

А. М. Вершик, Н. В. Цилевич

**ГРУППЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ИНВОЛЮЦИЯМИ
РОМБОВИДНЫХ ГРАФОВ, И ДЕФОРМАЦИИ
ОРТОГОНАЛЬНОЙ ФОРМЫ ЮНГА**

§1. ОСНОВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

1.1. Комбинаторные инволюции на ромбовидных графах и группа перестановок путей. Начнем с конечного ориентированного градуированного графа¹ с одним минимальным и одним максимальным элементом и предположим, что он удовлетворяет еще одному свойству, назовем его “ромбовидностью”.

Определение 1. Градуированный граф называется ромбовидным, если любой его непустой 2-интервал² содержит либо одну, либо две вершины промежуточного уровня, т.е. является либо отрезком, либо ромбом.

Ромбовидные графы возникают в следующей ситуации. Рассмотрим конечное частично упорядоченное множество P с минимальным элементом $\emptyset$ и частично упорядоченное множество $J(P)$ его порядковых идеалов (подмножеств, содержащих вместе с каждым элементом все меньшие его). Это частично упорядоченное множество идеалов будет дистрибутивной решеткой, а его диаграмма Хассе – ромбовидным графом. По известной теореме верно и обратное: всякая конечная дистрибутивная решетка является решеткой порядковых идеалов конечного частично упорядоченного множества (см., например, [6, гл. 3] или [1]). Ромбовидность – это ослабление дистрибутивности; последняя налагает некоторые условия на все интервалы (а не только 2-интервалы).

Ключевые слова: группы перестановок, градуированные графы, комбинаторные инволюции, симметрическая группа.

Поддержано грантом РФФИ 17-01-00433.

¹Относительно общей теории градуированных графов и диаграмм Браттели см., например, [8] или [4].

²Под 2-интервалом $[v, w]$ градуированного графа понимается его подграф, состоящий из двух вершин v и w уровней k и $k+2$ соответственно (при некотором k) и всех вершин уровня $k+1$, соединенных с обеими этими вершинами.

Рассмотрим произвольный $\mathbb{Z}_+$ -градуированный конечный ромбовидный граф Γ ; обозначим через Γ_n множество его вершин уровня n . Пусть $T(\Gamma)$ – множество максимальных путей графа Γ , т.е. путей, соединяющих минимальную вершину (уровня 0) и максимальную вершину (уровня n). Обозначим через $\mathfrak{S}_\Gamma$ группу всех перестановок множества $T(\Gamma)$ (очевидно, она изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_N$, где N есть общее число максимальных путей в графе).

Определение 2. Комбинаторная инволюция σ_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, – это инволюция $\sigma_i \in \mathfrak{S}_\Gamma$, которая действует следующим образом. Пусть $t = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in T(\Gamma)$, где $t_k \in \Gamma_k$. Инволюция σ_i оставляет неизменными все вершины пути t кроме t_{i+1} . Рассмотрим 2-интервал $[t_i, t_{i+2}]$ в Γ . Если это отрезок, то $\sigma_i(t) = t$. Если же это ромб с промежуточными вершинами t_{i+1}, t'_{i+1} , то

$$\sigma_i(t) = (t_0, \dots, t_i, t'_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n).$$

В силу наших предположений о графе действие инволюции σ_i корректно определено на всех путях графа.

Определение 3. Определим группу перестановок путей графа Γ как группу $G_\Gamma = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$, порожденную $n-1$ комбинаторными инволюциями $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ графа $T(\Gamma)$.

Рассмотрим $\mathbb{R}$ -векторное пространство $V(\Gamma)$ формальных линейных комбинаций максимальных путей графа. Выше мы определили не только группу G_Γ , но и ее представление в этом пространстве. Каждая инволюция σ_i действует не тождественно лишь в двумерных подпространствах, отвечающих парам путей одного ромба, расположенного на уровнях $i, i+1, i+2$.

Очевидные соотношения, которым удовлетворяют инволюции σ_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, таковы:

$$\sigma_i^2 = \text{id}, \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{при} \quad |i - j| \geq 2,$$

где id – тождественное преобразование.

Соотношения между σ_i и σ_{i+1} сложным образом зависят от графа, и в общем виде их описать затруднительно. Таким образом, группа задана как группа перестановок (т.е. подгруппа симметрической группы) указанием ее образующих. (Относительно общей теории групп перестановок см., например, [2].)

Наш основной вопрос состоит в том, как выглядит эта группа для различных графов и нет ли возможности классифицировать такие группы.

Проблема 1. В какой мере группа G_Γ характеризует граф Γ , который ее определяет? Как охарактеризовать класс графов, отвечающий изоморфным группам G_Γ ?

Рассмотрим первый простой пример. Здесь и далее через $\mathfrak{S}_n$ обозначается симметрическая группа степени n .

Теорема 1. Пусть Γ – диаграмма Хассе конечной булевой алгебры B_n с n атомами. Тогда $G_\Gamma \simeq \mathfrak{S}_n$.

Доказательство. Достаточно проверить (и это легко сделать), что в данном случае выполняются соотношения $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, которые вместе с предыдущими задают группу $\mathfrak{S}_n$. Заметим, что пути в Γ естественным образом параметризуются произвольными перестановками чисел $1, \dots, n$, и представление группы G_Γ в пространстве $V(\Gamma)$ есть регулярное представление симметрической группы $\mathfrak{S}_n$. $\square$

Менее очевидно следующее утверждение. По определению d -мерным графом Паскаля P^d , где $d \geq 2$, называется $\mathbb{Z}_+$ -градуированный граф, n -й уровень которого состоит из всех наборов $(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, для которых $k_1 + \dots + k_d = n$, и ребра соединяют вершины соседних уровней, получающиеся друг из друга изменением на 1 одной координаты. В частности, граф $P := P^2$ есть обычный граф (бесконечный треугольник) Паскаля (см., например, [7]). Для произвольной вершины $v \in P^d$ обозначим через $P^d(v)$ конечный подграф в P^d , индуцированный множеством вершин всех путей, ведущих из начальной вершины $\emptyset = (0, \dots, 0)$ в v . Будем говорить, что $P^d(v)$ – интервал графа Паскаля длины n , если v – вершина уровня n .

Теорема 2. Если Γ – произвольный интервал d -мерного графа Паскаля длины n , то $G_\Gamma = \mathfrak{S}_n$.

Доказательство. Пусть $\Gamma = P^d(v)$, где $v \in P_n^d$ – вершина уровня n . Пусть $v = (m_1, \dots, m_d)$. Тогда вершины графа $P^d(v)$ очевидным образом параметризуются всеми последовательностями вида $(a_1, \dots, a_n)$, где $a_i \in [d] = \{1, \dots, d\}$ и $\#\{i : a_i = k\} = m_k$ для любого $k = 1, \dots, d$. Нетрудно видеть, что при такой параметризации комбинаторная инволюция σ_i , $i = 1, \dots, n-1$, действует просто как транспозиция, переставляющая a_i и a_{i+1} . Но это действие совпадает с действием кокстеровских образующих $s_1, \dots, s_{n-1}$ симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ в стандартной перестановочной реализации индуцированного представления

$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{m_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{m_d}}^{\mathfrak{S}_n} \text{Id}$, где $\text{Id} = \pi_{(n)}$ – тождественное представление группы $\mathfrak{S}_n$. Отсюда следует искомое утверждение. $\square$

Заметим, что, в частности, мы описали и представление группы G_Γ , возникающее в данном случае, – это представление $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{m_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{m_d}}^{\mathfrak{S}_n} \text{Id}$ симметрической группы, индуцированное с подходящей подгруппы Юнга.

В §2 мы рассмотрим группы перестановок путей на графе Юнга. Как мы увидим, там группа G_Γ далеко не всегда изоморфна симметрической группе, и даже в тех случаях, когда это так, соответствующая симметрическая группа, в отличие от предыдущих примеров, порождается не традиционными транспозициями, а инволюциями общего вида. Видимо, в общем случае группы типа G_Γ составляют весьма специальный класс групп.

1.2. Вопросы о бесконечных группах. Очевидно, что группа, отвечающая интервалу некоторого графа, есть естественная подгруппа группы, соответствующей самому графу. Поэтому можно рассмотреть бесконечный путь в бесконечном градуированном графе (диаграмме Браттели), например в графе Юнга, и индуктивный предел групп перестановок путей, отвечающих начальным отрезкам этого пути. Возникает ряд естественных вопросов.

Проблема 2. *Как выглядит полученная бесконечная группа? Для каких пар путей соответствующие группы естественно изоморфны?*

Уже для графа Юнга $\mathbb{Y}$ (см. §2) в результате возникает серия задач, выглядящих особенно интригующе. Рассмотрим некоторый неразложимый характер бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$ и соответствующее ему представление (см., например, [4, 9]). Для почти каждого пути $T = (\lambda_0, \lambda_1, \dots)$, где $\lambda_k \in \mathbb{Y}_k$, по соответствующей мере рассмотрим группу G_T , являющуюся индуктивным пределом групп $G_{\mathbb{Y}_{\lambda_n}}$, соответствующих конечным начальным отрезкам пути. Ясно, что финитно эквивалентные пути приводят к одной и той же группе.

Проблема 3. *Изоморфны ли все эти бесконечные группы G_T для почти всех путей? Если нет, как устроено разбиение путей на классы изоморфизма соответствующих групп? Если да, изоморфна ли эта единственная, с точностью до изоморфизма, группа бесконечной симметрической группе?*

§2. ГРУППЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ КОМБИНАТОРНЫМИ ИНВОЛЮЦИЯМИ НА ГРАФЕ ЮНГА

В этом параграфе мы подробно опишем приведенную выше постановку задачи в применении к графу Юнга. Напомним, что через $\mathfrak{S}_n$ обозначается симметрическая группа степени n . Через $s_i \in \mathfrak{S}_n$ мы будем обозначать кокстеровскую образующую $s_i = (i, i+1)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Пусть $\mathbb{Y}$ – граф Юнга; n -й уровень этого графа представляет собой множество $\mathbb{Y}_n$ диаграмм Юнга с n клетками, а ребра соединяют вершины соседних уровней, большая из которых получается из меньшей добавлением одной клетки. Для данной диаграммы $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ обозначим через $\mathbb{Y}_\lambda$ конечный подграф в $\mathbb{Y}$, индуцированный множеством вершин всех путей, ведущих из начальной вершины (пустой диаграммы) в λ . Тогда множество путей в графе $\mathbb{Y}_\lambda$ отождествляется с множеством стандартных таблиц Юнга формы λ , и линейное пространство $V_\lambda := V(\mathbb{Y}_\lambda)$, натянутое на T_λ , есть пространство неприводимого представления π_λ группы $\mathfrak{S}_n$, соответствующего диаграмме λ .

Напомним, что действие кокстеровских образующих s_i в представлении π_λ в базисе Гельфанда–Цетлина, элементы которого параметризуются стандартными таблицами Юнга формы λ , задается ортогональной формой Юнга (см. §3). Но мы, в соответствии с определением 2, рассматриваем следующее *перестановочное* действие операторов $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$:

$$\sigma_i t = \begin{cases} t'_i, & \text{если } i \text{ и } i+1 \text{ лежат в различных строках} \\ & \text{и различных столбцах таблицы } t, \\ t & \text{иначе,} \end{cases}$$

где t'_i – стандартная таблица Юнга, полученная из t перестановкой элементов i и $i+1$. Заметим, что σ_1 всегда есть тождественное преобразование, поскольку элементы 1 и 2 всегда стоят либо в одной строке, либо в одном столбце.

Рассмотрим группу $G_\lambda = \langle \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ перестановок путей графа $\mathbb{Y}_\lambda$, порожденную инволюциями σ_i , $i = 2, \dots, n-1$. Наша цель – изучить группы G_λ . Очевидно, G_λ есть подгруппа полной группы перестановок множества T_λ путей в графе Юнга, ведущих в вершину λ , т.е. симметрической группы $\mathfrak{S}_{\dim \lambda}$, где $\dim \lambda$ – размерность диаграммы λ , т.е. число таких путей. В частности, G_λ заведомо конечна.

2.1. Точные результаты.

Теорема 3. Если $\lambda = (n-k, 1^k)$ — крюковая диаграмма, то группа G_λ изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Доказательство. Легко видеть, что для крюковой диаграммы $\lambda = (n-k, 1^k)$ граф $\mathbb{Y}_\lambda$ изоморфен конечному подграфу $P(v)$ графа Паскаля, где $v = (n-k-1, k)$, поэтому результат следует из теоремы 2. $\square$

В частности, как следует из теоремы 2, в этом случае в пространстве V_λ мы имеем представление $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k-1}}^{\mathfrak{S}_{n-1}} \text{Id}$ симметрической группы $G_\lambda \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$.

Теорема 4. Если $\lambda = (n-2, 2)$ при $n \geq 4$, то группа G_λ изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_{\dim \lambda}$.

Доказательство. Очевидно, группа $G_{(2,2)}$ изоморфна группе $G_{(2,1)}$, так что искомый результат для нее следует из теоремы 3; таким образом, в дальнейшем мы предполагаем, что $n \geq 5$. Обозначим $G := G_\lambda$.

Пусть T_1 и T_2 — множества стандартных таблиц Юнга формы λ , в которых элемент 2 находится в первой и второй строке соответственно. Очевидно, что $T = T_1 \cup T_2$ и T_1, T_2 инвариантны относительно σ_i при $i \geq 3$. Для $k = 1, 2$ обозначим через $\sigma_i^{(k)}$ ограничение оператора σ_i на T_k и положим $G_k = \langle \sigma_3^{(k)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(k)} \rangle$. Легко видеть, что действие операторов $\sigma_3^{(1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(1)}$ совпадает с действием кокстеровских образующих $s_1, \dots, s_{n-3}$ группы $\mathfrak{S}_{n-2}$ в представлении $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-2}} \text{Id}$, так что группа G_1 изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_{n-2}$. Аналогичным образом, действие операторов $\sigma_4^{(2)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(2)}$ совпадает с действием кокстеровских образующих $s_1, \dots, s_{n-4}$ группы $\mathfrak{S}_{n-3}$ в представлении $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}} \text{Id}$ (при этом $\sigma_3^{(2)}$, очевидно, есть тождественный оператор), поэтому группа G_2 изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_{n-3}$.

Покажем, что эти два действия независимы, в том смысле, что подгруппа $G' := \langle \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1} \rangle \subset G$ изоморфна группе $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_{n-3}$. Пусть $\tau = \sigma_3 \sigma_4 \dots \sigma_{n-1}$. Из наблюдений в предыдущем абзаце следует, что $\tau_1 := \tau|_{T_1}$ можно отождествить с циклом $(1, 2, \dots, n-2)$ в $\mathfrak{S}_{n-2}$, а $\tau_2 := \tau|_{T_2}$ можно отождествить с циклом длины $n-3$ в $\mathfrak{S}_{n-3}$. Следовательно, τ^{n-3} действует как цикл $(n-2, n-3, \dots, 1)$ на T_1 и тождественно на T_2 . Далее, σ_3 действует как транспозиция $(1, 2)$ на T_1 и тождественно на T_2 . Но хорошо известно, что перестановки $(n-2, n-3, \dots, 1)$

и $(1, 2)$ порождают симметрическую группу $\mathfrak{S}_{n-2}$. Значит, G' содержит $\mathfrak{S}_{n-2} \times \{e\}$, откуда, очевидно, следует искомое утверждение.

Остается показать, что группа $\langle G', \sigma_2 \rangle$ изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_{\dim \lambda}$. Пусть T_{11} – подмножество в T_1 , состоящее из таблиц, в которых элемент 3 находится в первой строке, а T_{12} – подмножество в T_1 , состоящее из таблиц, в которых элемент 3 находится во второй строке. Очевидно, имеется естественная биекция между T_{12} и T_2 , которая отождествляет таблицы, отличающиеся только положением элементов 2 и 3. Пусть $T_2 = \{t_1, \dots, t_k\}$ и $T_{12} = \{t'_1, \dots, t'_k\}$, где t_i и t'_i соответствуют друг другу при этой биекции, и $T_{11} = \{r_1, \dots, r_\ell\}$. Тогда, очевидно, σ_2 переставляет каждую пару вида t_i и t'_i , оставляя каждый элемент r_j на месте. Теперь, как мы уже доказали, существует перестановка $g_1 \in G'$, которая действует как цикл $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ на T_2 и тождественно на T_1 , и перестановка $g_2 \in G'$, которая действует как цикл $(r_1, r_2, \dots, r_\ell)$ на T_1 и тождественно на T_2 . Легко видеть, что перестановка $g_1 \sigma_2 g_2$ есть цикл

$$c = (t_1, t'_2, t_2, t'_3, t_3, \dots, t'_k, t_k, r_1, r_2, \dots, r_\ell, t'_1)$$

длины $\dim \lambda$. С другой стороны, существует перестановка $g_3 \in G'$, которая действует как транспозиция (r_1, r_2) на T_1 и тождественно на T_2 . Тогда $\langle c, g_3 \rangle = \mathfrak{S}_{\dim \lambda}$, что и требовалось доказать. $\square$

2.2. Результаты компьютерных вычислений для $n \leq 9$. Используя систему компьютерной алгебры *SageMath*, мы вычислили порядки групп G_λ для диаграмм λ с $n \leq 9$ клетками. Результаты этих вычислений таковы.

- Если λ – крюковая диаграмма, то группа G_λ изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_{n-1}$ (теорема 3).
- Если λ – одна из диаграмм $(4, 2^2)$, $(6, 3)$, $(4^2, 1)$, то порядок группы G_λ равен $\frac{(\dim \lambda)!}{2}$.

Гипотеза 1. В этих случаях G_λ изоморфна знакопеременной группе $A_{\dim \lambda}$.

- Если λ – одна из диаграмм $(3, 2, 1)$, $(4, 2, 1^2)$, $(3^2, 2)$, (3^3) , то порядок группы G_λ равен $2^{k-1}k!$, где $k = \frac{\dim \lambda}{2}$ – половина размерности диаграммы λ .

Гипотеза 2. В этих случаях группа G_λ изоморфна группе Кокстера D_k .

Замечание. Эта гипотеза проверена с помощью *SageMath* для диаграммы $\lambda = (3, 2, 1)$.

Гипотеза 3. Если λ – симметричная диаграмма, не являющаяся крюком, то группа G_λ изоморфна группе Кокстера D_k , где $k = \frac{\dim \lambda}{2}$.

- Во всех остальных случаях порядок группы G_λ равен $(\dim \lambda)!$, т.е. G_λ изоморфна полной симметрической группе $\mathfrak{S}_{\dim \lambda}$.

Эти примеры указывают на то, что для диаграмм Юнга определенные нами группы G_λ или являются группами Кокстера, или мало отличаются от них. В случае других графов экспериментов не проводилось и не ясно даже, в каких случаях эти группы являются, например, 2-транзитивными. Особенно интересен этот вопрос для подгрупп, отвечающих дистрибутивным решеткам, в частности для косых диаграмм Юнга.

§3. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ФОРМА ЮНГА КАК ДЕФОРМАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП $G_{\mathbb{Y}_\lambda}$

Расширим наше определение групп, действующих в пространствах V_λ , включив в него классическое построение Юнга, которое реализует неприводимые представления симметрической группы в том же пространстве V_λ , но в котором транспозициям соответствуют не перестановки путей, а двумерные вращения с отражением. Для упрощения изложения мы придадим форме Юнга комплексную формулировку.

Мы по-прежнему рассматриваем пространство $V_\lambda = V(\mathbb{Y}_\lambda)$, где λ – диаграмма Юнга с n клетками, а $\mathbb{Y}_\lambda$ – соответствующий ей подграф графа Юнга. Соответствующее неприводимое представление π_λ группы $\mathfrak{S}_n$ действует в пространстве V_λ , и Юнг определил формулы для действия кокстеровских транспозиций (см., например, современное изложение в [5] или классическое в [3]). А именно, в каждом двумерном пространстве, которое отвечает 2-интервалу типа ромба, введем структуру комплексной прямой $\mathbb{C}$. Тогда введенная выше комбинаторная инволюция превратится в преобразование $z \mapsto i\bar{z}$ (которое переставляет вещественную и мнимую оси). Инволюция же Юнга, отвечающая кокстеровской транспозиции σ_k , $k = 1, 2, \dots, n-1$, действует в каждом таком одномерном комплексном подпространстве по формуле

$$z \mapsto e^{i\alpha_\lambda(k)} \bar{z},$$

где $\alpha_\lambda(k) = \arctg \sqrt{r^2 - 1}$ и r есть l^1 -расстояние между клетками рассматриваемой таблицы, в которых стоят числа k и $k+1$ (т.н. осевое

расстояние). Если же 2-интервал есть не ромб, а отрезок, то в соответствующем одномерном вещественном пространстве инволюция действует умножением на ± 1 в зависимости от того, в одной строке или в одном столбце находятся элементы k и $k + 1$.

Мы видим, что инволюция Юнга является деформацией комбинаторной инволюции, и параметрами этой деформации служат вещественные числа $\alpha_\lambda(k)$, которые и определяют некоторую подгруппу группы унитарных матриц пространства V_λ .

Очевидно, что конечность этой группы отвечает очень специальным значениям параметров.

Проблема 4. *Для каких параметров эта группа унитарных операторов конечна? бесконечна?*

Не вполне очевиден замечательный классический факт: при юнговских значениях параметров группа канонически изоморфна симметрической группе.

Хорошо известно, что свободные группы, порожденные более чем двумя инволюциями, являются “дикими”, т.е. пространство их неприводимых комплексных представлений необозримо и не имеет естественной параметризации. Это относится не только к свободным, но и ко многим бесконечным группам, порожденным несколькими инволюциями. Но мы задаем группу вместе с ее фиксированным конечномерным представлением (не обязательно неприводимым), ассоциированным с графом. Поэтому естественно поставить следующий вопрос.

Проблема 5. *Для заданной группы указанного типа как охарактеризовать внутренним образом те представления, которые возникают при задании ее с помощью графов указанным образом?*

Авторы благодарны М. А. Всемирову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. Биркгоф, *Теория решёток*. Наука, М., 1984.
2. J. D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation Groups*. Springer, 1996.
3. G. James, A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Addison-Wesley, 1981.
4. S. V. Kerov, *Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and its Application in Analysis*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
5. A. Okounkov, A. Vershik, *A new approach to representation theory of symmetric groups*. — Selecta Math., New Series **2**, No. 4 (1996), 581–605.
6. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*, т. 1. Мир, М., 1990.

7. А. М. Вершик, *Автоморфизм Паскаля имеет непрерывный спектр*. — Функци. анализ и его прил. **45**, вып. 3 (2011), 16–33.
8. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0 -функтор*. В сб.: Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж., т. 26, 1985, сс. 3–56.
9. A. M. Vershik, S. V. Kerov, *The Grothendieck group of the infinite symmetric group and symmetric functions (with the elements of the theory of K_0 -functor of AF-algebras)*. In: A. M. Vershik, D. P. Zhelobenko (eds.), Representation of Lie Groups and Related Topics. Adv. Stud. Contemp. Math. **7**, Gordon and Breach, 1990, pp. 39–117.

Vershik A. M., Tsilevich N. V. Groups generated by involutions of diamond-shaped graphs, and deformations of Young's orthogonal form.

With an arbitrary finite graph having a special form of 2-intervals (a diamond-shaped graph) we associate a subgroup of a symmetric group and a representation of this subgroup; state a series of problems on such groups and their representations; and present results of some computer simulations. The case we are most interested in is that of the Young graph and subgroups generated by natural involutions of Young tableaux. In particular, the classical Young orthogonal form can be regarded as a deformation of our construction. We also state asymptotic problems for infinite groups.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
и С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия;
Институт проблем передачи информации,
Москва, Россия
E-mail: avershik@pdmi.ras.ru

Поступило 21 октября 2019 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
и С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: natalia@pdmi.ras.ru