

Графом Юнга–Фибоначчи (он изображён на рисунке выше) называют диаграмму Хассе этой решётки. Это градуированный граф, который мы представляем растущим снизу вверх начиная с пустого слова. Градуировкой служит функция суммы цифр. Опишем явно, как устроены ориентированные рёбра. Рёбра из данного слова x ведут в слова, получаемые из x одной из двух операций:

- 1) заменить самую левую единицу на двойку;
- 2) вставить единицу левее, чем самая левая единица.

Этот граф помимо модулярности является 1-дифференциальным, то есть для каждой вершины исходящая степень на единицу превосходит входящую степень.

Изучение градуированного графа Юнга–Фибоначчи было инициировано в 1988 году одновременно и независимо такими математиками, как Ричард Стенли [7] и Сергей Владимирович Фомин [5].

Причина интереса к нему в том, что существует всего две 1-дифференциальных модулярных решётки, вторая – это решётка диаграмм Юнга, имеющая ключевое значение в теории представлений симметрической группы.

Центральные вопросы о градуированных графах касаются центральных мер на пространстве (бесконечных) путей в графе. Эта точка зрения последовательно развивалась в работах Анатолия Моисеевича Вершика, к недавнему обзору [1] которого и приводимой там литературе мы отсылаем читателя.

Среди центральных мер выделяют те, которые являются пределами мер, индуцированных путями в далёкие вершины, – так называемую границу Мартина графа.

Граница пространства путей графа Юнга–Фибоначчи изучалась в работе Фредерика Гудмана и Сергея Васильевича Керова [2]. Они использовали алгебраический формализм Окады [3].

Как следует из самого определения, асимптотический вопрос о границе напрямую связан с перечислительным вопросом о числе путей между двумя вершинами графа. Отметим важную общую работу С. В. Фомина [6] о перечислении путей в градуированных графах, в которой приводится ряд общих тождеств и указывается связь, помимо прочего, с обобщением алгоритма Робинсона–Шенстеда–Кнута.

Гудман и Керов обходятся без явных формул для числа путей, хотя, как указал автору Павел Павлович Никитин, из их рассуждений и

можно их извлечь – но количество слагаемых оказывается экспоненциальным по длине меньшего из слов.

В разделе 2 мы предлагаем явную формулу с квадратичным (в худшем случае) числом слагаемых. В некотором смысле это также лучше, чем известная детерминантная формула Фейта [4] для графа Юнга: в определителе, если его раскрыть, очень много слагаемых. Это обстоятельство позволяет рассчитывать на применимость предлагаемых формул в асимптотических вопросах.

В разделе 3 приводится формула для числа путей между двумя вершинами, если ходить можно в обоих направлениях. В ней кубическое (в худшем случае) число слагаемых.

Подход, используемый в настоящей работе, совершенно элементарен, большинство формулировок основаны на изучении конкретных случаев и догадках, а доказательств – на вложенной индукции.

§2. ТЕОРЕМА О КОЛИЧЕСТВЕ ПУТЕЙ “ВНИЗ” МЕЖДУ ДВУМЯ ВЕРШИНАМИ В ГРАФЕ ЮНГА–ФИБОНАЧЧИ

2.1. Подготовка к формулировке теоремы и её доказательству.

Обозначение 1. Пусть $\mathbb{YF}$ – это граф Юнга–Фибоначчи.

Определение 1. Пусть $x \in \mathbb{YF}$. Тогда номером вершины x будем называть слово из единиц и двоек, соответствующее этой вершине.

Обозначение 2. Если $x \in \mathbb{YF}$ и номер вершины x – это $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, где $\alpha_i \in \{1, 2\}$, то будем писать, что $x = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

Обозначение 3. Если $x \in \mathbb{YF}$, то сумму цифр в номере вершины x обозначим через $|x|$.

Замечание 1. Величина $|x|$ – это ранг вершины x в графе Юнга–Фибоначчи.

Определение 2. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$ и $|y| \geq |x|$. Тогда путь

$$y = y_0y_1y_2\ldots y_n = x$$

в графе Юнга–Фибоначчи назовём yx -путём “вниз”, если $|y_i| = |y| - i$ для любого $i \in \{0, \ldots, n\}$. Количество yx -путей “вниз” в графе $\mathbb{YF}$ будем обозначать через $d(x, y)$.

Наша задача в этом параграфе заключается в нахождении числа $d(x, y)$ для любой пары $x, y \in \mathbb{YF}$.

Замечание 2. В определении 2 выполняется равенство $n = |y| - |x|$.

Обозначение 4. Пусть $x \in \mathbb{YF}$. Тогда

- количество цифр в номере вершины x обозначим через $\#x$;
- количество двоек в номере вершины x обозначим через $d(x)$;
- количество двоек до первой единицы в номере вершины x обозначим через $d'(x)$;
- множество предков вершины x обозначим через $R(x)$, множество её потомков обозначим через $L(x)$, количество предков обозначим через $l(x) = |L(x)|$, количество потомков обозначим через $r(x) = |R(x)|$.

Замечание 3. При $x \in \mathbb{YF}$ выполняется одно из двух условий:

- 1) x содержит хотя бы одну единицу, и $r(x) = d'(x) + 1$;
- 2) x не содержит ни одной единицы, и $r(x) = d'(x)$.

Обозначение 5. При $x \in \mathbb{YF}$ вершины из $R(x)$ обозначим следующим образом:

- вершину с номером, получающимся заменой первой двойки на единицу, обозначим через x_1 ;
- вершину с номером, получающимся заменой второй двойки на единицу, обозначим через x_2 ;
- ...
- вершину с номером, получающимся заменой $d'(x)$ -й двойки на единицу, обозначим через $x_{d'(x)}$;
- вершину с номером, получающимся удалением первой единицы (если она есть), обозначим через $x_{d'(x)+1}$.

Определение 3. При $x \in \mathbb{YF}$ нижней функцией для x назовём функцию

$$f(x, y, z), \quad y \in \{0, \dots, |x|\}, \quad z \in \{0, \dots, \#x\},$$

определённую следующим образом.

При $z = 0$:

- если $x \in \mathbb{YF}$ представляется в виде $x = \alpha_1 \dots \alpha_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_n$, где $|\alpha_{m+1} \dots \alpha_n| = y$, $\alpha_i \in \{1, 2\}$, то

$$f(x, y, 0) := \frac{1}{(\alpha_{m+1})(\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2}) \dots (\alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n)} \cdot (-1)^{n-m}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\alpha_m(\alpha_m + \alpha_{m-1})(\alpha_m + \alpha_{m-1} + \alpha_{m-2}) \dots (\alpha_m + \dots + \alpha_1)} \\
& = \frac{1}{(-\alpha_{m+1})(-\alpha_{m+1} - \alpha_{m+2}) \dots (-\alpha_{m+1} - \dots - \alpha_n)} \\
& \times \frac{1}{(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha_{m-1})(\alpha_m + \alpha_{m-1} + \alpha_{m-2}) \dots (\alpha_m + \dots + \alpha_1)};
\end{aligned}$$

- если $x \in \mathbb{YF}$ не представляется в виде $x = \alpha_1 \dots \alpha_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_n$, где $|\alpha_{m+1} \dots \alpha_n| = y$, $\alpha_i \in \{1, 2\}$, то

$$f(x, y, 0) = 0.$$

При $z > 0$ (рекурсивное определение):

- если $y = 0$, то

$$f(x1, 0, z) = f(x1, 0, 0);$$

- если $y > 0$, то

$$f(x1, y, z) = f(x1, y, 0) + f(x, y - 1, z - 1);$$

•

$$f(x2, y, z) = \begin{cases} \frac{f(x11, y, z+1)}{1-y}, & \text{если } y \neq 1, \\ 0, & \text{если } y = 1. \end{cases}$$

Пример 1. Построение нижней функции $f(x, y, z)$ для $x = 21221$ при $z = 0$:

•

$$f(21221, 0, 0) = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{1}{720};$$

•

$$f(21221, 1, 0) = \frac{1}{(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} = -\frac{1}{280};$$

•

$$f(21221, 2, 0) = 0;$$

•

$$f(21221, 3, 0) = \frac{1}{(-2) \cdot (-3) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{180};$$

•

$$f(21221, 4, 0) = 0;$$

•

$$f(21221, 5, 0) = \frac{1}{(-2) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot 1 \cdot 3} = -\frac{1}{120};$$

•

$$f(21221, 6, 0) = \frac{1}{(-1) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot 2} = \frac{1}{180};$$

•

$$f(21221, 7, 0) = 0;$$

•

$$f(21221, 8, 0) = \frac{1}{(-2) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-7) \cdot (-8)} = -\frac{1}{1680}.$$

Пример 2. Значения $f(x, y, z)$ при $|x| \leq 4$.

• $x = \varepsilon$:

	$y = 0$
$z = 0$	1

• $x = 1$:

	$y = 0$	$y = 1$
$z = 0$	1	-1
$z = 1$	1	0

• $x = 2$:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$z = 0$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$z = 1$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

• $x = 11$:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$z = 0$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
$z = 1$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$z = 2$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

• $x = 12$:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$z = 0$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$z = 1$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$z = 2$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$

• $x = 21$:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$z = 0$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$
$z = 1$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$z = 2$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$

- $x = 111$:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$z = 0$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
$z = 1$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$z = 2$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$
$z = 3$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

- $x = 112$:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$
$z = 0$	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$
$z = 1$	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$
$z = 2$	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$
$z = 3$	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$

- $x = 22$:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$
$z = 0$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$
$z = 1$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$
$z = 2$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$

- $x = 121$:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$
$z = 0$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$
$z = 1$	$\frac{1}{12}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$z = 2$	$\frac{1}{12}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$z = 3$	$\frac{1}{12}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

- $x = 211$:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$
$z = 0$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{24}$
$z = 1$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$
$z = 2$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$
$z = 3$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$

- $x = 1111$:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$
$z = 0$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$
$z = 1$	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$
$z = 2$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{8}$
$z = 3$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$
$z = 4$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$

Давайте сразу посмотрим, как устроена эта функция.

Утверждение 1. Пусть $x \in \mathbb{YF}$. Тогда

- 1) если $y \in \{1, \dots, |x1|\}$, то $-yf(x1, y, 0) = f(x, y - 1, 0)$;
- 2) если $y \in \{0, \dots, |x2|\}$, то $(1 - y)f(x11, y, 0) = f(x2, y, 0)$;
- 3) если $z_1, z_2 \in \{0, \dots, \#x\}$, то $f(x, 0, z_1) = f(x, 0, z_2)$;
- 4) если $z \in \{1, \dots, \#x\}$, то $f(x, 1, z) = 0$;
- 5) если существует такая вершина x' , что $x = x'2$, то $f(x, 1, 0) = 0$;
- 6) если $y \in \{0, \dots, |x'| + 2\}$, то $f(x'2, y, 0) = f(x'11, y, 1)$;
- 7) если $x \neq \varepsilon$, то $\sum_{y=0}^{|x|} f(x, y, 0) = 0$;
- 8) если $y \in \{0, \dots, |x|\}$, $z \in \{0, \dots, \#x\}$, $\alpha_0 \in \{1, 2\}$, то $f(x, y, z) = f(\alpha_0 x, y, z)(|\alpha_0 x| - y)$;
- 9) если $y \in \{0, 1, \dots, |2x|\}$, то $f(2x, y, \#x) = f(2x, y, \#x + 1)$;
- 10) если $y \in \{0, 1, \dots, |x|\}$, то $f(1x, y, \#x) = f(1x, y, \#x + 1)$;
- 11) если $z \in \{0, 1, \dots, |2x|\}$, то $f(2x, |x| + 1, z) = 0$.

Определение 4. При $x \in \mathbb{YF}$ верхней функцией для x назовём функцию

$$g(x, y), \quad y \in \{1, \dots, d(x)\},$$

определённую следующим образом.

Рассмотрим представление вершины x в виде

$$x = \underbrace{1 \dots 1}_\beta 2 \underbrace{1 \dots 1}_\beta 2 \dots 2 \underbrace{1 \dots 1}_\beta 2 \underbrace{1 \dots 1}_\beta$$

$\beta_{d(x)} \quad \beta_{d(x)-1} \quad \beta_1 \quad \beta_0$

и определим

- $g(x, 1) = \beta_0 + 1$;
- $g(x, 2) = \beta_0 + \beta_1 + 3$;
- ...
- $g(x, m) = \beta_0 + \dots + \beta_{m-1} + 2m - 1$;
- ...
- $g(x, d(x)) = \beta_0 + \dots + \beta_{d(x)-1} + 2d(x) - 1$.

Обозначение 6. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$. Тогда вершину, номер которой – это конкатенация номеров вершин x и y , обозначим через xy .

Обозначение 7. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$. Тогда максимальное $z \in \mathbb{N}_0$, для которого существуют такие $x', y', z' \in \mathbb{YF}$, что

$$x = x'z', \quad y = y'z', \quad \#z' = z,$$

обозначим через $h(x, y)$.

Замечание 4. Если $x, y \in \mathbb{YF}$, то $h(x, y)$ – это количество цифр в самом длинном общем суффиксе вершин x и y . Ясно, что $h(x, y) = h(y, x)$.

Итак, мы готовы к тому, чтобы сформулировать и доказать теорему о количестве путей “вниз” между двумя данными вершинами в графе Юнга-Фибоначчи.

2.2. Формулировка теоремы и некоторые утверждения для её доказательства.

Теорема 1. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, причем $|y| \geq |x|$, и $z = h(x, y)$. Тогда

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{|x|} \left(f(x, i, z) \prod_{j=1}^{d(y)} (g(y, j) - i) \right).$$

Доказательство. Обозначим предполагаемый ответ через $o(x, y)$.

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Утверждение 2. Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $b, c \in \mathbb{N}_0$ и $c \leq b$. Тогда

1)

$$\begin{aligned} \prod_{d=0}^b (a + 2d) - \sum_{e=0}^c \left(\prod_{d=0}^{b-e-1} (a + 2d) \prod_{d=b-e}^{b-1} (a + 2d + 1) \right) \\ = \prod_{d=0}^{b-c-1} (a + 2d) \prod_{d=b-c-1}^{b-1} (a + 2d + 1). \end{aligned}$$

2)

$$\prod_{d=0}^b (a + 2d) = \sum_{e=0}^{b+1} \left(\prod_{i=0}^{b-e-1} (a + 2d) \prod_{d=b-e}^{b-1} (a + 2d + 1) \right).$$

Следствие 1 (из утверждения 2).

1) Пусть вершина $y \in \mathbb{YF}$ содержит хотя бы одну единицу. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}_0$

$$\prod_{j=1}^{d(y)} (g(y, j) - i) = \sum_{k=1}^{r(y)} \left(\prod_{j=1}^{d(y_k)} (g(y_k, j) - i) \right).$$

- 2) Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $|y| > |x|$, $z = h(x, y)$, $z_k = h(x, y_k)$ для любого $k \in \{1, \dots, r(y)\}$ и при этом номер y содержит хотя бы одну единицу. Тогда

$$f(x'1, 0, z) \prod_{j=1}^{d(y)} g(y, j) = \sum_{k=1}^{r(y)} \left(f(x'1, 0, z_k) \prod_{j=1}^{d(y_k)} g(y_k, j) \right).$$

□

2.3. Первая ключевая лемма.

Лемма 1. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $|y| > |x|$ и $z_k = h(x, y_k)$ для любого k . Тогда для любого i

$$f(x, i, z) \prod_{j=1}^{d(y)} (g(y, j) - i) = \sum_{k=1}^{r(y)} \left(f(x, i, z_k) \prod_{j=1}^{d(y_k)} (g(y_k, j) - i) \right).$$

Доказательство (план). Лемма доказывается индукцией по $|x|$.

База $|x| = 0$ проверяется в конце.

Переход к $|x| \geq 1$.

Рассмотрим восемь случаев, в которых мы пользуемся ранее сформулированными утверждениями, рекурсивной формулой для f и предположением индукции.

- 1° $i = 1$;
- 2° $i \neq 1$, и существуют такие x', y' , что $x = x'1$, $y = y'2$, причём номер y содержит хотя бы одну единицу или существуют такие x', y' , что $x = x'2$, $y = y'1$, причём номер y содержит хотя бы две единицы;
- 3° $i \neq 1$, и существует такая вершина x' , что $x = x'1$, причём номер y состоит только из двоек;
- 4° $i \neq 1$, и существуют такие x', y' , что $x = x'1$, $y = y'1$, причём номер y содержит хотя бы две единицы;
- 5° $i \neq 1$, и существуют такие x', y' , что $x = x'1$, $y = y'1$, причём номер y содержит ровно одну единицу;
- 6° $i \neq 1$, и существуют такие x', y' , что $x = x'2$, $y = y'2$, причём номер y содержит хотя бы одну единицу;
- 7° $i \neq 1$, и существуют такие x', y' , что $x = x'2$, $y = y'1$, причём номер y содержит ровно одну единицу;
- 8° $i \neq 1$, и существует такая вершина x' , что $x = x'2$, причём номер y состоит только из двоек.

База $|x| = 0 \iff x = \varepsilon$ проверяется несложно.

2.4. Вторая ключевая лемма и завершение доказательства теоремы.

Лемма 2. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$ и $|y| = |x|$. Тогда

$$d(x, y) = o(x, y).$$

Доказательство (план). Пусть $z = h(x, y)$.

Если $x = \varepsilon$, то утверждение леммы очевидно.

При $|x| \geq 1$ лемма доказывается индукцией по $|x|$.

База $|x| = 1 \iff x = 1$. Несложно проверить.

Переход к такому x , что $|x| \geq 2$.

Рассмотрим пять случаев:

- 1° $\exists x', y' : x = x'1, y = y'1$;
- 2° $\exists x', y' : x = x'1, y = y'2$;
- 3° $\exists x', y' : x = x'2, y = y'2$;
- 4° $\exists x', y' : x = x'2, y = y'21$;
- 5° $\exists x', y' : x = x'2, y = y'11$.

Первые два случая доказываются с помощью рекурсивной формулы для f , предположения индукции и следующего утверждения.

Утверждение 3. Если $x, y \in \mathbb{YF}$, $|x| \geq |y|$ и при этом существует такая вершина x' , что $x = x'1$, то

$$o'(x, y) := \sum_{i=0}^{|x|} \left(f(x, i, 0) \prod_{j=1}^{d(y)} (g(y, j) - i) \right) = 0.$$

Остальные случаи доказываются с помощью некоторых пунктов утверждения 1, рекурсивной формулы для f и первых двух случаев. $\square$

Теорема же доказывается при фиксированном x индукцией по $|y|$.

База ($|y| = |x|$) мгновенно следует из леммы 2.

Переход (к такому y , что $|y| > |x|$) мгновенно следует из предположения и леммы 1. $\square$

Следствие 2. Пусть $x \in \mathbb{YF}$. Тогда

$$d(\varepsilon, x) = \prod_{j=1}^{d(x)} g(x, j).$$

2.5. Формула в явном виде. Теперь мы хотим написать формулу для $f(x, y, z)$ не в рекурсивном, а в явном виде.

Если $y = 0$, то по п. 3 утверждения 1 имеем $f(x, 0, z) = f(x, 0, 0)$.

Пусть $y > 0$. Ясно, что многократным применением рекурсивной формулы для f можно выразить $f(x, y, z)$ через линейную комбинацию различных $f(x', y', 0)$, а они определены в явном виде.

Чтобы привести явную формулу, введём следующие определения.

Определение 5. При $x \in \mathbb{YF}$ первой функцией начала для x назовём функцию

$$s(a) = s(x, a), \quad a \in \{0, \dots, |x|\},$$

определённую следующим образом:

- если существуют такие $x', x'' \in \mathbb{YF}$, что $x = x'1x''$ и $|x''| = a$, то $s(a) = x'1$;
- если существуют такие $x', x'' \in \mathbb{YF}$, что $x = x'2x''$ и $|x''| = a$, то $s(a) = x'11$;
- если существуют такие $x', x'' \in \mathbb{YF}$, что $x = x'2x''$ и $|x''| = a - 1$, то $s(a) = x'1$;
- $s(|x|) = \varepsilon$.

Определение 6. При $x \in \mathbb{YF}$ второй функцией начала для x назовём функцию

$$s'(a) = s'(x, a), \quad a \in \{0, \dots, |x|\},$$

определённую следующим образом:

- если существуют такие $x', x'' \in \mathbb{YF}$, что $x'x'' = x$ и $|x''| = a$, то $s'(a) = x'$;
- если не существует таких $x', x'' \in \mathbb{YF}$, что $x'x'' = x$ и $|x''| = a$, то $s'(a)$ не определено.

Пример 3. Приведем значения функций s и s' при $x = 122112$:

	$s(a, 122112)$	$s'(a, 122112)$
$a = 0$	1221111	122112
$a = 1$	122111	не определено
$a = 2$	12211	12211
$a = 3$	1221	1221
$a = 4$	1211	122
$a = 5$	121	не определено
$a = 6$	111	12
$a = 7$	11	не определено
$a = 8$	1	1
$a = 9$	ε	ε

Определение 7. При $x \in \mathbb{YF}$ функцией суммы конца для x назовём функцию

$$p(x, a), \quad a \in \{0, \dots, \#x\},$$

значение которой равно сумме a последних цифр числа x .

Иными словами, если мы рассмотрим представление $x = \alpha_1 \dots \alpha_{\#x}$, где $\alpha_i \in \{1, 2\}$, то

$$p(x, a) = |\alpha_{\#x-a+1} \alpha_{\#x-a+2} \dots \alpha_{\#x}|.$$

Итак, приведем формулу в явном виде.

Наблюдение 1.

- Если $p(x, z) \leq y - 2$, то

$$f(x, y, z) = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{f(s(i), y-i, 0)}{\prod_{j=1}^{d(i)} (g(x, j) - y)} + \frac{f(s'(c), y-c, 0)}{\prod_{j=1}^{d(c)} (g(x, j) - y)},$$

при $d(i) = \max_k \{g(x, k) - 1 \leq i\}$, $d(c) = \max_k \{g(x, k) - 1 < c\}$,
 $c = p(x, z)$.

- Если $p(x, z) > y - 2$, то

$$f(x, y, z) = \sum_{i=0}^c \frac{f(s(i), y-i, 0)}{\prod_{j=1}^{d(i)} (g(x, j) - y)},$$

при $d(i) = \max_k \{g(x, k) - 1 \leq i\}$, $c = y - 2$.

Из всего вышесказанного можно сделать следующий вывод.

Замечание 5.

- 1) У нас есть явная формула для $f(x, y, z)$, и в ней $O(|x|)$ слагаемых.
- 2) У нас есть явная формула для $d(x, y)$, и в ней $O(|x|^2)$ слагаемых.

Пример 4. Давайте найдём $f(1212, 5, 3)$:

$$\begin{aligned}
 f(1212, 5, 3) &= \frac{f(12111, 5, 4)}{-4} = \frac{f(12111, 5, 0) + f(1211, 4, 3)}{-4} \\
 &= \frac{f(12111, 5, 0) + f(1211, 4, 0) + f(121, 3, 2)}{-4} \\
 &= \frac{f(12111, 5, 0) + f(1211, 4, 0) + f(121, 3, 0) + f(12, 2, 1)}{-4} \\
 &= \frac{f(12111, 5, 0) + f(1211, 4, 0) + f(121, 3, 0)}{-4} + \frac{f(111, 2, 2)}{4} \\
 &= \frac{f(12111, 5, 0) + f(1211, 4, 0) + f(121, 3, 0)}{-4} + \frac{f(111, 2, 0) + f(11, 1, 1)}{4} \\
 &= \frac{\frac{1}{(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot 1} + \frac{1}{(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot 1} + \frac{1}{(-2) \cdot (-3) \cdot 1}}{-4} + \frac{\frac{1}{(-1) \cdot (-2) \cdot 1} + 0}{4} \\
 &= \frac{\frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6}}{-4} + \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{11}{120}.
 \end{aligned}$$

§3. КОЛИЧЕСТВО S -ПУТЕЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ВЕРШИНАМИ В
ГРАФЕ ЮНГА–ФИБОНАЧЧИ

3.1. Подготовка к формулировке двух теорем и их доказательству. Теперь мы хотим обобщить теорему 1. Для этого введём несколько новых определений и обозначений.

Определение 8. Пусть $X, Y \in \mathbb{N}_0$, $Y \geq X$. Тогда последовательность $\Delta = \{\Delta_i : i \in \{0, 1, \dots, k\}\}$ при некотором $k \in \mathbb{N}_0$ назовём $(Y; X)$ -траекторией, если выполняются следующие условия:

- 1) $\Delta_i - \Delta_{i-1} = \pm 1$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$;
- 2) $\Delta_i \geq 0$ для любого $i \in \{0, 1, \dots, k\}$;
- 3) $\Delta_0 = Y$;
- 4) $\Delta_k = X$.

Обозначение 8.

- Пусть $X, Y \in \mathbb{N}_0$. Тогда множество $(Y; X)$ -траекторий обозначим через $\Omega(X, Y)$;

- множество всех $(Y; X)$ -траекторий при каких-то $X, Y \in \mathbb{N}_0$ обозначим через Ω .

Определение 9. Пусть $\Delta = \{\Delta_i : i \in \{0, 1, \dots, k\}\} \in \Omega$. Тогда

- длиной траектории Δ назовём величину $|\Delta|$, равную k ;
- при $i \in \{1, \dots, |\Delta|\}$ будем называть i -м шагом траектории Δ величину δ_i , равную $\Delta_i - \Delta_{i-1}$;
- при $i \in \{1, \dots, |\Delta|\}$ будем называть i -й шаг траектории Δ шагом “вверх”, если $\delta_i = 1$, и шагом “вниз”, если $\delta_i = -1$.

Обозначение 9. Пусть $\Delta \in \Omega$. Тогда

- такое i , что i -й шаг траектории Δ является j -м шагом “вверх” траектории Δ , будем обозначать через $\gamma(\Delta, j)$;
- количество шагов “вверх” траектории Δ , то есть величину, равную $|\{i : \delta_i = 1\}|$, обозначим через $s(\Delta)$.

Замечание 6. Пусть $X, Y \in \mathbb{N}_0$ и $\Delta \in \Omega(X, Y)$. Тогда

1)

$$\sum_{i=1}^{|\Delta|} \delta_i = -Y + X;$$

2) Δ содержит $s(\Delta)$ шагов “вверх” и $Y - X + s(\Delta)$ шагов “вниз”;

3) $|\Delta| = Y - X + 2s(\Delta)$.

Определение 10. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $|y| \geq |x|$, $\Delta \in \Omega(|x|, |y|)$. Тогда путь

$$y = y_0 y_1 y_2 \dots y_n = x$$

в графе Юнга-Фибоначчи будем называть Δ -путём, если $n = |\Delta|$ и $|y_i| = \Delta_i$ для любого $i \in \{0, \dots, n\}$. Количество yx - Δ -путей в $\mathbb{YF}$ будем обозначать через $d(x, y, \Delta)$.

Замечание 7. Путь в графе $\mathbb{YF}$ является Δ -путём при $s(\Delta) = 0$ тогда и только тогда, когда этот путь является путём “вниз”.

Определение 11. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $|y| \geq |x|$, $S \in \mathbb{N}_0$, $\Delta \in \Omega$ и при этом путь

$$y = y_0 y_1 y_2 \dots y_n = x$$

является Δ -путём. Тогда скажем, что он является S -путём, если $s(\Delta) = S$. Количество yx - S -путей в $\mathbb{YF}$ будем обозначать через $d(x, y, S)$.

Замечание 8. Множество путей “вниз” равно множеству 0-путей.

Наша цель – найти $d(x, y, S)$. Для начала будем искать $d(x, y, \Delta)$.

Определение 12. При $\Delta \in \Omega$ средней функцией для Δ назовём функцию

$$e(\Delta, x), \quad x \in \{1, \dots, s(\Delta)\},$$

определённую следующим образом:

- $e(\Delta, 1) = \Delta_{\gamma(\Delta, 1)}$;
- $e(\Delta, 2) = \Delta_{\gamma(\Delta, 2)}$;
- ...
- $e(\Delta, m) = \Delta_{\gamma(\Delta, m)}$;
- ...
- $e(\Delta, s(\Delta)) = \Delta_{\gamma(\Delta, s(\Delta))}$.

Обозначение 10. Пусть $\Delta \in \Omega$. Тогда мультимножество

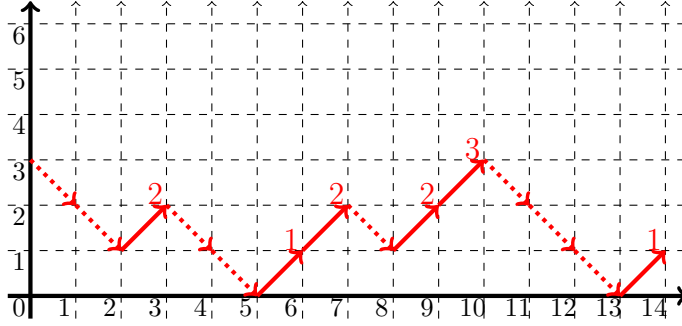
$$\{e(\Delta, 1), e(\Delta, 2), \dots, e(\Delta, m), \dots, e(\Delta, s(\Delta))\}$$

обозначим через $E(\Delta)$.

Замечание 9. Пусть $\Delta \in \Omega$. Тогда

$$|E(\Delta)| = s(\Delta).$$

Пример 5. Пример траектории $\Delta \in \Omega$:



На рисунке изображена следующая траектория Δ :

$$\Delta_0 = 3, \Delta_1 = 2, \Delta_2 = 1, \Delta_3 = 2, \Delta_4 = 1, \Delta_5 = 0, \Delta_6 = 1, \Delta_7 = 2,$$

$$\Delta_8 = 1, \Delta_9 = 2, \Delta_{10} = 3, \Delta_{11} = 2, \Delta_{12} = 1, \Delta_{13} = 0, \Delta_{14} = 1.$$

Данная траектория обладает такими свойствами:

- это $(3, 1)$ -траектория, иначе говоря, $\Delta \in \Omega(1, 3)$;

- длина траектории $|\Delta|$ равна 14;
- - $\delta_1 = -1, \delta_2 = -1, \delta_3 = 1, \delta_4 = -1, \delta_5 = -1, \delta_6 = 1, \delta_7 = 1,$
 - $\delta_8 = -1, \delta_9 = 1, \delta_{10} = 1, \delta_{11} = -1, \delta_{12} = -1, \delta_{13} = -1, \delta_{14} = 1;$
 - 3-й, 6-й, 7-й, 9-й, 10-й и 14-й шаг траектории Δ – шаги “вверх”;
 - 1-й, 2-й, 4-й, 5-й, 8-й, 11-й, 12-й и 13-й шаг траектории Δ – шаги “вниз”;
 - - $\gamma(\Delta, 1) = 3, \gamma(\Delta, 2) = 6, \gamma(\Delta, 3) = 7,$
 - $\gamma(\Delta, 4) = 9, \gamma(\Delta, 5) = 10, \gamma(\Delta, 6) = 14;$
 - $s(\Delta) = 6;$
 - - $e(\Delta, 1) = 2, e(\Delta, 1) = 1, e(\Delta, 1) = 2, e(\Delta, 1) = 2,$
 - $e(\Delta, 1) = 3, e(\Delta, 1) = 1;$
 - $E(\Delta) = \{1, 1, 2, 2, 2, 3\}.$

Мы готовы к формулировке теоремы о количестве yx - Δ путей и её доказательству.

3.2. Теорема о количестве Δ -путей между двумя вершинами в графе Юнга–Фибоначчи.

Теорема 2. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $|y| \geq |x|$, $z = h(x, y)$ и $\Delta \in \Omega(|x|, |y|)$. Тогда

$$d(x, y, \Delta) = \sum_{i=0}^{|x|} \left(f(x, i, z) \prod_{j=1}^{d(y)} (g(y, j) - i) \prod_{j=1}^{s(\Delta)} (e(\Delta, j) - i) \right).$$

Доказательство (план). Обозначим предполагаемый ответ через $o(x, y, \Delta)$. Вспомогательное утверждение.

Утверждение 4. Для любой вершины $y \in \mathbb{YF}$

$$L(y) = R(2y).$$

Давайте доказывать теорему индукцией по $|\Delta|$, а при данном $|\Delta|$ – индукцией по $s(\Delta)$.

База $|\Delta| = 0$ очевидна.

Переход к такому Δ , что $|\Delta| \geq 1$.

Снова будем разбирать случаи.

1° Пусть $|y| > |x|$ и $\delta_1 = -1$.

Введём Δ' следующим образом:

$$|\Delta'| = |\Delta| - 1; \Delta'_i = \Delta_{i+1} \text{ для любого } i \in \{1, \dots, |\Delta'|\},$$

а потом воспользуемся предположением.

2° Пусть $|y| \geq |x|$ и $\delta_1 = 1$.

Введём Δ' следующим образом:

$$|\Delta'| = |\Delta|; \Delta'_1 = \Delta_1 + 2; \Delta'_i = \Delta_i \text{ для любого } i \in \{1, \dots, |\Delta'|\},$$

а потом воспользуемся утверждением 4.

Последний случай таков.

3° Пусть $|y| = |x|$ и $\delta_1 = -1$.

Данный случай разбирается с помощью некоторых пунктов утверждения 1, а также с помощью следующего утверждения.

Утверждение 5.

1° Пусть вершина $x \in \mathbb{YF}$ представляется в виде $x = \alpha_1 \dots \alpha_A$, где $\alpha_j \in \{1, 2\}$. Тогда

$$\prod_{j=1}^{d(x)} g(x, j) = \frac{|x|!}{(\alpha_A)(\alpha_A + \alpha_{A-1}) \dots (\alpha_A + \dots + \alpha_1)}.$$

2° Пусть $x \in \mathbb{YF}$ представляется в виде $x = \alpha_1 \dots \alpha_a \alpha_{a+1} \dots \alpha_A$, где $|\alpha_{a+1} \dots \alpha_A| = i, \alpha_j \in \{1, 2\}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^{d(x)} (g(x, j) - i) \\ &= \prod_{j \in \{1, \dots, |x|\} \setminus i} (j - i) \frac{1}{(\alpha_A - i)(\alpha_A + \alpha_{A-1} - i) \dots (\alpha_A + \dots + \alpha_{a+2} - i)} \\ & \quad \times \frac{1}{(\alpha_A + \dots + \alpha_a - i)(\alpha_A + \dots + \alpha_{a-1} - i) \dots (\alpha_A + \dots + \alpha_1 - i)}. \end{aligned}$$

Следствие 3 (из утверждения 5). Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $|x| = |y|$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, |x|\}$

$$f(x, i, 0) \prod_{j=1}^{d(y)} (g(y, j) - i) = f(y, i, 0) \prod_{j=1}^{d(x)} (g(x, j) - i).$$

Лемма 3. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $|x| = |y|$, $z = h(x, y) = h(y, x)$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, |x|\}$

$$f(x, i, z) \prod_{j=1}^{d(y)} (g(y, j) - i) = f(y, i, z) \prod_{j=1}^{d(x)} (g(x, j) - i).$$

Определение 13. Пусть $X \in \mathbb{N}_0$ и $\Delta \in \Omega(X, X)$. Тогда “обратной” к Δ траекторией назовём траекторию $\overline{\Delta}$, определённую следующим образом:

$$|\overline{\Delta}| = |\Delta| \text{ и } \overline{\Delta}_i = \Delta_{|\Delta|-i} \text{ для любого } i \in \{0, 1, \dots, |\Delta|\}.$$

Сразу из определения вытекает следующее замечание.

Замечание 10. Пусть $X \in \mathbb{N}_0$ и $\Delta \in \Omega(X, X)$. Тогда

- $\overline{\Delta} \in \Omega(X, X)$;
- $s(\overline{\Delta}) = s(\Delta)$;
- $\overline{\Delta}$, как и Δ , состоит из $s(\Delta)$ шагов “вверх” и такого же числа шагов “вниз”;
- для любого $i \in \{1, \dots, |\Delta|\}$

$$\overline{\delta}_i = \overline{\Delta}_i - \overline{\Delta}_{i-1} = \Delta_{|\Delta|-i} - \Delta_{|\Delta|-i+1} = -\delta_{|\Delta|-i+1}.$$

Утверждение 6. Пусть $X \in \mathbb{N}_0$ и $\Delta \in \Omega(X, X)$. Тогда

$$E(\Delta) = E(\overline{\Delta}).$$

□

Следствие 4. Пусть $x \in \mathbb{YF}$ и $\Delta \in \Omega(0, x)$. Тогда

$$d(\varepsilon, x, \Delta) = \prod_{j=1}^{d(x)} g(x, j) \prod_{j=1}^{s(\Delta)} e(\Delta, j).$$

3.3. Теорема о количестве S -путей между двумя вершинами в графе Юнга–Фибоначчи. Итак, пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $|y| \geq |x|$, $S \in \mathbb{N}_0$.

Мы готовы искать число yx - S -путей в $\mathbb{YF}$, то есть $d(x, y, S)$.

Обозначение 11. Пусть $X, Y, S \in \mathbb{N}_0$. Тогда множество

$$\{\Delta \in \Omega(X, Y) : s(\Delta) = S\}$$

обозначим через $\Omega(X, Y, S)$.

Из определения 11 (определения S -пути) вытекает следующее замечание.

Замечание 11. При данных вершинах $x, y \in \mathbb{YF}$, таких, что $|y| \geq |x|$, и $S \in \mathbb{N}_0$ множество xy - S -путей – это в точности множество xy - Δ -путей при всех Δ , таких, что $s(\Delta) = S$, в частности,

$$d(x, y, S) = \sum_{\Delta \in \Omega(|x|, |y|, S)} d(x, y, \Delta).$$

Таким образом, мы сразу можем заметить следующее.

Наблюдение 2.

$$\begin{aligned} d(x, y, S) &= \sum_{\Delta \in \Omega(|x|, |y|, S)} d(x, y, \Delta) \\ &= \sum_{\Delta \in \Omega(|x|, |y|, S)} \sum_{i=0}^{|x|} \left(f(x, i, z) \prod_{j=1}^{d(y)} (g(y, j) - i) \prod_{j=1}^{s(\Delta)} (e(\Delta, j) - i) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{|x|} \left(\left(\sum_{\Delta \in \Omega(x, y, S)} \prod_{j=1}^S (e(\Delta, j) - i) \right) f(x, i, z) \prod_{j=1}^{d(y)} (g(y, j) - i) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, у нас уже есть формула для $d(x, y, S)$. Проблема в том, что в ней слишком много слагаемых. Чтобы уменьшить число слагаемых, надо решить следующую задачу.

Задача 1. При $x, y \in \mathbb{YF}$, таких, что $|y| \geq |x|$, и $i \in \{0, \dots, |x|\}$ свернуть следующее выражение:

$$\sum_{\Delta \in \Omega(|x|, |y|, S)} \prod_{j=1}^S (e(\Delta, j) - i).$$

Итак, давайте решать эту задачу.

Как устроено выражение из задачи 1?

Вспомним, что $e(\Delta, j)$ – это значение Δ_i , которое достигается после j -го шага “вверх”. Как может быть устроена последовательность

$$e(\Delta, 1), e(\Delta, 2), \dots, e(\Delta, S)?$$

Утверждение 7. Пусть $X, Y, S \in \mathbb{N}_0$. Пусть также последовательность $e(\Delta, 1), e(\Delta, 2), \dots, e(\Delta, S)$ удовлетворяет следующим четырём условиям:

- 1) $e(\Delta, 1) \leq Y + 1$;
- 2) $e(\Delta, i + 1) \leq e(\Delta, i) + 1$ для любого $i \in \{1, \dots, S - 1\}$;

- 3) $e(\Delta, S) \geq X$;
- 4) $e(\Delta, i) \geq 1$ для любого $i \in \{1, \dots, S\}$.

Тогда существует и единственна траектория $\Delta \in \Omega(X, Y, S)$ с такой средней функцией. Кроме того, любая такая траектория удовлетворяет данным четырём условиям.

Определение 14. Пусть $X, Y \in \mathbb{N}_0$ и $Y \geq X$. Тогда последовательность $\Delta = \{\Delta_i : i \in \{0, 1, \dots, k\}\}$ при некотором $k \in \mathbb{N}_0$ назовём $(Y; X)$ -псевдотраекторией, если выполняются следующие условия:

- 1) $\Delta_i - \Delta_{i-1} = \pm 1$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$;
- 2) $\Delta_0 = Y$;
- 3) $\Delta_k = X$.

Замечание 12. Траектории – это такие псевдотраектории, что Δ_i всегда неотрицательны.

Обозначение 12.

- Пусть $X, Y \in \mathbb{N}_0$. Тогда множество $(Y; X)$ -псевдотраекторий обозначим через $\Omega'(X, Y)$.
- Множество всех $(Y; X)$ -псевдотраекторий при любых $X, Y \in \mathbb{N}_0$ обозначим через Ω' .
- Кроме того, давайте для псевдотраекторий использовать все определения и обозначения, которые были даны для траекторий.

Обозначение 13. Пусть $X, Y, S, i \in \mathbb{N}_0$ и $Y \geq X \geq i \geq 0$. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} & \bullet \\ & \Xi(X, Y, S, i) := \sum_{\Delta \in \Omega(X, Y, S)} \prod_{j=1}^S (e(\Delta, j) - i); \\ & \bullet \\ & \Xi'(X, Y, S, i) = \sum_{\Delta \in \Omega'(X, Y, S)} \prod_{j=1}^S (e(\Delta, j) - i). \end{aligned}$$

Утверждение 8. Пусть $X, Y, S, i \in \mathbb{N}_0$ и $Y \geq X \geq i \geq 0$. Тогда

- 1) $\Xi(X, Y, S, i) = \Xi'(X, Y, S, i)$;
- 2) $\Xi(X, Y, S, i) = \Xi(X - i, Y - i, S, 0)$.

Таким образом, нам достаточно найти только $\Xi(X, Y, S, 0)$ при $X, Y, S \in \mathbb{N}_0$ и $Y \geq X \geq 0$.

Обозначение 14. Обозначим $\Xi(X, Y, S, 0)$ через $\Xi(X, Y, S)$.

Утверждение 9. Пусть $X, Y \in \mathbb{N}_0$ и $Y \geq X \geq 0$. Тогда

$$\Xi(X, Y, 0) = 1.$$

Утверждение 10. Пусть $X, Y, S \in \mathbb{N}_0$ и $Y \geq X \geq 0$. Тогда

1) если $X \geq 2$ и $S \geq 1$, то

$$\Xi(X, Y, S) = \Xi(X - 1, Y, S) - \Xi(X - 2, Y, S - 1) \cdot (X - 1);$$

2)

$$\Xi(1, Y, S) = \Xi(0, Y, S).$$

Теперь нужно посчитать $\Xi(0, Y, S) = \Xi(1, Y, S)$.

Для этого понадобится следующее утверждение.

Утверждение 11. Пусть $Y, S \in \mathbb{N}$. Тогда

1)

$$\begin{aligned} \Xi(0, Y, S) &= \sum_{e=1}^{Y+1} (e \cdot \Xi(0, e, S - 1)) \\ &= \Xi(0, Y - 1, S) + (Y + 1) \cdot \Xi(0, Y + 1, S - 1); \end{aligned}$$

2)

$$\Xi(0, 0, S) = \Xi(0, 1, S - 1).$$

Теперь мы готовы считать $\Xi(0, Y, S)$.

Утверждение 12. Пусть $Y \in \mathbb{N}_0$ и $S \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Xi(0, Y, S) = \binom{Y + 2S}{Y} (2S - 1)!!.$$

Следствие 5. Пусть $Y \in \mathbb{N}_0$ и $S \in \mathbb{N}_0$. Также считаем, что $(-1)!! = 1$. Тогда

$$\Xi(0, Y, S) = \binom{Y + 2S}{Y} (2S - 1)!!.$$

После этого утверждения остаётся только посчитать $\Xi(X, Y, S)$ при $X \geq 2$.

Лемма 4. Пусть $X, Y, S \in \mathbb{N}_0$ и $m(X, S) = \min\{\lfloor \frac{X}{2} \rfloor, S\}$. Тогда

$$\Xi(X, Y, S) = \Xi(0, Y, S) + \sum_{i=1}^{m(X, S)} \left((-1)^i \binom{X}{2i} (2i - 1)!! \cdot \Xi(0, Y, S - i) \right).$$

Следствие 6. Пусть $X, Y, S \in \mathbb{N}_0$ и $m(X, S) = \min\{\lfloor \frac{X}{2} \rfloor, S\}$. Также считаем, что $(-1)!! = 1$. Тогда

$$\Xi(X, Y, S) = \sum_{i=0}^{m(X, S)} \left((-1)^i \binom{X}{2i} (2i-1)!! \cdot \Xi(0, Y, S-i) \right).$$

Итак, у нас есть формула для $\Xi(X, Y, S)$ при $X, Y, S \in \mathbb{N}_0$ и $Y \geq X$. А значит, по п. 2 утверждения 8 у нас есть формула и для $\Xi(X, Y, S, i)$ при $X, Y, S, i \in \mathbb{N}_0$ и $Y \geq X \geq i$.

Таким образом, мы решили задачу 1 и готовы получить формулу для $d(x, y, S)$ с небольшим числом слагаемых. Но для начала надо ввести следующее обозначение.

Обозначение 15. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $|y| \geq |x|$, $i \in \{0, \dots, |x|\}$ и $z = h(x, y)$. Тогда

$$F(x, y, i) = f(x, i, z) \prod_{j=1}^{d(y)} (g(y, j) - i).$$

Замечание 13. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $|y| \geq |x|$, $i \in \{0, \dots, |x|\}$ и $z = h(x, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} \bullet \quad d(x, y) &= \sum_{i=0}^{|x|} F(x, y, i); \\ \bullet \quad d(x, y, \Delta) &= \sum_{i=0}^{|x|} \left(F(x, y, i) \prod_{j=1}^{s(\Delta)} (e(\Delta, j) - i) \right); \end{aligned}$$

- у нас есть явная формула для $F(x, y, i)$, и в ней $O(|x|)$ слагаемых;
- на самом деле обозначение 15 нужно только для того, чтобы формула для $d(x, y, S)$ имела более лаконичный вид.

Теорема 3. Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $|y| \geq |x|$, $z = h(x, y)$, $S \in \mathbb{N}_0$ и $m(X, S) = \min\{\lfloor \frac{X}{2} \rfloor, S\}$ для любого $X \in \mathbb{N}_0$. Также считаем, что $(-1)!! = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} d(x, y, S) &= \sum_{i=0}^{|x|} \left(\left(\sum_{k=0}^{m(|x|-i, S)} \left((-1)^k \binom{|x|-i}{2k} (2k-1)!! \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times \binom{|y|-i+2S-2k}{|y|-i} (2S-2k-1)!! \right) \right) F(x, y, i) \right). \end{aligned}$$

Замечание 14. У нас есть явная формула для $d(x, y, S)$, и в ней $O(|x|^3)$ слагаемых.

Следствие 7. Пусть $x \in \mathbb{YF}$, $S \in \mathbb{N}_0$. Также считаем, что $(-1)!! = 1$. Тогда

$$d(\varepsilon, x, S) = \binom{|x| + 2S}{|x|} (2S - 1)!! \prod_{j=1}^{d(x)} g(x, j).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. M. Vershik, *Asymptotic theory of path spaces of graded graphs and its applications*. — Japan. J. Math. **11**, No. 2 (2016), 151–218.
2. F. M. Goodman, S. V. Kerov, *The Martin boundary of the Young–Fibonacci lattice*. — J. Algebraic Combin. **11**, No. 1 (2000), 17–48.
3. S. Okada, *Algebras associated to the Young–Fibonacci lattice*. — Trans. Amer. Math. Soc. **346** (1994), 549–568.
4. W. Feit, *The degree formula for the skew-representations of the symmetric group*. — Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 740–744.
5. С. В. Фомин, *Обобщенное соответствие Робинсона–Шенстеда–Кнута*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **155** (1986), 156–175.
6. S. Fomin, *Duality of graded graphs*. — J. Algebraic Combin. **3** (1994), 357–404.
7. R. P. Stanley, *Differential posets*. — J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 919–961.

Evtushevsky V. Yu. Enumeration of paths in the Young–Fibonacci graph.

The Young–Fibonacci graph is the Hasse diagram of one of the two (along with the Young lattice) 1-differential graded modular lattices. This explains the interest to path enumeration problems in this graph. We obtain a formula for the number of paths between two vertices of the Young–Fibonacci graph which is polynomial with respect to the minimum of their ranks.

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия

Поступило 17 сентября 2019 г.

E-mail: vsevolodevtushevsky@yandex.ru