Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

А. К. Абдикалыков, Х. Д. Икрамов

АВТОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВА ГАНКЕЛЕВЫХ МАТРИЦ, ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫЕ ПУТЕМ ПОДОБИЯ

§1. Введение

Пусть H_n – линейное пространство комплексных ганкелевых матриц порядка n. Нас интересует вопрос о том, какие невырожденные матрицы, действуя на H_n подобием, не выводят за пределы этого пространства. Другими словами, для каких матриц U верно

$$\forall A \in H_n \Rightarrow U^{-1}AU \in H_n?$$

Обозначим символом $\mathrm{Aut}(H_n)$ множество всех невырожденных матриц, обладающих указанным свойством.

Для частного случая унитарных подобий эта задача была решена в [1, 2], где была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *При $n \geqslant 3$ любая унитарная матрица $U \in \mathrm{Aut}(H_n)$ представима в виде σT, где $\sigma \in \mathbf{C}$, $|\sigma| = 1$, а T – матрица из дискретной мультипликативной группы, образующими которой являются диагональная матрица*

$$\Lambda_n = \mathrm{diag}\ (1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1})$$

и перъединичная матрица P_n.

Перъединичной матрицей P_n мы называем матрицу, получаемую из единичной матрицы порядка n перестановкой столбцов в обратном порядке. (В англоязычной литературе нет установившегося термина для этой матрицы: помимо приведенного названия говорят также the reversal matrix, the backward identity matrix, the exchange matrix, и еще много других вариантов.)

В данной статье мы даем решение поставленной выше задачи. Оно формулируется следующей теоремой.

Ключевые слова: ганкелевы матрицы, автоморфизмы, подобия.

Теорема 2. 1. *При $n = 2$ множество* $\mathrm{Aut}(H_n)$ *состоит из всех матриц вида σQ, где $\sigma \in \mathbf{C}\backslash\{\mathbf{0}\}$, а Q – ортогональная матрица порядка* 2.

2. *При $n \geqslant 3$ множество* $\mathrm{Aut}(H_n)$ *состоит из матриц, представимых в виде σT, где $\sigma \in \mathbf{C}\backslash\{\mathbf{0}\}$, а T – матрица из дискретной мультипликативной группы, образующими которой являются матрицы Λ_n и P_n.*

§2. Доказательство теоремы 2 при $n > 2$

Пусть U – произвольная матрица из $\mathrm{Aut}(H_n)$. Тогда $U^{-1}AU \in H_n$ для любой ганкелевой матрицы A, в том числе и для матричной единицы E_{11} (здесь и далее через E_{jk} будет обозначаться матрица, единственный ненулевой элемент которой находится в позиции (j, k) и равен единице). Следовательно,

$$\begin{gathered} u_{11}v_{21} = u_{12}v_{11}, \\ u_{11}v_{31} = u_{12}v_{21} = u_{13}v_{11}, \\ u_{11}v_{41} = u_{12}v_{31} = u_{13}v_{21} = u_{14}v_{11}, \\ \dots \\ u_{11}v_{n1} = u_{12}v_{n-1,1} = u_{13}v_{n-2,1} = \ldots = u_{1n}v_{11}. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь u_{jk} и v_{jk} – элементы соответственно матриц U и U^{-1}. Заметим, что если $u_{11}u_{12} \neq 0$, то из (1) вытекают соотношения

$$v_{11}v_{31} = v_{21}^2, \ \ldots, \ v_{n-2,1}v_{n1} = v_{n-1,1}^2.$$

Аналогично, если $v_{11}v_{21} \neq 0$, то

$$u_{11}u_{13} = u_{12}^2, \ \ldots, \ u_{1,n-2}u_{1n} = u_{1,n-1}^2.$$

Если оба этих условия выполнены одновременно, то числа $u_{11}, \ldots, u_{1n}$ и $v_{11}, \ldots, v_{n1}$ образуют геометрические прогрессии с одним и тем же знаменателем.

Положим $X = U^{-1}PU$, где $P = P_n$ – перъединичная матрица. Так как перъединичная матрица является ганкелевой, то $X \in H_n$. Будучи произведением матриц из мультипликативной группы $\mathrm{Aut}(H_n)$, матрица X сама входит в эту группу. Кроме того, $X^2 = I$ согласно определению матрицы X.

Из последнего равенства выводим, что теплицева матрица $Z = XP$ удовлетворяет соотношению $Z \cdot PZP = I$, т.е. матрица Z является

обратной к матрице PZP, которая также является теплицевой. Следовательно (см. [3]), имеет место один из двух случаев:
1) Z и PZP – верхне- или нижнетреугольные матрицы;
2) Z и PZP – φ-циркулянты. (Напомним, что теплицева матрица T порядка n является φ-циркулянтом, если для некоторого фиксированного $\varphi \in \mathbf{C}$ выполняются равенства $t_{j+1,1} = \varphi t_{jn}$ для $j = 1, 2, \ldots, n-1$.)

Предположим, что имеет место случай 1. Так как Z и PZP – одновременно верхне- или нижнетреугольные матрицы, то Z диагональная, а с учетом теплицевости даже скалярная матрица. При этом $Z \cdot PZP = I$, откуда $Z = \pm I$, $X = ZP = \pm P$ и $PZP = \pm I$. Тем самым обе матрицы Z и PZP можно рассматривать как φ-циркулянты и считать, что вместо обрисованной выше дилеммы всегда имеет место случай 2.

Итак, пусть Z и PZP – нескалярные φ-циркулянты; тогда $\varphi = 1/\varphi$. Если $\varphi = 1$, то Z – циркулянт; если же $\varphi = -1$, то Z – косой циркулянт. Рассмотрим две эти ситуации, а также случай $X = \pm P$ порознь.

2.1. Z **– циркулянт.** Пусть сначала Z – циркулянт с первой строкой $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Поскольку $X \in \mathrm{Aut}(H_n)$, то матрица $X^{-1}E_{11}X$ является ганкелевой, поэтому

$$\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2^2, \quad \alpha_2\alpha_4 = \alpha_3^2, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-2}\alpha_n = \alpha_{n-1}^2. \tag{2}$$

Будем различать два случая: $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 \neq 0$.

Подслучай $\alpha_2 = 0$. Из (2) следует, что $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. Используя результат, полученный в [4], можно выразить собственные значения матрицы X через числа $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \alpha_n$. Напомним, что матрицы X и P подобны, поэтому их спектры должны совпадать.

При $n = 2m$ матрица P имеет собственные значения 1 и -1, оба кратности m. Матрица X имеет собственные значения

$$\alpha + \beta, \quad \pm\sqrt{(\alpha + \beta\varepsilon)(\alpha + \beta\varepsilon^{n-1})}, \quad \pm\sqrt{(\alpha + \beta\varepsilon^2)(\alpha + \beta\varepsilon^{n-2})},$$
$$\ldots, \quad \pm\sqrt{(\alpha + \beta\varepsilon^{m-1})(\alpha + \beta\varepsilon^{m+1})}, \quad \beta - \alpha,$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Все эти собственные значения, кроме $\alpha + \beta$ и $\beta - \alpha$, разбиваются на пары противоположных чисел; поэтому $\alpha + \beta = \pm 1$, $\beta - \alpha = \mp 1$. Решая эту систему, получаем $\alpha = \pm 1$, $\beta = 0$, что дает $X = \pm P$.

При $n = 2m+1$ матрица P имеет собственные значения 1 кратности $m+1$ и -1 кратности m; собственные числа матрицы X равны

$$\alpha+\beta, \quad \pm\sqrt{(\alpha+\beta\varepsilon)(\alpha+\beta\varepsilon^{n-1})}, \quad \pm\sqrt{(\alpha+\beta\varepsilon^2)(\alpha+\beta\varepsilon^{n-2})},$$
$$\dots, \quad \pm\sqrt{(\alpha+\beta\varepsilon^m)(\alpha+\beta\varepsilon^{m+1})}.$$

Следовательно, $\alpha+\beta = 1$ и $(\alpha+\beta\varepsilon^k)(\alpha+\beta\varepsilon^{n-k}) = 1$ для всех $k = 1, 2, \dots, m$. Получаем два решения этой системы: $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Первое решение снова приводит к $X = P$; второе же решение дает $X = 1 \oplus P_{n-1}$. Но при таком X матрица $X^{-1}(E_{12}+E_{21})X = E_{1n}+E_{n1}$ не является ганкелевой, хотя, по условию, $X \in \mathrm{Aut}(H_n)$.

Подслучай $\alpha_2 \neq 0$. Если $\alpha_2 \neq 0$, то из (2) следует, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ образуют геометрическую прогрессию: $\alpha_k = \alpha\nu^{k-1}$. Приравнивая элементы ганкелевой матрицы $X^{-1}(E_{12}+E_{21})X$ в двух позициях $(n, 1)$ и $(n-1, 2)$, получаем

$$\alpha^2\nu^{n-2}(1+\nu^n) = 2\alpha^2\nu^{n-2},$$

или $\nu^n = 1$. Но при таком значении ν вторая строка матрицы X пропорциональна ее первой строке, что противоречит невырожденности этой матрицы.

2.2. Z **– косой циркулянт.** Пусть теперь Z – косой циркулянт с той же первой строкой $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Из тех же соображений, что и выше, выводим равенства (2). Снова различаем два случая: $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 \neq 0$.

Подслучай $\alpha_2 = 0$. Из (2) выводим $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Снова полагаем $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ и используем формулы для нахождения собственных значений, полученные в [4].

При $n = 2m$ собственными значениями матрицы X будут числа

$$\pm\sqrt{(\alpha-\beta\frac{1}{\mu})(\alpha-\beta\mu)}, \quad \pm\sqrt{\left(\alpha-\beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^2\right)\left(\alpha-\beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^{n-1}\right)},$$
$$\pm\sqrt{\left(\alpha-\beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^3\right)\left(\alpha-\beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^{n-2}\right)}, \dots, \pm\sqrt{\left(\alpha-\beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^m\right)\left(\alpha-\beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^{m+1}\right)},$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $\mu = e^{\frac{\pi i}{n}}$. Сравнивая эти числа со спектром P, заключаем: $\alpha = \pm1$, $\beta = 0$, что соответствует уже полученному решению $X = \pm P$, либо $\alpha = 0$, $\beta = \pm1$ – в этом случае $X = \pm(1 \oplus (-P_{n-1}))$. Однако такая матрица X не входит в множество $\mathrm{Aut}(H_n)$, поскольку матрица $X^{-1}(E_{12}+E_{21})X = -E_{1n} - E_{n1}$ не является ганкелевой.

При $n = 2m+1$ собственными значениями матрицы X будут числа

$$\pm\sqrt{(\alpha - \beta\frac{1}{\mu})(\alpha - \beta\mu)}, \qquad \pm\sqrt{\left(\alpha - \beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^2\right)\left(\alpha - \beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^{n-1}\right)},$$

$$\pm\sqrt{\left(\alpha - \beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^3\right)\left(\alpha - \beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^{n-2}\right)}, \ldots, \pm\sqrt{\left(\alpha - \beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^m\right)\left(\alpha - \beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^{m+2}\right)},$$

$$\alpha - \beta\frac{1}{\mu}\varepsilon^{m+1}.$$

Этот набор будет совпадать со спектром P только в случаях $(\alpha,\beta) = (1,0)$ и $(\alpha,\beta) = (0,1)$. Оба варианта уже были рассмотрены выше.

Подслучай $\alpha_2 \neq 0$. Как и в аналогичном случае для циркулянта Z, заключаем, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ образуют геометрическую прогрессию: $\alpha_k = \alpha\nu^{k-1}$. Рассуждая, как там, приходим к выводу о вырожденности матрицы X, что невозможно.

2.3. $X = \pm P$**.** Итак, единственными подходящими матрицами X оказались решения $X = P$ и $X = -P$. Вспоминая, что $X = U^{-1}PU$, заключаем, что $U = \pm PUP$ является центросимметричной или кососцентросимметричной матрицей.

Предположим, что $u_{11}u_{12} \neq 0$ и $v_{11}v_{21} \neq 0$. Тогда, как было отмечено в начале доказательства теоремы, элементы первой строки в U и первого столбца в U^{-1} образуют геометрические прогрессии с общим ненулевым знаменателем. Используя свойства симметрии или косой симметрии матриц U и U^{-1} относительно центра, приходим к противоречию:

$$\begin{aligned} 0 = \{UU^{-1}\}_{1n} &= u_{11}v_{1n} + \cdots + u_{1n}v_{nn} \\ &= \pm(u_{11}v_{n1} + \cdots + u_{1n}v_{11}) = \pm n \cdot u_{11}v_{n1} \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, среди четырех чисел $u_{11}, u_{12}, v_{11}, v_{21}$ есть хотя бы одно нулевое.

Предположим, что $u_{11}v_{11} \neq 0$. Тогда из двух первых соотношений в (1) следует, что $u_{12} = v_{21} = 0$. Продвигаясь по дальнейшим равенствам (1), видим, что

$$v_{21} = v_{31} = \cdots = v_{n1} = 0, \quad u_{12} = u_{13} = \cdots = u_{1n} = 0.$$

Отсюда выводим, что $u_{11}v_{11} = 1$ и $U^{-1}E_{11}U = E_{11}$. Рассмотрим теперь матрицу

$$U^{-1}(E_{12} + E_{21})U = \begin{pmatrix} * & v_{11}u_{22} & v_{11}u_{23} & \ldots & v_{11}u_{2n} \\ v_{22}u_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ v_{32}u_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n2}u_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Из ганкелевости этой матрицы и из неравенств $u_{11} \neq 0$, $v_{11} \neq 0$ следует, что

$$v_{32} = v_{42} = \cdots = v_{n2} = 0, \quad u_{23} = u_{24} = \cdots = u_{2n} = 0,$$

т.е. в матрице U^{-1} равны нулю все поддиагональные элементы второго столбца, а в матрице U – все элементы второй строки, стоящие справа от главной диагонали. Рассматривая далее матрицу

$$U^{-1}(E_{13}+E_{22}+E_{31})U = \begin{pmatrix} * & * & v_{11}u_{33} & v_{11}u_{34} & \ldots & v_{11}u_{3n} \\ * & v_{22}u_{22} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ v_{33}u_{11} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ v_{43}u_{11} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n3}u_{11} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

находим

$$v_{43} = v_{53} = \cdots = v_{n3} = 0, \quad u_{34} = u_{35} = \cdots = u_{3n} = 0.$$

Продолжая этот процесс, приходим к выводу, что матрица U нижнетреугольная, а матрица U^{-1} верхнетреугольная. Таким образом, U – диагональная матрица.

Пусть теперь $u_{11}v_{11} = 0$. Из соотношений (1) выводим, что матрица $U^{-1}E_{11}U$ является нижнетреугольной в ганкелевом смысле, т.е. равны нулю все ее элементы в позициях (i, j), для которых $i + j \leqslant n$. Так как эта ганкелева матрица должна иметь ранг 1, то $U^{-1}E_{11}U$ с точностью до скалярного множителя совпадает с матрицей E_{nn}, и единственными ненулевыми элементами первой строки в U и первого столбца в U^{-1}

являются u_{1n} и v_{n1}. Заменяя U на UP, сводим данный случай к рассмотренному выше, откуда следует, что UP – диагональная матрица.

2.4. О диагональных матрицах из множества $\mathrm{Aut}(H_n)$**.** Итак, установлено, что при $n > 2$ группа $\mathrm{Aut}(H_n)$ состоит только из диагональных матриц и произведений этих матриц с перъединичной матрицей P. Найдем вид таких диагональных матриц.

Обозначим через A матрицу, все элементы которой равны 1. Пусть $U = \mathrm{diag}\ (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathrm{Aut}(H_n)$, тогда матрица $U^{-1}AU$ должна быть ганкелевой. Приравнивая ее элементы в позициях (j, j) и $(j+1, j-1)$, получаем $d_{j+1} = d_{j-1}$ для $j = 2, 3, \dots, n-1$. Приравнивая затем элементы (1, 2) и (2, 1), дополнительно выводим $d_1^2 = d_2^2$. Следовательно, возможен лишь один из вариантов $D = d_1 I$ или $D = d_1 \Lambda_n$. Нетрудно убедиться, что все матрицы любого из этих двух видов действительно входят в множество $\mathrm{Aut}(H_n)$. Этим заканчивается доказательство второго утверждения теоремы 2.

§3. Доказательство теоремы 2 при $n = 2$

При $n = 2$ множество H_n совпадает с множеством симметричных матриц порядка 2. Поскольку ортогональное подобие сохраняет симметрию матрицы, то всякая невырожденная матрица, с точностью до скалярного множителя являющаяся ортогональной, принадлежит группе $\mathrm{Aut}(H_2)$.

Обратно, пусть $U \in \mathrm{Aut}(H_2)$. Нетрудно видеть, что, наряду с U, группе $\mathrm{Aut}(H_2)$ принадлежат матрицы U^{-1} и U^T, а потому и матрица $K = (U^T U)^{-1}$. При таком определении $U^{-1}AU = KU^T AU$. Заметим, что когда матрица A пробегает множество ганкелевых (иначе симметричных) матриц второго порядка, матрицы вида $U^T AU$ заполняют это же множество. Отсюда следует, что для всех $A \in H_2$ верно включение $KA \in H_2$. Подставляя сюда $A = E_{11}$ и $A = E_{22}$, заключаем, что K – диагональная матрица, а подставляя $A = P_2$, видим, что к тому же K – скалярная матрица. Таким образом, с точностью до скалярного множителя, U является ортогональной матрицей. Этим доказательство теоремы завершено.

Список литературы

1. Х. Д. Икрамов, *Унитарные автоморфизмы пространства ганкелевых матриц.* — Мат. заметки **96** (2014), 687–696.
2. Х. Д. Икрамов, *Унитарные автоморфизмы пространства ганкелевых матриц. II. Случай четной размерности.* — Мат. заметки **98** (2015), 76–84.
3. T. N. E. Greville, *Toeplitz matrices with Toeplitz inverses revisited.* — Linear Algebra Appl. **55** (1983), 87–92.
4. А. К. Абдикалыков, Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, *О собственных значениях (T+H)-циркулянтов и косых (T+H)-циркулянтов.* — Сиб. ж. вычисл. мат. **17** (2014), 111–124.

Abdikalykov A. K., Ikramov Kh. D. Similarity automorphisms of the space of Hankel matrices.

The paper describes the nonsingular matrices U such that for every Hankel matrix A of the same order, $U^{-1}AU$ also is a Hankel matrix.

Московский государственный университет,
Казахстанский филиал, Астана, Казахстан
E-mail: `adiko2008@gmail.com`

Московский государственный университет,
Ленинские горы, 119991 Москва, Россия
E-mail: `ikramov@cs.msu.su`

Поступило 11 января 2019 г.