Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

**Н. А. Широков**

# ВНЕШНИЕ ФУНКЦИИ В КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛАДКОСТИ

Пусть $X \subset H^1$ – какой-то класс аналитических функций, лежащий в классическом пространстве Харди $H^1$ в единичном круге $\mathbb{D}$. Достаточно естественным является вопрос об описании тех внешних функций в смысле внешне-внутренней факторизации Неванлинны, которые принадлежат классу $X$. Такое описание было получено для аналитических пространств Гёльдера, для классов аналитических функций $f$, удовлетворяющих соотношению $f^{(r)} \in H^p$, $1 < p < \infty$, $H^p$ – класс Харди [1], для аналитических классов Бесова [2] и аналогичных им классов [3]. В данной работе будет получено описание внешних функций в классах аналитических функций, на гладкость которых накладываются, вообще говоря, условия, зависящие от точки единичной окружности $\mathbb{T}$. Влияние внутреннего множителя на поведение функции ранее было получено в [4].

## 1. Определения и формулировки

Пусть положительная функция $p(\zeta)$ задана на единичной окружности $\mathbb{T}$ и с некоторой постоянной $c_0$ удовлетворяет условию

$$|p(\zeta_2) - p(\zeta_1)| \leqslant \frac{c_0}{\log \frac{e}{|\zeta_2-\zeta_1|}}, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T},$$

и $p_- = \min\limits_{\zeta \in \mathbb{T}} p(\zeta)$. Пусть, далее, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < \alpha < 1$, $p_- > \frac{1}{\alpha}$. Класс $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$ аналитических в $\mathbb{D}$ функций $f$ определяется следующим образом

---

*Ключевые слова*: внешне-внутренняя факторизация Неванлинны, внешние функции, пространства Лебега с переменным показателем.

Работа была поддержана грантом РФФИ No. 17-01-00607.

(см. [4]):

$$f \in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \sup_{0<\rho<1} \sup_{0<|\theta|<\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f^{(r)}(\rho e^{i(\lambda+\theta)}) - f^{(r)}(\rho e^{i\lambda})}{|\theta|^\alpha} \right|^{p(e^{i\lambda})} d\lambda < \infty, \qquad (1)$$
$$f^{(0)} = f.$$

Введем класс функций $L^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, определенных на $\mathbb{T}$. Прежде всего, положим для функции $g$, заданной на $\mathbb{T}$,

$$g'(e^{i\theta_0}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\theta\to\theta_0} \frac{g(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta_0})}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}} = -ie^{-i\theta_0} \frac{dg(e^{i\theta_0})}{d\theta},$$

и, далее, $g^{(n+1)}(z) = (g^{(n)}(z))'$, $z \in \mathbb{T}$. Класс $L^{\rho(\cdot)}_{r+\alpha}$ состоит из всех комплекснозначных функций $g$, для которых выполнено

$$\sup_{0<|\theta|<\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{g^{(r)}(e^{i(\lambda+\theta)}) - g^{(r)}(e^{i\theta})}{|\theta|^\alpha} \right|^{p(e^{i\lambda})} d\lambda < \infty.$$

Если комплекснозначная функция $g$, заданная на единичной окружности $\mathbb{T}$, удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{T}} \big| \log |g(z)| \big| \, |dz| < \infty, \qquad (2)$$

то через ${}_e g(z)$ обозначим внешнюю в $\mathbb{D}$ функцию, удовлетворяющую соотношению $|{}_e g(z)| = |g(z)|$ п. в. на $\mathbb{T}$, т.е.

$${}_e g(z) = \exp\Big( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \log |g(\zeta)| \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, |d\zeta| \Big), \quad z \in \mathbb{D}. \qquad (3)$$

Возможность $g(z) \geqslant 0$ при этом не исключается, $z \in \mathbb{T}$. Далее, если $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$, то $\gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta \in \mathbb{T} : |\zeta - z| \leqslant 2(1 - |z|)\}$; если $g \in C(\mathbb{T})$, то $M_g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{\zeta\in\gamma(z)} |g(\zeta)|$. Через $T_h(\zeta)$ при $\zeta \in \mathbb{T}$ обозначаем круговой сектор $T_h(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \overline{\mathbb{D}} : |\arg \frac{z}{\zeta}| \leqslant 2h\}$. Для функции $f$, принадлежащей классу $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, для $h>0$ и $\varepsilon>0$ полагаем

$$F(\zeta,h,f^{(r)},\varepsilon)\stackrel{\text{def}}{=}\sup_{z_1,z_2\in T_h(\zeta)}\frac{|f^{(r)}(z_2)-f^{(r)}(z_1)|}{h^\alpha}+\sup_{|t|\geqslant h}\frac{h^\varepsilon}{|t|^{\alpha+\varepsilon}}|f^{(r)}(\zeta e^{it})-f^{(r)}(\zeta)|,\quad \zeta\in\mathbb{T}.$$

В приведенных обозначениях справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть $f$ – внешняя в $\mathbb{D}$ функция, $f\in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, $0<\alpha<1$, $p_->\frac{1}{\alpha}$. Пусть $z\neq 0$, $z_0=\frac{z}{|z|}$, фиксировано $\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, и выполнено условие*:

$$M_f(z)\geqslant(1-|z|)^{r+\alpha}F(z_0,1-|z|,f^{(r)},\varepsilon).$$

*Тогда существует постоянная $c_f$, не зависящая от $z$ такая, что имеется оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\Big|\log\Big|\frac{f(\zeta)}{M_f(z)}\Big|\Big|\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}|d\zeta|\leqslant c_f.$$

Если функция $g$ лежит в классе $L^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, то положим

$$G(\zeta,h,g^{(r)},\varepsilon)\stackrel{\text{def}}{=}\sup_{\zeta_1,\zeta_2\in T_h(\zeta)}\frac{|g^{(r)}(\zeta_2)-g^{(r)}(\zeta_1)|}{h^\alpha}+\sup_{|t|\geqslant h}\frac{h^\varepsilon}{|t|^{\alpha+\varepsilon}}|g^{(r)}(\zeta e^{it})-g^{(r)}(\zeta)|,\quad \zeta\in\mathbb{T}.$$

**Теорема 2.** *Пусть, вообще говоря, комплекснозначная функция $g$, заданная на $\mathbb{T}$, удовлетворяет условию (2), $g\in L^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, внешняя функция ${}_eg$ построена в (3). Пусть $0<\varepsilon<1-\alpha$. Предположим, что существует постоянная $c_{g1}$, не зависящая от $z\in\mathbb{D}$, $z\neq 0$, такая, что для всякого $z$, для которого выполнена оценка*

$$M_g(z)\geqslant(1-|z|)^{r+\alpha}G\big(\frac{z}{|z|},1-|z|,g^{(r)},\varepsilon),$$

*имеется неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\Big|\log\Big|\frac{g(\zeta)}{M_g(z)}\Big|\Big|\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}|d\zeta|\leqslant c_{g1}.$$

*Тогда $f\stackrel{\text{def}}{=}{}_eg\in H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$.*

Теорема 2 влечет результат, который можно трактовать как уполовинивание гладкости внешней функции по сравнению с гладкостью ее модуля на единичной окружности в рассматриваемых классах функций.

**Теорема 3.** *Пусть* $\frac{1}{p_-} < \alpha < 1$, $\left\{\frac{r+\alpha}{2}\right\} > \frac{1}{p_-}$, *где* $\{\beta\}$ *– дробная часть* $\beta$. *Предположим, что* $g \in L^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, $\int\limits_{\mathbb{T}} \big|\log|g(\zeta)|\big||d\zeta| < \infty$, *и пусть* $f = {}_e g$. *Тогда* $f \in H^{p(\cdot)}_{\frac{r+\alpha}{2}}$.

Отметим частный случай теоремы 3 для $r = 0$. Из нее следует, что если $f \in C_A$, $f$ – внешняя функция, $|f| \in L^{p(\cdot)}_{\alpha}$, где $\frac{2}{p_-} < \alpha < 1$ (т.е. при $p_- > 2$), то $f \in H^{p(\cdot)}_{\frac{\alpha}{2}}$.

Рассмотрим также один многомерный аналог теоремы 3. Пусть $\mathbb{B}^n$ – единичный шар в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, а $S^{n-1}$ – единичная сфера. Предположим, что на $S^{n-1}$ задана положительная функция $p(z)$, удовлетворяющая соотношению $|p(z) - p(w)| \leqslant \frac{c_0}{\log \frac{e}{\|z-w\|}}$, $z, w \in S^{n-1}$.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Определим пространства $L^{p(\,\cdot\,)}_{\alpha}(S^{n-1})$ и $H^{p(\,\cdot\,)}_{\alpha}(\mathbb{B}^n)$ следующим образом:

$f \in L^{p(\cdot)}_{\alpha}(S^{n-1})$, если существует постоянная $c$, не зависящая от $\zeta \in S^{n-1}$ такая, что для любого $\zeta \in S^{n-1}$ справедлива оценка

$$\sup_{0<|\theta|<\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(\lambda e^{i\theta}\zeta) - f(\lambda\zeta)}{|\theta|^{\alpha}} \right|^{p(\lambda\zeta)} |d\lambda| \leqslant c; \tag{4}$$

$F \in H^{p(\,\cdot\,)}_{\alpha}(\mathbb{B}^n)$, если $F$ голоморфна в $\mathbb{B}^n$ и существует постоянная $c_*$, не зависящая от $\zeta \in S^{n-1}$ и такая, что для любого $\zeta \in S^{n-1}$ выполнено условие

$$\sup_{0<\rho<1} \sup_{0<|\theta|<\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \left| \frac{F(\lambda e^{i\theta}\rho\zeta) - F(\lambda\rho\zeta)}{|\theta|^{\alpha}} \right|^{p(\lambda\zeta)} |d\lambda| \leqslant c_*.$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.** *Пусть* $p_- = \min\limits_{z\in S^{n-1}} p(z) > 2$, $\frac{2}{p_-} < \alpha < 1$, *функция* $F$ *голоморфна в* $\mathbb{B}^n$ *и непрерывна в* $\overline{\mathbb{B}}^n$. *Пусть* $F(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{B}^n$, *и* $f(z) = |F(z)| \in L^{p(\cdot)}_{\alpha}(S^{n-1})$. *Тогда* $F \in H^{p(\cdot)}_{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{B}^n)$.

## 2. Доказательства

Для доказательства теорем 1 и 2 требуется описание классов $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$, эквивалентное определению (1), полученное в работе [4].

**Теорема A** (лемма 6 в [4])**.** *Условие* (1) *эквивалентно соотношению*

$$\int\limits_0^{2\pi} \big((1-\rho)^{1-\alpha}|f^{(r+1)}(\rho e^{i\lambda})|\big)^{p(e^{i\lambda})} d\lambda \leqslant c,$$

*и постоянная* $c$ *не зависит от* $\rho$, $0<\rho<1$.

Далее доказательство теоремы 1 буквально следует конструкциям доказательства теоремы 1 из [2], при этом используются аналоги максимальных теорем, применяемых в рассуждениях, для случая переменного показателя $p(\cdot)$, которые установлены в [4].

Соответственно, доказательство теоремы 2 следует за конструкциями доказательства теоремы 3 из [2]. Существенным для классов $H^{p(\cdot)}_{r+\alpha}$ оказывается случай $q=\infty$ в [2].

Наконец, теорема 3 доказывается аналогично доказательству теоремы 4 в [2].

Для установления теоремы 4 нужны новые соображения.

**Доказательство теоремы 4.** Пусть $1=\max\limits_{z\in\overline{\mathbb{B}^n}}|F(z)|$. Тогда справедливо классическое неравенство

$$\log|F(\mathbb{O})| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \log|F(\lambda\zeta)||d\lambda|,$$

что влечет оценку

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \big|\log|F(\lambda\zeta)|\big||d\lambda| \leqslant -\log|F(\mathbb{O})|, \tag{5}$$

выполняющуюся для любой $\zeta\in S^{n-1}$. Далее, условие (4), неравенство (5) и доказательство теоремы 4 в [2], которое можно повторить для переменного $p(\cdot)$ с применением аналогов максимальных теорем из [4], показывает, что существует постоянная $c_1$, не зависящая от $\zeta\in S^{n-1}$ и $\rho$, $0<\rho<1$, для которой выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big((1-\rho)^{1-\frac{\alpha}{2}}|G'_\zeta(\rho e^{i\lambda})|\big)^{p(e^{i\lambda}\zeta)} d\lambda \leqslant c_1 \tag{6}$$

для функций $G_\zeta(\lambda)$, являющихся внешним множителем в факторизации Неванлинны функций $g_\zeta(\lambda) \overset{\mathrm{def}}{=} F(\lambda\zeta)$, $\zeta \in S^{n-1}$, $\lambda \in \mathbb{T}$. Пусть $g_\zeta = G_\zeta \cdot S_\zeta$, где $S_\zeta$ – сингулярный множитель, если он присутствует. Произведения Бляшке в факторизации нет, поскольку $F(z) \neq 0$. Пусть, если $S_\zeta \not\equiv 1$,

$$S_\zeta(\lambda) = \exp\Big( - \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\tau+\lambda}{\tau-\lambda} d\mu_\zeta(\tau)\Big), \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Классическое неравенство влечет оценку при $|F(z)| \leqslant 1$

$$\log|F(\mathbb{O})| = \log g_\zeta(0) \leqslant -\mu_\zeta(\mathbb{T}), \tag{7}$$

справедливую для любого $\zeta \in S^{n-1}$. Возьмем функцию $G(\dots)$, определенную перед теоремой 2 для $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$, и положим

$$U_\zeta(\lambda, h) \overset{\mathrm{def}}{=} G(\lambda, h, |g_\zeta(\,\cdot\,)|, \varepsilon), \ \lambda \in \mathbb{T}, \ \zeta \in S^{n-1}.$$

Пусть $Z(\zeta) = g_\zeta^{-1}(0)$. Если $Z(\zeta) = \varnothing$, то $S_\zeta \equiv 1$ и $g_\zeta = G_\zeta$, тогда неравенство (6) показывает, что требуемое неравенство для соотношения $F \in H^{p(\,\cdot\,)}_{\frac{\alpha}{2}}(S^{n-1})$ при рассматриваемой точке $\zeta$ выполнено.

Пусть $Z(\zeta) \neq \varnothing$. Тогда аналог леммы 8 из [4] для пространства $L^{p(\,\cdot\,)}_\alpha$, рассматриваемого на окружности $\mathbb{T}$, дает оценку

$$|g_\zeta(\lambda)| \leqslant c_2 \operatorname{dist}^\alpha(\lambda, Z(\zeta)) U_\zeta(\lambda, \operatorname{dist}(\lambda, Z(\zeta))). \tag{8}$$

Поскольку $\operatorname{supp}\mu_\zeta \subset Z(\zeta)$, соотношение (7) влечет неравенство

$$|S'_\zeta(\lambda)| = 2 \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_\zeta(\tau)}{|\tau-\lambda|^2} \leqslant \frac{2|\log|F(\mathbb{O})||}{\operatorname{dist}^2(\lambda, Z(\zeta))}. \tag{9}$$

Учитывая свойства функции $U_\zeta(\lambda, h)$ по второму аргументу, приведенные в [4], получаем, что с некоторой постоянной $c_3$, зависящей от $c_2$ из (8), $c$ из (4) и $|F(\mathbb{O})|$, справедлива оценка

$$|g_\zeta(\lambda)| \leqslant c_3 (1/|S'_\zeta(\lambda)|)^{\frac{\alpha}{2}} U_\zeta(\lambda, 1/|S'_\zeta(\lambda)|), \quad \lambda \in \mathbb{T}, \tag{10}$$

при этом мы учли свойство (9). Соединяя соотношения (6), (8), (10) и теорему 2 из [4], получим, что существует постоянная $c_4$, не зависящая от $\zeta \in S^{n-1}$ и $\rho$ такая, что для функции $g_\zeta = G_\zeta S_\zeta$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big((1-\rho)^{1-\frac{\alpha}{2}}|g'_\zeta(\rho e^{i\lambda})|\Big)^{p(e^{i\lambda}\zeta)}\,d\lambda \leqslant c_4. \tag{11}$$

Из соотношения (11) и леммы 6 в [4] следует, что $F \in H^{p(\,\cdot\,)}_{\alpha/2}(\mathbb{B}^n)$. Теорема 4 доказана. □

## 3. Открытые вопросы

С. В. Кисляков, А. В. Васин и А. Н. Медведев [5] получили локальный результат о падении гладкости аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля на границе для классов Гёльдера в единичном круге. С. В. Кисляков поставил вопрос об аналогичном локальном результате для функций, голоморфных в шаре. Положительный ответ на этот вопрос был получен И. М. Васильевым [6]. Представляется интересным вопрос о возможных локальных результатах для пространств $H^{p(\,\cdot\,)}_\alpha$, как в теореме 3, и для пространств $H^{p(\,\cdot\,)}_\alpha(\mathbb{B}^n)$, как в теореме 4.

## Список литературы

1. N. A. Shirokov, *Analytic functions smooth up to the boundary.* — Lecture Notes in Mathematics, v. 1312, 1988, Springer Verlag; перепечатка 2013.
2. Н. А. Широков, *Внешние функции из аналитических классов О. В. Бесова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **217** (1994), 172–217.
3. N. A. Shirokov, *Outer functions in yet another class of analytic functions*, Operator Theory: Advances and Applications, **113** (2000), 349–370.
4. Н. А. Широков, *Внутренние множители аналитических функций переменной гладкости в замкнутом круге.* — Алгебра и анализ.
5. А. В. Васин, С. В. Кисляков, А. Н. Медведев, *Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля.* — Алгебра и анализ, **25**, No. 3 (2013), 52–85.
6. И. М. Васильев, *О локальной гладкости аналитической функции и ее модуля на границе шара: анонс.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **467** (2018), 30–33.

Shirokov N. A. Outer functions in classes of analytic functions of variable smoothness.

We introduce classes of analytic functions in a disc and holomorphic functions in a ball that satisfy a Hölder condition in a Lebesgue norm with variable exponent. We describe outer functions in the disc and state the

drop of the smoothness of a function in comparison with the smoothness of its modulus on the boundary in the case of the disc and the ball.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Старый Петергоф,
198504 С.-Петербург, Россия
*E-mail*: nikolai.shirokov@gmail.com

Поступило 1 июля 2019 г.