

А. А. Лодкин

ПАРУС КЛЕЙНА И ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЕКТОРА

§1. ВВЕДЕНИЕ

Классический объект – цепная дробь – настолько многогранен, что в многочисленных работах, посвященных его многомерным обобщениям, приводятся аналогии каких-то отдельных его атрибутов: подходящих дробей (диофантовых приближений), элементов цепной дроби (= неполных частных), алгоритма Евклида, с помощью которого последовательно находятся неполные частные, теоремы Лагранжа о периодичности неполных частных, теоремы Гаусса–Хинчина об их статистике, паруса (многоугольника) Клейна. При этом другие атрибуты либо теряют смысл, либо уходят на второй план.

Многогранник Клейна в работах В. И. Арнольда, Е. И. Коркиной, Ж. Лапо, О. Н. Карпенкова и некоторых других авторов [2–7] появлялся таким образом: рассматривался линейный оператор из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, характеристический многочлен которого раскладывается в произведение линейных вещественных форм. Гиперплоскости нулей этих форм образуют разбиение пространства на симплицальные конусы (“ортанты”). В предположении, что на границе ортанта нет целых точек, кроме начала координат, рассматривается выпуклая оболочка содержащихся в нем целых точек – многогранник Клейна – и его граница – парус Клейна. В двумерном случае ($n = 1$) парус – это бесконечная ломаная, в трехмерном – кусочно-линейная поверхность, составленная из граней-многогранников. Эти грани и их целочисленные площади служат аналогом элементов (неполных частных) обыкновенной цепной дроби. В терминах характеристик этих граней формулируются обобщения теоремы Лагранжа о периодических цепных дробях, причем периодичность заменяется на инвариантность комбинаторной структуры паруса относительно некоторого оператора, сохраняющего ортант.

Ключевые слова: парус Клейна, многогранник Клейна, диофантовы приближения, золотое сечение, пластическое число, ячейка Вороного, асимптотическая асферичность.

Поддержано грантом РФФИ No. 17-01-00433.

В этих же терминах формулируются и обобщения теоремы Гаусса–Хинчина. В работе О. Н. Германа [8] классические паруса, являющиеся многомерными аналогами плохо приближаемых иррациональных чисел, характеризуются в геометрических терминах (ограниченность определителей, или целочисленных объемов, n -мерных граней).

Другие обобщения цепных дробей связаны с диофантовыми приближениями вектора в $\mathbb{R}^{n+1}$ (классический случай: $n = 1$). Имеется ряд алгоритмов (алгоритмы Пуанкаре, Бруна, Якоби–Перрона, Брюно, Парусникова [9, 10] и др.), обобщающих алгоритм Евклида, имеющих целью построение рациональных векторов-аппроксимантов. В этих алгоритмах рассматривается последовательность наборов (базисов), состоящих из рациональных векторов, и процедура перехода от одного такого базиса к следующему. При этом порожденные такими базисами конусы образуют вложенную последовательность и стягиваются к лучу, определяемому исходным вектором. В этой схеме парус Клейна при $n > 1$ не используется.

В настоящей заметке предлагается несколько иное определение паруса Клейна, связанное не с оператором, а с *произвольным иррациональным лучом*. При этом решетка $\mathbb{Z}^{n+1}$ заменяется семейством решеток, зависящих от вещественного положительного параметра h . Для рассмотрения некоторых асимптотических вопросов, связанных с диофантовыми приближениями (например, со скоростью аппроксимации), оказывается полезным изучение деформации ячейки Вороного решетки при $h \rightarrow 0$. В некоторых вопросах удобно использовать связанную форму многогранника Клейна (“парус в стакане”). Мы высказываем гипотезу о трехмерном векторе, который медленнее всего (в указанном точном смысле) приближается рациональными. Мы также обсуждаем стратегии поиска таких векторов в произвольной размерности.

§2. РАЗМЕРНОСТЬ 1

В одномерном варианте (то есть в задаче о приближении вещественного положительного числа x рациональными) вопрос может быть сформулирован в терминах приближения луча $R_x \in \mathbb{R}^2$ с направляющим вектором $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, где $\alpha = \operatorname{arctg} x$, целочисленными векторами $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2$. Этот луч делит квадрант $\mathbb{R}_+^2$ на два сектора. *Классический многоугольник Клейна* составляет выпуклая оболочка пересечения решетки $\mathbb{Z}^2$ с этими секторами. Ее граница называется *парусом*. Удобно, после подходящей линейной замены координат в $\mathbb{R}^2$, говорить

о приближении луча $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ точками решетки $L(x, h) \subset \mathbb{R}^2$ с базисом $\{e_1, e_2\}$, где $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (x, h)$ ($h > 0$). Результатом является *модифицированный многоугольник Клейна*, состоящий из выпуклых оболочек $S_{\pm}$ множеств $L(x, h) \cap (\pm \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$. Если $x \notin \mathbb{Q}$, то границы многоугольников $S_{\pm}$ представляют собой две бесконечные выпуклые ломаные, составляющие *модифицированный парус Клейна*.

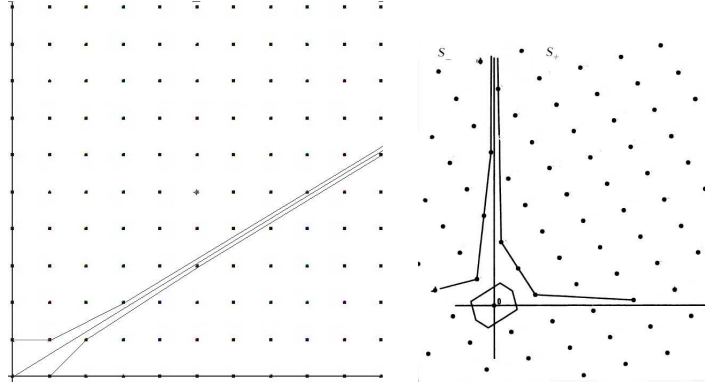


Рис. 1. Классический парус, модифицированный парус и ячейка Вороного решетки.

Диофантовы свойства числа x формулируются в терминах асимптотических свойств подходящих дробей, следовательно, не меняются при изменении конечного числа элементов цепной дроби (такое изменение равносильно переходу от x к числу, эквивалентному x относительно действия группы $SL(2, \mathbb{Z})$ дробно-линейными преобразованиями прямой).

Примерами диофантовых свойств являются: периодичность элементов начиная с некоторого места, ограниченность последовательности элементов, скорость аппроксимации вещественного числа рациональными и т. п.

При геометрической интерпретации диофантовы свойства транслируются в асимптотические свойства приближающихся слева и справа к вертикальной оси звеньев паруса при подъеме вдоль второй (“вертикальной”) координатной оси. Этот подъем можно заменить сжатием решетки вдоль второй координатной оси ($h \rightarrow 0$) и наблюдением за вершинами паруса, ближе всего подходящими к началу координат.

Напомним, что целочисленной длиной отрезка, соединяющего точки решетки, называется число интервалов, на которые отрезок делится точками решетки [3]. В случае бесконечной ломаной, представляющей собой одномерный парус, связанный с числом x , целочисленные длины его звеньев совпадают с неполными частными цепной дроби в разложении числа x (четность номера неполного частного связана с тем, с какой стороны звено располагается относительно вертикальной прямой) [2]. Золотому сечению $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ отвечает парус, состоящий из отрезков равной и минимальной длины (их целочисленные длины равны единице, согласно разложению φ в цепную дробь: $\varphi = [1; 1, 1, \dots]$).

Интересной характеристикой числа x и связанной с ним решетки является эволюция ячейки Вороного $V = V(x, h)$, то есть многоугольника, который состоит из точек плоскости, удаленных от начала координат не более, чем от остальных точек решетки $L(x, h)$ (рис. 1). Нетрудно заметить, что в случае, когда x – золотое сечение, которое, как известно, медленнее всего аппроксимируется рациональными числами, эти ячейки в процессе эволюции остаются меняющими свою форму шестиугольниками (иногда параллелограммами) с рекордно малой асферичностью (наглядное представление об этом дают три семейства хорошо различимых параллельных прямых, на которых лежат все точки решетки, углы между которыми лежат между $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$). Это свойство перекликается с экстремальным свойством золотого сечения во многих других явлениях, например в задаче о равномерном распределении арифметической прогрессии на окружности (теорема о трех интервалах, см. [12]).

Определение 1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ – выпуклая компактная окрестность нуля, Γ – её граница. Назовем асферичностью множества V число

$$A(V) = \frac{\max\{\|t\| \mid t \in \Gamma\}}{\min\{\|t\| \mid t \in \Gamma\}},$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Определение 2. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Символом $L(v, h)$ обозначим решетку в $\mathbb{R}^2$ с базисом $\{(1, 0), (x, h)\}$.

Забегая вперед, дадим многомерное обобщение этого понятия.

Определение 2'. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$. Символом $L(v, h)$ обозначим решетку в $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, базисом которой служат векторы $\{e_i\}_{i=1}^n$, образующие ортонормальный базис в $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, и вектор $e_{n+1} = (v, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Простая, но важная характеристика числа x (или вектора v) – функция, описывающая эволюцию формы ячейки Вороного при изменении параметра. Этот объект интересен в случае, когда число x иррационально (соответственно, вектор $v = (v_1, \dots, v_n)$ иррационален в следующем смысле: числа $1, v_1, \dots, v_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$).

Определение 3. Функцию $C_v(h) = A(V(v, h))$, где $V(v, h)$ – ячейка Вороного соответствующей решетки, назовем кардиограммой вектора v , а величину

$$AA(v) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} C_v(h)$$

– асимптотической асферичностью ячеек Вороного $V(v, h)$, или асимптотической анизотропией семейства решеток $L(v, h)$, $v \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$. При $n = 1$, $v = x$ будем писать $AA(x)$.¹

Теорема 1. При $n = 1$ кардиограмма однозначно определяет число $x \bmod 1$.

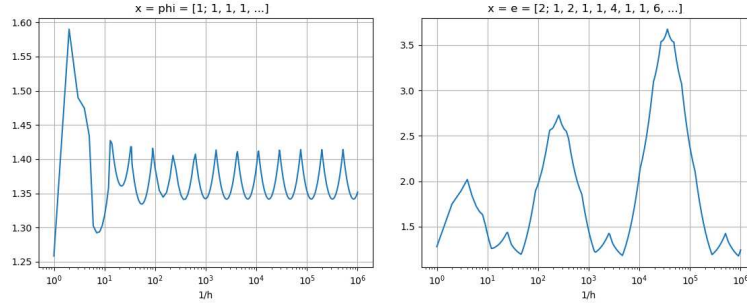
Этот факт следует из того, что комбинаторный тип паруса, то есть последовательность целочисленных длин его звеньев, определяет цепную дробь. С другой стороны, интервал гладкости кардиограммы состоит из тех значений параметра h , при которых некоторое звено паруса оказывается самым близким к началу координат. Поэтому разным кардиограммам отвечают разные (по модулю 1) вещественные числа.

Теорема 2 (экстремальное свойство золотого сечения). Пусть φ – золотое сечение. Тогда $AA(\varphi) \leq AA(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство экстремального свойства числа φ для похожей (немного отличной от $AA(x)$) характеристики имеется в [11]. Вполне вероятно, что известны и другие переформулировки утверждения об экстремальности.²

¹Функция $AA(v)$ впервые была определена в краткой версии [17] настоящей статьи.

²Недавно появилась статья [18], в которой экстремальность числа φ связывается со свойствами функции “growth capacity”, сходной с нашей кардиограммой.

Рис. 2. Кардиограммы чисел φ и e .

§3. ВЫСШИЕ РАЗМЕРНОСТИ

Задача об аппроксимации n -мерного вектора $v \in \mathbb{R}^n$ рациональными, или, эквивалентно, луча $R_v = \mathbb{R}_+ v$, $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, точками из $\mathbb{Z}_+^{n+1}$, имеет несколько конкурирующих формулировок, связанных с различными метриками и выбором алгоритма перехода от одного аппроксимирующего вектора (базиса) к другому вектору (базису). Уместно предположить, что со скоростью аппроксимации по-прежнему связана асимптотическая анизотропия решетки $L(v, h)$. При $n = 2$ представляется правдоподобным следующее предположение.

Гипотеза 1. Пусть ψ – вещественный корень многочлена $x^3 - x - 1$, $v_\psi = (\psi, \psi^2)$. Тогда $AA(v_\psi) \leq AA(v)$ для любого иррационального вектора $v \in \mathbb{R}^2$.

В пользу этой гипотезы выступает то обстоятельство (аналогия), что в то время как φ является наименьшим числом Пизо–Виджаярагхавана³ второй степени, число ψ (“пластическое число”) есть наименьшее число Пизо третьей степени (и вообще наименьшее среди всех чисел Пизо). Хотя цепная дробь, в которую раскладывается это число, уже не является периодической ни в классическом смысле, ни в смысле Арнольда и др., не исключено, что с ψ связан парус Клейна (в нашем смысле), имеющий простую комбинаторную структуру. Другим аргументом служит доказанная С. М. Блюдзе теорема, в которой

³Напомним, что числом Пизо–Виджаярагхавана называется целое вещественное алгебраическое число, большее единицы, все сопряженные которого по модулю меньше единицы.

установлено экстремальное свойство вектора $(1, \psi^2, \psi)$ для “генерируемого периодического алгоритма Якоби–Перрона” в $\mathbb{R}_+^3$ с минимальным периодом 1.

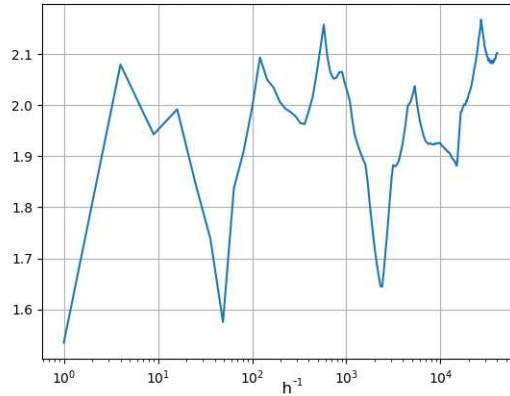


Рис. 3. Кардиограмма вектора v_ψ .

Теорема 3 ([11]). Пусть e^0 – ортонормальный базис в $\mathbb{R}_+^3$, а базисы $e^k = \{e_1^k, e_2^k, e_3^k\}$ преобразуется друг в друга по правилу $e_i^{k+1} = M e_i^k$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, где матрица-генератор M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

1. Алгоритм Якоби–Перрона, отвечающий матрице M , сильно сходится, только если наибольшее по абсолютной величине собственное число λ этой матрицы является числом Пизо–Виджаярагхавана.

2. Самая медленная сходимость достигается при наименьшем таком λ .

3. Это число λ является корнем характеристического многочлена матрицы M при $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, то есть совпадает с ψ . Соответствующий собственный вектор, лежащий внутри всех конусов, порожденных базисами e^k , есть вектор $(1, \psi^2, \psi)$.

§4. АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРУСА

Дадим еще одно определение паруса, связанного с вектором $v \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что решетка $L(v, h)$ инвариантна относительно сдвигов на элементы группы $\mathbb{Z}^n \times \{0\}$ и отображения симметрии $\sigma : x \mapsto -x$. Фундаментальной областью факторгруппы $L(v, h)/G$, где G – группа симметрий $\langle \mathbb{Z}^n \times \{0\}, \sigma \rangle$, является пересечение решетки $L(v, h)$ с полуцилиндром $[0, 1)^n \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим её выпуклую оболочку, представляющую собой неограниченный многогранник, через $M = M(v, h)$.

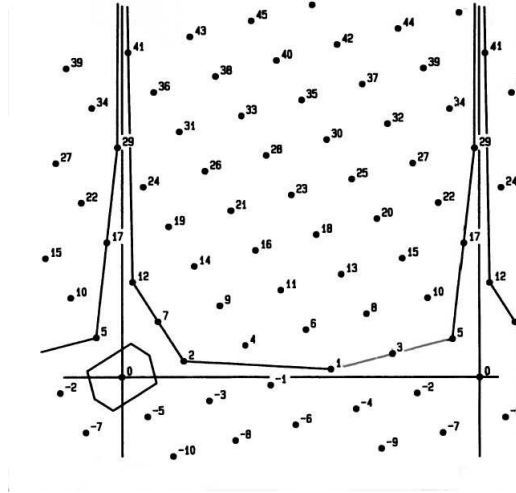


Рис. 4. Парус в стакане и его окрестность при $n = 1$.

Если координаты вектора v иррациональны, то граница $S = S(v, h)$ множества $M \setminus \{0\}$ (парус) не пересекается с границей полуцилиндра и представляет собой выпуклую неограниченную многогранную n -мерную поверхность (*“парус в стакане”*). По сравнению с многогранником Клейна и парусом, определенными выше, многогранник и парус в стакане обладают двумя преимуществами:

- (1) вместо 2^n компонент связности они имеют всего одну компоненту;
- (2) точки многогранника M коллинеарны как элементы факторгруппы и линейно упорядочены, так как имеют вид

$$p_k = (kv \bmod \mathbb{Z}^n, kh), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

В частности, парусу S просто отвечает некоторая подпоследовательность $\{p_{k_i} \mid i \in \mathbb{N}, k_i \in \mathbb{N}\}$ (см. рис. 4).

Последнее обстоятельство оказывается удобным для описания структуры паруса и для разработки алгоритмов, которые могут быть использованы в компьютерных экспериментах.

§5. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ КАК УСТОЙЧИВЫЕ ОБЪЕКТЫ

Первая идея состоит в том, чтобы рассматривать энергию решетки. Для этого в случае решетки $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ возьмем некоторый потенциал U – положительную убывающую функцию на полуоси $(0, +\infty)$ со свойством $U(r) = O(r^{-n-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, – и положим энергию E равной $E^U = \sum_{v \in L \setminus \{0\}} U(v)$. Пусть $\Xi(h)$ – множество локальных минимумов энергии решеток при постоянном значении h , и положим $\Xi = \{(v, h) \mid h > 0, v \in \Xi(h)\}$. При $n = 1$ множество Ξ изучено в работах [13, 14] для потенциалов конкретного вида. Это множество совпадает с диаграммой, ветви которой претерпевают последовательность бифуркаций по мере уменьшения параметра h (подобная диаграмма впервые была рассмотрена ван Итерсоном при изучении плотной упаковки дисков на поверхности цилиндра еще в XIX веке). Ее главная ветвь сходится к точке $(x, h) = (\varphi, 0)$. Точки бифуркации одного уровня h имеют абсциссы, являющиеся дробями Фарея одного ранга.

Отмеченная авторами этих работ универсальность приводит к тому, что с изменением потенциала картина принципиально не меняется, так же как и предельная точка.

Таким образом, при малых значениях параметра и более или менее произвольном потенциале минимум энергии решетки достигается при значениях x , близких к φ . Интересно изучить аналогичный вопрос при $n > 1$.

Несколько иной подход связан с моделированием явления *филлотаксиса* (правильного листорасположения) в биологических объектах. В [15] автором экспериментально изучалась геометрическая цилиндрическая модель, зависящая от параметра h , в которой основная характеристика модели – *угол дивергенции* – оказывался близким к φ при малых значениях параметра.

В работе [16] дано исчерпывающее объяснение экспериментальных и натуральных наблюдений. Ее авторы изучали связанный с цилиндрической моделью оператор на конечномерном торе. Его устойчивой неподвижной точкой является конфигурация с постоянным углом дивергенции $\alpha(h)$, являющаяся частью цилиндрической решетки, накрытием которой служит решетка $L(\alpha, h)$, $\alpha \in [0, 1)$, $h > 0$. Развертка цилиндрической решетки порождает парус в стакане, связанный с вектором (α, h) . Множество $\Xi = \{(\alpha, h)\}$ содержит главную ветвь описанной выше диаграммы, вдоль которой $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = \varphi$.

Многомерным аналогом описанного оператора служит оператор в конечном произведении n -мерных торов. Его устойчивые неподвижные точки должны привести к конфигурации, являющейся решеткой $L(v, h)$ в “стакане”. Интересно изучить многомерный аналог возникающей при этом бифуркационной диаграммы.

Мы описали, при $n = 1$, связь между (1) экстремальными свойствами диофантовых приближений, (2) экстремальными свойствами связанных с парусом ячеек Вороного, (3) минимальностью энергии решетки и (4) устойчивостью неподвижных точек оператора. Все перечисленные объекты и свойства имеют аналоги в любой размерности, и изучение связи между ними представляется перспективным.

Автор благодарен А. А. Ковальчукову за помощь в проведении компьютерных вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*. Физматлит, М., 1961.
2. В. И. Арнольд, *Цепные дроби*. МЦНМО, М., 2001.
3. Е. И. Коркина, *Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры*. — Труды МИАН **209** (1995), 143–166.
4. M. L. Kontsevich. Yu. M. Suhov, *Statistics of Klein polyhedra and multidimensional continued fractions*. In: Pseudoperiodic Topology, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **197**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 9–27.
5. G. Lachaud, *Voiles et polyèdres de Klein*. Prétirage n°95–22, Laboratoire de Mathématiques Discretes du C.N.R.S., 1995.
6. G. Lachaud, *Sails and Klein polyhedra*. In: Number Theory (Tiruchirapalli, 1996), Contemp. Math. **210**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 373–385.
7. О. Н. Карпенков, *О триангуляциях торов, связанных с двумерными цепными дробями кубических иррациональностей*. — Функц. анализ и прил. **38**, вып. 2 (2004), 28–37.
8. О. Н. Герман, *Паруса и норменные минимумы решеток*. — Матем. сб. **196**, вып. 3 (2005), 31–60.
9. A. J. Brentjes, *Multidimensional Continued Fraction Algorithms*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981.

10. А. Д. Брюно, В. И. Парусников, *Сравнение разных обобщений цепных дробей*. — Мат. заметки **61**, вып. 3 (1997), 339–348.
11. С. М. Блюдзе, *Оптимальные цепные дроби*. Дипломная работа. С.-Петербург, 1998.
12. T. van Ravenstein, *Optimal spacing of points on a circle*. — Fibonacci Quart. **27**, No. 1 (1989), 18–24.
13. L. S. Levitov, *Phyllotaxis of flux lattices in layered superconductors*. — Phys. Rev. Lett. **66**, No. 2 (1991), 224–227.
14. H. W. Lee, L. S. Levitov, *Universality in phyllotaxis: a mechanical theory*. In: Symmetry in Plants. Singapore, World Scientific, 1998, pp. 619–653.
15. А. А. Лодкин, *Математическое моделирование филлотаксиса*. В сб.: V Всесоюзная школа по теоретической морфологии растений. Львов, 1987, сс. 59–65.
16. P. Atela, C. Golé, S. Hotton, *A dynamical system for plant pattern formation: a rigorous analysis*. — J. Nonlinear Sci. **12**, No. 6 (2002), 1–39.
17. А. А. Лодкин, *Парус Клейна и диофантовы приближения вектора*. Препринт СПбМО **2018-07** (2018).
18. F. Bergeron, C. Reutenauer, *Golden ratio and phyllotaxis, a clear mathematical link*. — J. Math. Biology **78**, No. 1-2 (2019), 1–19.

Lodkin A. A. Klein sail and Diophantine approximation of a vector.

In the papers by V. I. Arnold and his successors based upon the ideas of A. Poincaré and F. Klein, it was the Klein sail associated with an operator in $\mathbb{R}^n$ that they considered to play the role of a multidimensional continued fraction, and in these terms generalizations of the Lagrange theorem on continued fractions were formulated. A different approach to the generalization of the notion of continued fraction was based upon modifications of Euclid’s algorithm for constructing, given an irrational vector, an approximating sequence of rational vectors.

We suggest a modification of the Klein sail that is constructed *directly from a vector*, without any operator. A numeric characteristic of a Klein sail, its *asymptotic anisotropy* associated with a one-parameter transformation semigroup of the lattice that generates the sail, and of its Voronoï cell, is introduced. In terms of this anisotropy, we hope to give a geometric characterization of irrational vectors worst approximated by rational ones. In the three-dimensional space, we suggest a vector (related to the least Pisot–Vijayaraghavan number) that is a candidate for this role. This vector may be called an analog of the golden number, which is the worst approximated real number in the classical theory of Diophantine approximation.

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: alodkin@gmail.com

Поступило 19 сентября 2019 г.