Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 481, 2019 г.

А. Р. Минабутдинов

ПРЕДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ДИАДИЧЕСКОГО ОДОМЕТРА

§1. Введение

Пусть дана односторонняя строго стационарная последовательность, реализованная как $(f \circ T^n)_{n\geq 0}$, где $T : X \to X$ – автоморфизм пространства Лебега–Рохлина с эргодической инвариантной мерой μ, на котором задана некоторая суммируемая функция f. Доопределим частичные суммы $S(n) = S_x^f(n) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} f\big(T^j(x)\big)$ в вещественных точках с помощью линейной интерполяции и рассмотрим последовательность непрерывных функций $\varphi_n : [0,1] \to [-1,1]$, задаваемых равенством $\varphi_n(t) = \frac{S(t\cdot n)-t\cdot S(n)}{R_n}$, где нормирующий коэффициент R_n канонически выбирается равным $\max\limits_{t\in[0,1]} |S(t\cdot n) - t\cdot S(n)|$, если данный максимум не обращается в нуль; в противном случае считаем R_n равным единице. Отметим, что функции $\varphi_n = \varphi_{x,n}^f$ принимают нулевые значения на концах интервала $[0,1]$ и являются случайными по x.

Определение 1 ([15]). Если для некоторой последовательности натуральных чисел $(l_n) = (l_n^f(x))$ последовательность функций φ_{x,l_n}^f сходится к (непрерывной) функции φ_x^f в sup-метрике на $[0,1]$, то график функции $\varphi = \varphi_x^f$ называется *предельной кривой*, последовательность l_n называется *стабилизирующей последовательностью*, а последовательность $R_n = R_{x,(l_n),n}^f$ – *нормирующей последовательностью*.

Предельные кривые являются относительно новым взглядом на изучение флуктуаций эргодических сумм и имеют интересную историю появления. Изначальным мотивирующим примером, на который впервые обратил внимание К. Мела в 2004 году и для которого впервые

Ключевые слова: диадический одометр, предельные кривые.
Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17-71-20153.

было доказано существование предельных кривых, является адический автоморфизм Паскаля, введенный в рассмотрение А. М. Вершиком и С. Какутани в конце 70-х, см. статьи [2] и [16]. В пионерской работе [15] для автоморфизма Паскаля были построены примеры предельных кривых для некоторых цилиндрических функций (т.е. функций, зависящих лишь от конечного числа координат в диаграмме Браттели; определение будет напомнено ниже); кроме этого, в работе был поставлен ряд задач для дальнейшего изучения данного феномена. Одной из таких задач является формулировка необходимых и достаточных условий существования предельных функций. Вариант необходимых условий предложен в работе [21] и заключается в условии некогомологичности константе функции f. (Напомним, что функция f называется когомологичной константе C, если она представима в виде $f = g \circ T - g + C$, $g \in L^\infty(X, \mu)$. Частичные суммы таких функций п.в. ограничены, и, как результат, множество предельных кривых пусто.) Вопрос о достаточных условиях существования изучался лишь для некоторых примеров автоморфизмов, таких как полиномиальные адические автоморфизмы, являющиеся обобщением автоморфизма Паскаля, см. определение в диссертации С. Бейли [7]. В работе [21] для полиномиальных автоморфизмов было показано, что в классе цилиндрических функций некогомологичность константе является также достаточным условием существования предельной функции. Однако в общем случае (т.е. для неполиномиальных автоморфизмов и сколько-нибудь широкого класса функций) вопрос остается открытым. Другой задачей, поставленной в [15], являлось изучение предельных кривых для произвольных цилиндрических функций в случае автоморфизма Паскаля. Данная задача была сведена к изучению асимптотик полиномов Кравчука и решена в работе [19]: была доказана гипотеза из работы [15], что для п.в. x предельной функцией с точностью до знака являются известная функция Такаги и ее обобщения.

Также в работе [15] были поставлены вопросы о возможности существования предельных кривых для автоморфизмов конечного ранга. Позже вопрос о существовании предельных кривых для диадического

одометра – простейшего преобразования ранга 1 с дискретным спектром[1] – был сформулирован А. М. Вершиком. В данной работе мы дадим положительный ответ на эти вопросы. Кроме того, построенный ниже пример предельных кривых для диадического одометра, насколько известно автору, является первым примером предельных кривых для автоморфизма с единственной инвариантной эргодической мерой.

Также хочется отметить, что все построенные примеры предельных кривых обычно оказываются связанными с некоторыми комбинаторными результатами, как, например, теорема Крускала–Катоны в случае автоморфизма Паскаля (см. статью [4]), или теоретико-числовыми результатами (формула Троллопа–Деланжа и ее обобщения в данной работе).

Автор выражает искреннюю благодарность А. М. Вершику, А. А. Лодкину и И. Е. Манаеву.

§2. Основные определения и обозначения

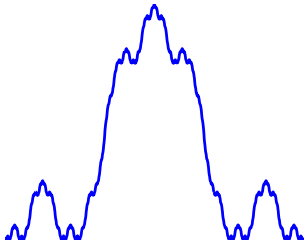
2.1. Функции Такаги–Ландсберга. Пусть a – вещественный параметр, $|a| < 1$. Функция Такаги–Ландсберга $\mathcal{T}_a : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ задается равенством

$$\mathcal{T}_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \tau(2^n x), \tag{1}$$

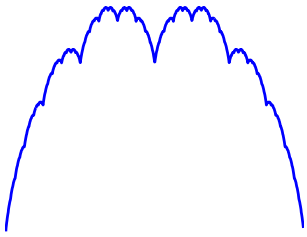
где $\tau(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z})$ – расстояние от точки $x \in \mathbb{R}$ до ближайшего целого числа, вычисляемое как $\min_{z\in\mathbb{Z}} |x - z|$. Несложно видеть, что ряд (1) сходится равномерно и, следовательно, определяет непрерывную функцию $\mathcal{T}_a$ при значениях $|a| < 1$. Семейство функций $\{\mathcal{T}_a\}_a$ может рассматриваться как прямое обобщение известной функции Такаги $\mathcal{T}$, введенной Т. Такаги [24], которая получается, если a положить равным $1/2$. При $|a| \geq \frac{1}{2}$ функции $\mathcal{T}_a$ являются 1-периодическими и нигде не дифференцируемыми, однако при $|a| < \frac{1}{2}$ они дифференцируемы почти всюду[2], см. статьи [9, 17] и [18].

[1] Согласно авторам статьи [22], мотивацией к их работе, в которой изучались достаточные условия слабого перемешивания, являлись результаты о предельных кривых.

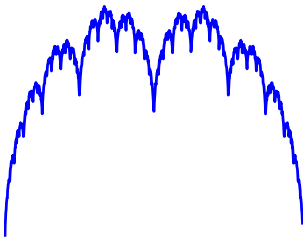
[2] В частности, $\mathcal{T}_{1/4}(x) = x(1 - x)$.



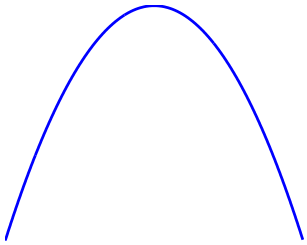
(a) $a = -1/2$ (кривая Такаги с чередующимися знаками)



(b) $a = 1/2$ (кривая Такаги–Бланманже)



(c) $a = 2/3$



(d) $a = 1/4$ (парабола)

Рис. 1. Кривые Такаги–Ландсберга, соответствующие различным значениям параметра a.

Как следует из работы [10] (см. также более поздние работы [12] и [13]), функция $\mathcal{T}_a$ удовлетворяет следующим функциональным уравнениям де Рама на интервале $[0, 1]$ и однозначно определяется ими:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_a(x/2) = a\mathcal{T}_a(x) + x/2, \\ \mathcal{T}_a(\frac{x+1}{2}) = a\mathcal{T}_a(x) + \frac{1-x}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

2.2. Диадический одометр. Рассмотрим $X = \mathbf{Z}_2 = \prod_0^\infty \{0, 1\}$ – компактную аддитивную группу 2-адических чисел, снабженную мерой Хаара μ, и диадический одометр T, определяемый как групповой сдвиг

равенством $Tx = x+1$. Преобразование T является простейшим *адическим* автоморфизмом.

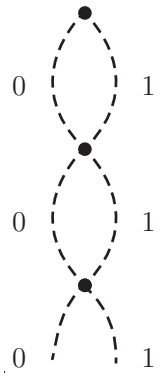


Рис. 2. Диаграмма Браттели одометра.

Понятие адического преобразования было введено в эргодическую теорию А. М. Вершиком в конце 70-х и является одним из наиболее удобных способов представления автоморфизма. Мы лишь позволим себе кратко напомнить определение и используемую нами конструкцию башен автоморфизма на примере диадического одометра. Адическое преобразование задано на (под)множестве путей (последовательностей ребер) Ω бесконечного градуированного графа – диаграммы Браттели. На пространстве Ω задан лексикографический порядок, а преобразование определяется на немаксимальных путях переходом к следующему пути относительно этого порядка. В случае одометра диаграммой Браттели является известный "жемчужный" граф, ребра которого индексированы нулями и единицами, как показано на рис. 2. Пространство путей Ω жемчужного графа отождествляется с $\mathbf{Z}_2$ естественным образом; мы будем стараться писать ω, если естественно думать о точке как о пути, и x, если мы думаем о ней как об элементе группы. Порядок на множестве путей определяется естественным лексикографическим порядком на $\mathbf{Z}_2$, а максимальным путем, разумеется, является путь $\omega_{\max}$, все координаты которого – единицы.

Обозначим через π_n упорядоченное (в том же индуцированном с группы $\mathbf{Z}_2$ лексикографическом порядке) множество *конечных* путей

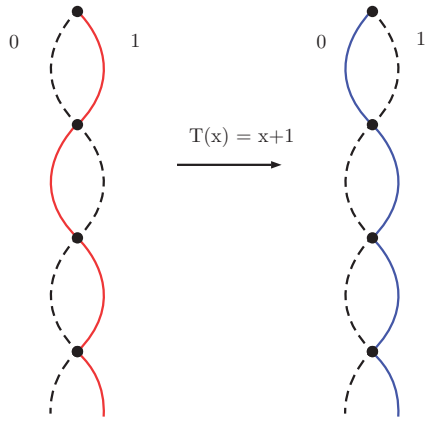


Рис. 3. Пример действия одометра. Путь $x = (1, 0, 1, 1, \dots)$ и его образ $T(x) = (0, 1, 1, 1, \dots)$ изображены непрерывной линией.

вида $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$, ведущих из нулевой вершины в вершину уровня n. Количество $|\pi_n|$ таких путей (называемое размерностью вершины n), очевидно, равно 2^n, а само множество π_n представляет собой первые 2^n целых неотрицательных чисел в диадическом представлении. Функцию, ставящую в соответствие конечному пути его номер в лексикографическом порядке, обозначим через Num. Через $[c_0 c_2 \dots c_{n-1}]$ будем обозначать цилиндрическое множество

$$\{\omega \in \Omega \,|\, \omega_0 = c_0, \omega_1 = c_1, \dots, \omega_{n-1} = c_{n-1}\},$$

определяемое конечным путем $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$. Упорядоченное множество цилиндров определяемое путями из множества π_n, называется башней автоморфизма (башней Рохлина), цилиндры, составляющие башню, – этажами башни. Функция Num фактически задает номер этажа башни. По традиции, мы будем обозначать башни через τ_n. Пример множеств из этого параграфа приведен в табл. 1.

Башни τ_n позволяют определить конечную аппроксимацию автоморфизма; данные аппроксимации в более общей постановке рассматривались в работах [1] и [2]. Так как для каждого n цилиндры, образующие этажи башни, задают разбиение пространства, всякий путь ω лежит на одном из 2^n этажей башни. Следующая лемма показывает,

Num	π_3	τ_3
0	(000)	[000]
1	(001)	[001]
2	(010)	[010]
3	(011)	[011]
4	(100)	[100]
5	(101)	[101]
6	(110)	[110]
7	(111)	[111]

Таблица 1. Множества π_3 и τ_3.

что можно выбрать такую подпоследовательность натуральных чисел n_j, что почти всякий путь ω окажется на "начальных" этажах башен. Доказательство леммы следует идеям из работы Э. Янврес и Т. де ла Рю [14].

Лемма 1. *Пусть $\varepsilon > 0$. Для μ-п.в. пути (ω_j) найдется такая последовательность натуральных чисел (n_j), что номер $\mathrm{Num}(\omega^j)$ конечного пути $\omega^j = (\omega_1, \omega_2 \dots, \omega_{n_j})$ удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{Num}(\omega^j)/|\pi_{n_j}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим случайный процесс (Z_m), определяемый по пути (ω_j) как $Z_m = 2\sum_{i=1}^{m}(\omega_i - \frac{1}{2})$. Процесс Z_m есть одномерное симметричное случайное блуждание, а значит, является рекуррентным. Поэтому для μ-п.в. пути (ω) и произвольного $r \in \mathbb{N}$ можно выбрать такую последовательность моментов времени m_j, что $Z_{m_j+1} = Z_{m_j+2} = \dots = Z_{m_j+r} = -1$. Это означает, что ω лежит на одном из 2^{m_j} первых этажей башни τ_{m_j+r}, что можно записать как

$$\mathrm{Num}(\omega_1, \omega_2 \dots, \omega_{m_j+r}) < 2^{m^j}.$$

Принимая во внимание, что $|\tau_n| = 2^n$, предыдущее неравенство можно переписать следующим образом:

$$\frac{\mathrm{Num}(\omega_1, \omega_2 \dots, \omega_{m_j+r})}{|\tau_{m_j+r}|} < 2^{-r}.$$

Выбирая r так, чтобы $2^{-r} < \varepsilon$, и полагая $n_j = m_j + r$, мы получаем последовательность (n_j) с искомым свойством. □

В изначальной работе [15] о предельных кривых для автоморфизма Паскаля и последующих работах [5] и [21] в качестве функций f всегда рассматривались цилиндрические функции, т.е. функции, зависящие лишь от конечного числа координат пути $(\omega_i) \in \Omega$. В случае диадического одометра (см. теоремы 1–3 в работе [21]) цилиндрические функции когомологичны константе, их частичные суммы ограничены, а значит, не приводят к предельным кривым.

Пусть вещественный параметр q удовлетворяет условию $0 < |q| < 1$. Определим q-взвешенную сумму $\mathbf{s}_q$ координат пути (ω_i) равенством $\mathbf{s}_q((\omega_i)) = \sum\limits_{i\geq 0} \omega_i q^{i+1}$; это пример нецилиндрической функции. Обозначим через $\mathbf{0}$ путь $(0, 0, \dots)$, а через $\mathcal{S}_q(n)$ – частичные суммы, определенные как $\mathcal{S}_q(n) = S_{\mathbf{0}}^{s_q}(n) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} s_q(T^j\mathbf{0})$, а также определим на $[0,1]$ функцию φ_l^q равенством $\varphi_l^q = \varphi_{\mathbf{0},l}^{\mathbf{s}_q} = \frac{\mathcal{S}_q(t\cdot l) - t\cdot\mathcal{S}_q(l)}{R}$.

§3. Результат

Главным результатом статьи является теорема 1. Ее доказательство основывается на следующем предложении, в котором вычисляется явное выражение для функций φ_l^q в диадических точках.

Предложение 1. *Пусть $|q| > 1/2$ и $a = 1/(2q)$. Выберем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и положим $l = 2^n$ и $R = (2q)^{n-1}$. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\varphi_l^q(t_j) = -\mathcal{T}_a(t_j), \tag{3}$$

где $t_j = \frac{j}{2^{n-1}}$, а $j = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1}$.

Доказательство. Обозначим через σ отображение правого сдвига $x \mapsto x/2$, заданное на $\mathbf{Z}_2$ равенством $\sigma((x_i)) = (0, x_0, x_1, \dots)$. Выполняются соотношения

$$\mathbf{s}_q(\sigma(x)) = q\,\mathbf{s}_q(x), \tag{4}$$

$$\mathbf{s}_q(T\circ\sigma(x)) = q\,\mathbf{s}_q(x) + q, \tag{5}$$

и, как следствие,

$$\mathcal{S}_q(2n) = 2q\,\mathcal{S}_q(n) + nq. \tag{6}$$

По индукции из (6) легко получить выражение

$$\mathcal{S}_q(2^n) = 2^{n-1}\frac{q-q^n}{1-q}, \tag{7}$$

справедливое при любом $n \in \mathbb{N}$.

Нам необходимо доказать, что в каждой двоично-рациональной точке t ранга $n-1$ в $[0,1]$, т.е. точке вида $t = \frac{2k}{2^n}, k \in \{0,1,2,\dots,2^{n-1}\}$, для функции $\varphi_l^q(t)$ тождественно выполняются соотношения

$$\begin{cases} -\varphi(t/2) = -a\varphi(t) + t/2, \\ -\varphi(\frac{t+1}{2}) = -a\varphi(t) + \frac{1-t}{2}. \end{cases} \tag{8}$$

Проверим, к примеру, первое из них (второе проверяется аналогично), для чего запишем правую часть равенства как

$$-a\varphi_l^q(t) + t/2 = -\frac{1}{2qR}\Big(\mathcal{S}_q(2k) - \frac{2k}{2^n}\mathcal{S}_q(2^n\Big) + \frac{k}{2^n}.$$

Пользуясь равенством (6), последнее выражение можно записать как

$$-\frac{1}{2qR}\Big(2q\mathcal{S}_q(k) + kq - \frac{2k}{2^n}\mathcal{S}_q(2^n)\Big) + \frac{k}{2^n},$$

что, используя (7), может быть записано следующим образом:

$$-\frac{1}{R}\Big(\mathcal{S}_q(k) + \frac{k}{2}\Big(1 - \frac{R}{2^{n-1}} - \frac{1-q^{n-1}}{1-q}\Big)\Big)$$
$$= -\frac{1}{R}\Big(\mathcal{S}_q(k) - \frac{k}{2^n}\mathcal{S}_q(2^n)\Big) = -\varphi_l^q(t/2). \quad \square$$

Определим последовательность l_n как 2^n. Так как в силу предложения 1 (непрерывная) функция $\varphi_{l_n}^q$ совпадает во всех диадических точках ранга $n-1$ интервала $[0,1]$ с непрерывной функцией $-\mathcal{T}_a$, то же верно и для равномерного предела $\lim\limits_n \varphi_{l_n}^q$. Следовательно, функция $-\mathcal{T}_a$ является предельной функцией в точке $\mathbf{0} = (0,0,\dots)$. При этом элементы нормирующей последовательности R_n пропорциональны $(2|q|)^n$. Теорема 1 ниже утверждает, что та же предельная кривая существует в почти всякой точке ω. Доказательство состоит в том, что функции $\varphi_{\omega,l_j}^{\mathbf{s}_q}$ можно аппроксимировать функциями $\varphi_{l_j}^q$ при некотором выборе последовательности $l_j = l_j(\omega)$, который по лемме 1 можно осуществить для п.в. ω.

Теорема 1. *Пусть $(\mathbf{Z}_2, T)$ – диадический одометр, μ – инвариантная мера (мера Хаара) и задана функция $\boldsymbol{s}_q((\omega_i)) = \sum_{i\geq 0}\omega_i q^{i+1}$, где $\frac{1}{2} < |q| < 1$. Для μ-п.в. пути ω существует стабилизирующая последовательность $l_n = l_n(\omega)$, такая, что $\varphi^{\mathbf{s}_q}_{\omega,l_n}$ сходится в* sup*-метрике на $[0,1]$ к функции $-\mathcal{T}_a$, где $a = 1/(2q)$.*

Доказательство. Действительно, из леммы 1 следует, что можно выбрать такую последовательность кооординат $r_j = r_j(\omega)$ (мы будем иногда опускать индекс $j \in \mathbb{N}$ в записи), что п.в. путь ω представится в виде $\omega = (\underbrace{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m}_{m}, \underbrace{0, 0 \dots, 0}_{r}, *, *, \dots, *, \dots)$, где $m = m(r)$ а символ $*$ означает, что на данной позиции может быть что угодно: как 0, так и 1. Положим $l = 2^{m+r}$ и $y = (\underbrace{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m}_{m}, \underbrace{0, 0 \dots, 0}_{r}, 0, 0 \dots)$. Тогда

$$\frac{|S_{y,q}(i) - \mathcal{S}_q(i)|}{R_{m+r}} \leq \frac{2^{m+1}\sum\limits_{i=1}^{2^m}|q|^i}{(2|q|)^{m+r}} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \quad i = 0, \dots, 2^{m+r} - 2^m - 1,$$

и, следовательно, $\| \varphi^{\mathbf{s}_q}_{y,l_j} - \varphi^q_{l_j} \|_\infty \xrightarrow[j\to\infty]{} 0,\ l_j = 2^{m(r_j)+r_j}$.

Заметим, что координаты пути ω с номерами $\geq m + r$ (они обозначены $(*, *, \dots, *, \dots)$ в формуле выше) неизменны под действием T^i, $i = 0, \dots, 2^{m+r} - 2^m - 1$. Более формально: при $i = 0, \dots, 2^{m+r} - 2^m - 1$ имеем $\mathbf{s}_q(T^i\omega) = \mathbf{s}_q(T^i y) + b$, где $b = b(r)$ – не зависящая от i постоянная. В силу ренормализации (а именно, вычитания линейной части $t \cdot S^g_\omega(l_n)$) справедливо равенство $\varphi^{g+C}_{\omega,n} = \varphi^g_{\omega,n}$ для любой постоянной C, поэтому функция $\varphi^{\mathbf{s}_q}_{\omega,l_j}$ инвариантна[3] относительно выбора b. Таким образом, $\varphi^{\mathbf{s}_q}_{\omega,l_j} \equiv \varphi^{\mathbf{s}_q}_{y,l_j}$, и наш выбор стабилизирующей последовательности $l_j(\omega)$ влечет соотношение $\|\varphi^{\mathbf{s}_q}_{\omega,l_j} - \varphi^q_{l_j}\|_\infty \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, что завершает доказательство. □

Замечание 1. Условия $\frac{1}{2} < |q| < 1$ и $|q| > 1/2$ теоремы 1 и предложения 1 являются существенными, при $|q| \leq 1/2$ предельной кривой не существует, а при $|q| \geq 1$ функция $\mathbf{s}_q$ не определена на $\mathbf{Z}_2$.

[3]Например, мы можем считать, что $b = b_j = 0$ при заданном l_j.

Замечание 2. Доказательство предложения 1 может быть также получено как следствие обобщенной формулы Троллопа–Деланжа, см. препринт [8].

Список литературы

1. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* — ДАН СССР **259**, вып. 3 (1981), 526–529.
2. А. М. Вершик, *Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **115** (1982), 72–82.
3. А. М. Вершик, Б. Соломяк, *Адическая реализация преобразования Морса и продолжение его действия на соленоид.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **360** (2008), 70–90.
4. А. Р. Минабутдинов, И. Е. Манаев, *Функция Крускала–Катоны, последовательность Конвея, кривая Такаги и автоморфизм Паскаля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **411** (2013), 135–147.
5. А. А. Лодкин, А. Р. Минабутдинов, *Предельные кривые для автоморфизма Паскаля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **437** (2015), 145–183.
6. А. Р. Минабутдинов, *Теорема существования предельных кривых для полиномиальных адических автоморфизмов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **448** (2016), 177–200.
7. S. Bailey, *Dynamical properties of some non-stationary, non-simple Bratteli–Vershik systems.* Ph.D. thesis, University of North Carolina, Chapel Hill, 2006.
8. A. Minabutdinov, *Limiting curves for the dyadic odometer and the generalized Trollope–Delange formula*, `arXiv:1801.03120` (2018).
9. P. Allaart, K. Kawamura, *The Takagi function: a survey.* — Real Anal. Exchange **37**, No. 1 (2012), 1–54.
10. M. Barnsley, *Fractal functions and interpolation.* — Constr. Approx. **2** (1986), 303–329.
11. H. Delange, *Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres" .* — Enseign. Math. **21**, No. 2 (1975), 31–47.
12. R. Girgensohn, *Nowhere differentiable solutions of a system of functional equations.* — Aequationes Math. **47**, No. 1 (1994), 89–99.
13. R. Girgensohn, *Digital sums and functional equations.* — Integers **12**, No. 1 (2012), 141–160.
14. É. Janvresse, T. de la Rue, *The Pascal adic transformation is loosely Bernoulli.* — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **40**, No. 2 (2004), 133–139.
15. É. Janvresse, T. de la Rue, Y. Velenik, *Self-similar corrections to the ergodic theorem for the Pascal-adic transformation.* — Stoch. Dyn. **5**, No. 1 (2005), 1–25.
16. S. Kakutani, *A problem of equidistribution on the unit interval* [0, 1]. — Lect. Notes Math. **541** (1976), 369–375.

17. J. C. Lagarias, *The takagi function and its properties*. In: Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects, 2012, pp. 153–189.
18. G. Landsberg, *On the differentiability of continuous functions (Uber die Differentiierbarkeit stetiger Funktionen)*. — Jahresber. Deutschen Math. Verein. **17** (1908), 46–51.
19. A. Lodkin, A. Minabutdinov, *Limiting curves for the Pascal adic transformation*. — J. Math. Sci. **216**, No. 1 (2016), 94–119.
20. X. Méla, K. Petersen, *Dynamical properties of the Pascal adic transformation*. — Ergodic Theory Dynam. Systems **25**, No. 1 (2005), 227–256.
21. A. Minabutdinov, *Limiting curves for polynomial adic systems*. — Zap. Nauchn. Semin. POMI **448** (2016), 177–200.
22. A. Nogueira, E. H. El Abdalaoui, M. El Machkouri, *A criterion of weak mixing property*. — In: École de Théorie Ergodique, Sémin. Congr. **20**, Soc. Math. France, Paris, 2010, pp. 105–111.
23. G. de Rham, *Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles*. — Rend. Sem. Mat. **16** (1956), 101–113.
24. T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative*. — Proc. Phys.-Math. Soc. **1** (1903), 176–177.
25. E. Trollope, *An explicit expression for binary digital sums*. — Math. Mag. **41** (1968), 21–25.
26. A. M. Vershik, *Remarks on Pascal automorphism and infinite ergodic theory*. — Armenian J. Math. **7**, No. 2 (2015), 85–96.

Minabutdinov A. R. Limiting curves for the dyadic odometer.

A limiting curve of a stationary process in discrete time was defined by É. Janvresse, T. de la Rue, and Y. Velenik as the uniform limit of the functions

$$t \mapsto \big(S(tl_n) - tS(l_n)\big)/R_n \in C([0,1]),$$

where S stands for the piecewise linear extension of the partial sum, $R_n := \sup|S(tl_n) - tS(l_n))|$, and $(l_n) = (l_n(\omega))$ is a suitable sequence of integers. We determine the limiting curves for the stationary sequence $(f \circ T^n(\omega))$ where T is the dyadic odometer on $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ and

$$f((\omega_i)) = \sum_{i \geq 0} \omega_i q^{i+1}$$

for $1/2 < |q| < 1$. Namely, we prove that for a.e. ω there exists a sequence $(l_n(\omega))$ such that the limiting curve exists and is equal to (-1) times the Tagaki–Landsberg function with parameter $1/2q$.

Поступило 19 сентября 2019 г.

Национальный
исследовательский университет
“Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ),
Департамент прикладной математики
и бизнес-информатики,
Кантемировская ул. 3А, 194100 С.-Петербург, Россия
E-mail: aminabutdinov@hse.ru