $f(a) \neq 0$. □

Лемма 2.20. *Многочлен*

$$f(x) := (x-a_1)^{\alpha_1} \cdots (x-a_s)^{\alpha_s} \in \mathbb{K}[x], \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{N},$$
$$\alpha_i > 1, \quad i = 1, \ldots, s,$$

является полным интегралом своей производной тогда и только тогда, когда рациональная функция $\frac{f'(x)}{q(x)}$*, где* $q(x) := (x-a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (x-a_s)^{\alpha_s - 1}$ *является многочленом, и* $f(x)$ *не имеет кратных корней.*

Доказательство. По лемме 2.6, $q(x) \mid f'(x)$, и рациональная функция $h(x) := \frac{f'(x)}{q(x)}$ является многочленом.

1. Пусть многочлен $f(x)$ является полным интегралом многочлена $f'(x)$. Допустим, что $b \in \mathbb{K}$ является кратным корнем многочлена $h(x)$.

1а. Пусть $b \notin \{a_1, \ldots, a_s\}$, тогда $(x-b) \nmid f$. С другой стороны, по условию, $(x-b)^2 \mid h(x) = \frac{f'(x)}{q(x)}$. Следовательно, $(x-b)^2 \mid f'(x)$, что противоречит определению полного интеграла.

1б. Пусть $b = a_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, s$. Напомним, что $\mu_p(x_0)$ обозначает кратность корня x_0 многочлена $p(x)$. Так как $\mu_f(a_i) = \alpha_i > 1$, то $\mu_{f'}(a_i) = \alpha_i - 1$. По условию, $\mu_q(a_i) = \alpha_i - 1$. Тогда $h(b) = h(a_i) = \frac{f'}{q}(a_i) \neq 0$. Противоречие с тем, что b является корнем многочлена $h(x)$.

2. Пусть многочлен $h(x)$ не имеет кратных корней. Допустим, что $b \in \mathbb{K}$ является кратным корнем многочлена $f'(x)$, но не является

корнем многочлена $f(x)$. Тогда b отличен от $a_1, \dots, a_s$, значит $(x - b) \nmid q(x)$. Тогда из $(x-b)^2 \mid f'(x)$ следует, что $(x-b)^2 \mid h(x)$. То есть b является кратным корнем многочлена $h(x)$, что противоречит тому, что многочлен $h(x)$ не имеет кратных корней. □

§3. Зависимость существования полного интеграла многочлена от вида многочлена

Лемма 3.1. *Пусть $f \in \mathbb{K}[x]$ – многочлен степени n вида $(k, 0)$. Тогда любой интеграл многочлена f является полным интегралом.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из определения 1.3. □

Лемма 3.2. *Пусть $f \in \mathbb{K}[x]$ – многочлен степени n вида (k, m), причем $m > 0$, и пусть полный интеграл f существует. Тогда любые два полных интеграла многочлена f равны.*

Доказательство. Пусть F_1, F_2 – полные интегралы многочлена f. Поскольку $m > 0$, существует b – кратный корень многочлена f.

Далее, если $F_1' = F_2' = f$, то $(F_1 - F_2)' = 0$. Так как $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$, то $F_1 - F_2 = c \in \mathbb{K}$. Подставляя точку b, получим

$$0 = F_1(b) - F_2(b) = c,$$

откуда $c = 0$ и $F_1 = F_2$. □

Теорема 3.3. *Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{N}, \alpha_i > 1$. Тогда существуют такие попарно различные $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}$, что многочлен $f(x) := (x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_s)^{\alpha_s}$ является полным интегралом своей производной.*

Доказательство. Индукция по s.

1. При $s = 1$ достаточно взять любой a_1, так как у производной будет единственный корень:

$$f'(x) = ((x - a_1)^{\alpha_1})' = \alpha_1 (x - a_1)^{\alpha_1 - 1},$$

поэтому любой кратный корень многочлена f' является корнем многочлена f, значит многочлен f является полным интегралом своей производной.

2. Пусть лемма верна для всех $s_0 < s$. Тогда выберем попарно различные $a_1, \dots, a_{s-1}$ такие, что многочлен

$$f_0(x) := (x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_{s-1})^{\alpha_{s-1}},$$

является полным интегралом своей производной. Обозначим

$$q(x) := (x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_{s-1})^{\alpha_{s-1}-1}.$$

По лемме 2.20, многочлен $\frac{f_0'(x)}{q(x)}$ не имеет кратных корней. Откуда, по лемме 2.19, существует такой $a_s \in \mathbb{K}$, что $f_0(a_s) \neq 0$ и многочлен $\frac{((x-a_s)f_0(x))'}{q(x)(x-a_s)^{\alpha_s-1}}$ не имеет кратных корней. Тогда, взяв $f(x) := f_0(x)(x-a_s)^{\alpha_s}$, получаем, что, по лемме 2.20, многочлен $f(x)$ является полным интегралом своей производной, а так как $f_0(a_s) \neq 0$, то все числа $a_1,\ldots,a_s$ различны, то есть многочлен $f(x)$ имеет требуемый в условии леммы вид. □

В случае упорядоченного основного поля, утверждение этой теоремы справедливо для любого набора $a_1,\ldots,a_s$, как показывает следующий результат.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathbb{K}$ – упорядоченное поле нулевой характеристики, не обязательно алгебраически замкнутое. Предположим, что $\alpha_1,\ldots,\alpha_s \in \mathbb{N}$, $\alpha_i > 1$. Тогда для произвольных попарно различных $a_1,\ldots,a_s \in \mathbb{K}$ многочлен $f(x) := (x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_s)^{\alpha_s}$ является полным интегралом своей производной.*

Доказательство. Рассмотрим рациональную функцию $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Прямым вычислением получаем, что

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{s}\frac{\alpha_i}{x-a_i}.$$

Заметим, что если $x_0 \in \mathbb{K}$ – кратный корень $f'(x)$, не являющийся корнем $f(x)$, то x_0 – кратный корень $\frac{f'(x)}{f(x)}$, т.е. $\frac{f'}{f}(x_0) = 0$ и $\left(\frac{f'}{f}\right)'(x_0) = 0$. Дифференцируя функцию $\frac{f'(x)}{f(x)}$, из второго равенства получаем:

$$\left(\frac{f'}{f}\right)'(x_0) = \sum_{i=1}^{s}\frac{-\alpha_i}{(x_0-a_i)^2} = 0,$$

но так как каждое слагаемое отрицательно, сумма не может равняться нулю. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Следствие 3.5. *Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Тогда в теореме 3.3 можно взять любые попарно различные $a_1,\ldots,a_s$.*

Доказательство. Так как $\mathbb{R}$ упорядочено, мы можем применить лемму 3.4 $\square$

Следующий пример показывает, что утверждение леммы 3.4 не выполняется в случае неупорядоченного поля или в том случае, когда многочлен f не раскладывается на линейные множители в $\mathbb{K}$.

Пример 3.6. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Тогда в теореме 3.3 нельзя взять произвольные попарно различные $a_1, \dots, a_s$. Например, у многочлена

$$f(x) := (x^3 - 1)^2$$

все три комплексных корня имеют кратность 2. Однако его производная

$$f'(x) = 6x^2(x^3 - 1)$$

имеет кратный корень 0. Поскольку $f(0) \neq 0$, многочлен f не является полным интегралом своей производной.

Теорема 3.7. *Пусть $\mathbb{K}$ – произвольное поле, а $f \in \mathbb{K}[x]$ – многочлен степени n вида (k, m). Если $m > k + 1$, то не существует полного интеграла многочлена f.*

Доказательство. Действительно, если у многочлена f имеется m кратных корней $b_1, \dots, b_m$ кратностей $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, то у полного интеграла F корни $b_1, \dots, b_m$ будут иметь кратности $\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_m + 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} n + 1 = \deg(F) &\geqslant \deg((x - b_1)^{\alpha_1 + 1} \cdots (x - b_m)^{\alpha_m + 1}) \\ &= m + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = m + (n - k). \end{aligned}$$

Следовательно, $k + 1 \geqslant m$, что противоречит условию теоремы. $\square$

Теорема 3.8. *Пусть $f \in \mathbb{K}[x]$ – многочлен степени n вида $(k, 1)$. Тогда существует полный интеграл многочлена f.*

Доказательство. Обозначим через $a_1, \dots, a_k$ простые корни многочлена f, а через b_1 – корень кратности $\alpha_1 > 1$. Далее обозначим

$$Q(x) := (x - b_1)^{\alpha_1 + 1}, \quad q(x) := (x - b_1)^{\alpha_1}, \quad h(x) := (x - a_1) \dots (x - a_k).$$

Рассмотрим отображение $\varphi := \varphi_{n,1}$ из леммы 2.7. Оно является изоморфизмом, а значит, найдется такой многочлен g_0, что $\varphi(g_0) = h$. Тогда $(Qg_0)' = q\varphi(g_0) = qh = f$, и, так как $Q(b_1) = 0$, многочлен Qg_0 – полный интеграл f. $\square$

Список литературы

1. С. Здравковска, *Топологическая классификация полиномиальных отображений.* — Усп. матем. наук **25**:4 (1970), 179–180.
2. C. F. Gauss, Gauβ Werke, 3, 2nd Edn, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1876.
3. A. Khare, *Vector spaces as unions of proper subspaces.* — Linear Algebra Appl. **431**, No. 9 (2009), 1681–1686.
4. F. Lukas, *Sur une application de la mécanique rationnelle à la théorie des équations.* — C. R. Acad. Sci. (Paris) **89** (1879), 224–230.
5. Q. I. Rahman, G. Schmeisser, Analytic Theory of Polynomials, Oxford, Clarendon Press, 2002.
6. M. Roitman, *On roots of polynomials and of their derivatives.* — J. London Math. Soc. **27**, No. 2 (1983), 248–256.
7. Ch.-Ch. Yang, *A problem on polynomials.* — Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **22** (1977), 595–598.

Guterman A. E., Danielyan S. V. On the integral of a polynomial with multiple roots.

A full integral of a polynomial is defined as its integral with the property that any multiple root of the polynomial is a root of this integral. The paper investigates relationships between the existence of a full integral and the form of a polynomial. In particular, it is proved that the full integral exists if the polynomial has no more than one multiple root. The full integral does not exist if the number of multiple roots strictly exceeds the number of simple roots increased by one.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Москва 119991, Россия
E-mail: guterman@list.ru

Московский
физико-технический институт,
Долгопрудный 141701, Россия
E-mail: dsvnja@gmail.com

Поступило 10 октября 2019 г.