

Г. А. Вепрев

**ОБ ОЦЕНКЕ АСИМПТОТИКИ ЭНТРОПИИ
ИНВАРИАНТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
РАЗБИЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО КУБА**

§1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе решается вопрос об асимптотическом поведении энтропии разбиений бесконечномерного куба, предложенный к рассмотрению А. М. Вершиком в статье [1].

Основным объектом изучения для нас будут являться измеримые разбиения, а точнее, их последовательности. Напомним несколько базовых свойств и определений теории измеримых разбиений, которые можно посмотреть, например, в [2].

Пусть (M, m) – пространство с мерой. Семейство ξ подмножеств пространства M назовём *измеримым разбиением*, если существует измеримое отображение ϕ из пространства M в отрезок $[0, 1]$ с борелевской сигма-алгеброй, такое, что ξ есть совокупность прообразов всех точек отрезка. Конечное разбиение ξ измеримо, если все его элементы измеримы.

Пусть ξ – измеримое разбиение, а x – элемент пространства M . Обозначим через $\xi(x)$ элемент разбиения ξ , содержащий x . Для двух разбиений ξ и ζ пространства M будем писать $\xi \leq \zeta$, если ζ есть подразбиение ξ . В этом случае будем говорить, что разбиение ξ *меньше* разбиения ζ . Последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ разбиений пространства M будем называть *возрастающей*, если $\xi_n \leq \xi_{n+1}$ для всех натуральных n .

Для семейства разбиений $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ обозначим символом $\bigvee_{n=1}^\infty \xi_n$ минимальное разбиение ζ , такое, что $\xi_n \leq \zeta$ для любого n , то есть минимальное общее подразбиение.

Измеримое разбиение ξ пространства M называется *разбиением на точки mod 0*, если существует такое множество $X \subseteq M$ полной меры, что $\xi(x) \neq \xi(y)$ для любых $x, y \in X$.

Ключевые слова: измеримые разбиения, асимптотика энтропий, симплексы Вейля.

Последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ измеримых разбиений множества M назовём *исчерпывающей*, если $\bigvee_{n=1}^\infty \xi_n$ есть разбиение на точки mod 0. Иначе говоря, найдётся такое подмножество X полной меры, что для любых $x, y \in X$ существует такое n , что $\xi_n(x) \neq \xi_n(y)$.

В этом случае будем говорить, что $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ *разделяет точки*, или что *проблема различимости* (см. [1]) имеет положительное решение.

Пусть $I = [0, 1]$ – единичный отрезок с мерой Лебега m . Рассмотрим в качестве основного пространства бесконечномерный куб $I^\infty = \prod_n I$, иначе говоря, пространство последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ с мерой произведения m^∞ . Символом I_n будем обозначать пространство цилиндров на первых n координатах, которое изоморфно I^n .

Рассмотрим преобразование одностороннего сдвига, т.е. эндоморфизм T пространства последовательностей: $(Tx)_i = x_{i+1}$ для $x \in I^\infty$. Отметим, что $m^\infty(T^{-1}(A)) = m^\infty(A)$ для любого измеримого подмножества A пространства I^∞ , иными словами, преобразование T сохраняет меру m^∞ .

Последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ измеримых разбиений пространства I^∞ назовём *инвариантной*, если $T^{-1}\xi_n \leq \xi_{n+1}$ для всякого $n \geq 1$. Иными словами, если $\xi_{n+1}(x) = \xi_{n+1}(y)$, то $\xi_n(T(x)) = \xi_n(T(y))$.

А. М. Вершиком был поставлен следующий вопрос.

Вопрос. Пусть возрастающая последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ измеримых разбиений пространства I^∞ инвариантна и разделяет точки, причём ξ_n есть конечное разбиение пространства I_n , $n \geq 1$. Пусть $q_n = |\xi_n|$ – количество элементов разбиения ξ_n . Верно ли, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log q_n$ бесконечен? Можно ли заменить n в знаменателе на асимптотически большую последовательность?

В работе доказано, что ответ на первый вопрос положительный, – это следствие теоремы 1. Также мы доказываем, что n в знаменателе улучшить нельзя, это следует из теоремы 3.

Напомним определение *энтропии* измеримого разбиения (см. [2]). Пусть ξ – измеримое разбиение пространства M и $C_1, C_2, \dots$ – элементы разбиения ξ , имеющие положительную меру. Положим

$$H(\xi) = \begin{cases} -\sum_k m(C_k) \log(m(C_k)), & \text{если } m\left(M \setminus \bigcup_k C_k\right) = 0; \\ +\infty, & \text{если } m\left(M \setminus \bigcup_k C_k\right) > 0. \end{cases}$$

Прежде чем перейти к формулировкам теорем, необходимо отметить следующее.

Замечание. Энтропия $H(\xi_n)$ разбиения ξ_n не превосходит $\log q_n$, поэтому нижние оценки на энтропию немедленно дают соответствующие оценки и на величину $\log q_n$. При этом условие конечности рассматриваемых разбиений можно заменить на условие конечности их энтропии, что только усиливает утверждение.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ – исчерпывающая инвариантная возрастающая последовательность измеримых разбиений пространства I^∞ . Пусть ξ_n для $n \in \mathbb{N}$ есть разбиение пространства I_n конечной энтропии. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\xi_n)}{n} = +\infty.$$

Следствие. Для конечных разбиений имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log q_n}{n} = +\infty.$$

Теорема 1 является частным случаем теоремы 2. Для её формулировки напомним определение энтропии Колмогорова–Синая. Пусть T – эндоморфизм пространства с мерой (M, m) , а ξ – измеримое разбиение конечной энтропии. Энтропией системы (M, m, T) относительно разбиения ξ называют следующую величину:

$$h(T, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \xi \right).$$

Энтропия $h(T)$ эндоморфизма T есть точная верхняя грань величины $h(T, \xi)$ по всем разбиениям ξ конечной энтропии, то есть

$$h(T) = \sup h(T, \xi).$$

Теорема 2. Пусть (M, μ) – пространство с мерой, а T – сохраняющее меру преобразование. Пусть последовательность разбиений конечной энтропии $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ инвариантна, возрастает и разделяет точки. Тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\xi_n)}{n} \geq h(T).$$

В случае пространства I^∞ энтропия сдвига равна $+\infty$, откуда следует утверждение теоремы 1.

Теорема 3. Пусть функция $t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t(n)}{n} = +\infty$. Тогда существует исчерпывающая инвариантная последовательность $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots$ разбиений пространства I^∞ , где ξ_n есть конечное разбиение пространства I_n , такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log q_n}{t(n)} = 0.$$

Иными словами, n – асимптотически точная оценка, причём и для случая разбиений конечной энтропии. Действительно, как и в следствии из теоремы 1, мгновенно получаем, что для такой последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\xi_n)}{t(n)} = 0$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Заметим, что для любых натуральных k и n , таких, что $k < n$, монотонность и инвариантность последовательности гарантируют, что

$$\xi_k^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \xi_k \leq \xi_{k+n-1}.$$

Действительно, для любого неотрицательного $i \leq n-1$ имеем

$$T^{-i} \xi_k \leq \xi_{k+i} \leq \xi_{k+n-1}.$$

Стало быть,

$$h(T, \xi_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\xi_k^n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\xi_{k+n-1}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\xi_n).$$

Однако последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ разделяет точки и возрастает, то есть $\xi_n \nearrow \varepsilon$. Так как энтропия разбиения ξ_n конечна при любом n , имеем

$$h(T, \xi_k) \nearrow h(T).$$

Таким образом,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\xi_n) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} h(T, \xi_k) = h(T).$$

Теорема доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Предъявим явную конструкцию искомой последовательности разбиений, для которой выполнено соотношение $q_n = e^{o(t(n))}$. Построим по данному бесконечному подмножеству W натуральных чисел последовательность конечных разбиений пространства I^∞ . Далее, наложив условия на множество W , получим требуемую оценку на рост величины $\frac{\log q_n}{t(n)}$. Настоящая конструкция является обобщением *симплексов Вейля*.

Пусть $W = \{A_1, A_2, \dots\}$ – бесконечное подмножество натурального ряда, где числа A_j возрастают. Обозначим

$$A^{-1}(n) = |W \cap \{1, 2, \dots, n-1\}|.$$

Рассмотрим множество пар

$$P_n = \{(i, i + A_j) \mid i, j \in \mathbb{N}, i + A_j \leq n\}.$$

Определим отношение эквивалентности на I^∞ . Будем считать элементы $x, y \in I^\infty$ эквивалентными, если для любой пары $(k, l) \in P_n$ выполнено одно из следующих двух условий:

- (i) $x_k - x_l > 0$ и $y_k - y_l > 0$;
- (ii) $x_k - x_l \leq 0$ и $y_k - y_l \leq 0$.

Пусть ξ_n – разбиение на классы эквивалентности. Иными словами, каждый элемент этого разбиения состоит из тех точек $x \in I^\infty$, для которых для всех выбранных пар (k, l) зафиксировано неравенство либо $x_k > x_l$, либо $x_k \leq x_l$.

Из построения очевидно, что ξ_n – конечное разбиение пространства I_n и все его элементы измеримы; следовательно, разбиение ξ_n измеримо. Ясно, что последовательность $\{\xi_n\}$ инвариантна и возрастает. Действительно, ведь $P_{n+1} \supseteq P_n$, то есть $\xi_{n+1} \geq \xi_n$, и $P_{n+1} \supseteq (P_n + (1, 1))$, значит, $\xi_{n+1} \geq T^{-1}\xi_n$.

Проверим, что последовательность $\{\xi_n\}$ исчерпывающая. Докажем, что для m^∞ -почти всех x имеет место соотношение

$$x_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi(x_1 > x_{1+A_j}). \quad (1)$$

При фиксированном x_1 рассмотрим последовательность случайных величин

$$f_j = \chi(x_1 > x_{1+A_j}), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Они независимы и одинаково распределены:

$$\mathbb{P}(f_j = 1) = x_1, \quad \mathbb{P}(f_j = 0) = 1 - x_1.$$

Тогда по закону больших чисел имеем соотношение (1) при фиксированном x_1 . Очевидно, множество G тех элементов $x \in I^\infty$, для которых имеет место соотношение (1), измеримо. Как мы только что показали, сечение множества G при фиксированном x_1 имеет меру 1; значит, по теореме Фубини само множество G имеет полную меру.

Аналогично, для координаты i имеем m^∞ -почти всюду равенство

$$x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi(x_i > x_{i+A_j}).$$

Так как всего координат счётное количество, все эти равенства выполнены одновременно на некотором множестве X полной меры. Предположим, что для некоторых $x, y \in X$ при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $\xi_k(x) = \xi_k(y)$. Тогда

$$x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi(x_i > x_{i+A_j}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi(y_i > y_{i+A_j}) = y_i.$$

Следовательно, $x = y$. Стало быть, $\{\xi_n\}$ – исчерпывающая последовательность.

Осталось оценить q_n – количество элементов разбиения ξ_n . Понятно, что их не больше, чем 2^{p_n} , где $p_n = |P_n|$ – количество рассмотренных пар. Ясно, что для любого $i \in \mathbb{N}$ число пар вида $(i, i + A_j)$ в множестве P_n не больше, чем количество пар вида $(1, 1 + A_j)$, а последних, очевидно, ровно $A^{-1}(n)$. Стало быть, $p_n \leq nA^{-1}(n)$. Тогда

$$\log(q_n) \leq \log(2^{nA^{-1}(n)}) = nA^{-1}(n).$$

Теперь найдём множество W , для которого $\lim \log(q_n)t(n)^{-1} = 0$. Достаточно, чтобы выполнялось следующее асимптотическое равенство:

$$|W \cap \{1, 2, \dots, n-1\}| = o\left(\frac{t(n)}{n}\right).$$

Очевидно, что такое множество W существует, так как $\frac{t(n)}{n} \rightarrow +\infty$. Построенная по W последовательность разбиений пространства I^∞ будет искомой. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Если в качестве множества W взять множество всех натуральных чисел, то получаемые разбиения ξ_n будут в точности камерами Вейля. В этом случае $\frac{\log q_n}{n} = \frac{\log n!}{n}$, что асимптотически эквивалентно $\log n$.

Если же положить W конечным, то $A^{-1}(n) \leq |W|$ и отношение $\frac{\log q_n}{n} \leq \frac{p_n}{n} \leq |W|$ ограничено. Однако построенная последовательность $\{\xi_n\}$ не будет исчерпывающей.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность А. М. Вершику за постановку вопроса и внимание к работе и П. Б. Затицкому за помощь и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. М. Вершик, *Асимптотика разбиения куба на симплексы Вейля и кодирование схемы Бернулли*. — Функц. анализ и прил. **53**, вып. 2 (2019), 11–31.
2. В. А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой*. — Успехи мат. наук **22**, вып. 5(137) (1967), 3–56.

Veprev G. A. Estimating the asymptotic behavior of the entropy of an invariant sequence of partitions of the infinite-dimensional cube.

In this paper, we solve the question, posed by A. M. Vershik, about the asymptotic behavior of the entropies of a given sequence of partitions of the infinite-dimensional cube satisfying the invariance and exhaustibility properties. On the one hand, it is proved that the entropy sequence increases faster than a linear function. On the other hand, we construct a series of examples that show that the estimate is sharp: for any given sequence increasing faster than a linear function, the entropy of a sequence of partitions can increase slower than the given sequence.

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: egor.veprev@mail.ru

Поступило 30 августа 2019 г.