Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

Ф. А. Шамоян

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НУЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИИ ИЗ КЛАССА И. И. ПРИВАЛОВА В КРУГЕ

1. Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(\mathbb{D})$ – множество всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций, $0 < p < +\infty; \Pi_p = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup\limits_{0<r<1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\varphi})|)^p d\varphi < \infty \right\}$ – класс И. И. Привалова (см. [1], стр. 41), где

$$\ln^+ |a| = \begin{cases} \ln |a|, & |a| \geqslant 1, \\ 0, & |a| < 1. \end{cases}$$

Если $f \in H(\mathbb{D})$ и $0 < r < 1$, то

$$\mathbb{Z}_f = \{z \in \mathbb{D} : f(z) = 0\}, \quad n(r) := n(r, f) = \operatorname{card} \{z \in \mathbb{Z}_f : |z| < r\}.$$

Нетрудно заметить, что при $1 \leqslant p < +\infty$ необходимым и достаточным условием представимости множества $\mathbb{Z} = \{z_k\}$ в виде $\mathbb{Z}_f$ для некоторой нетривиальной функции $f \in \Pi_p$ является условие Бляшке:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|) < +\infty. \tag{1}$$

В то же время, как было установлено в работе [2], при $0 < p < 1$ существует нетривиальная функция $f \in \Pi_p$, такая, что $\mathbb{Z}_f = \{z_k\}_1^\infty$ для произвольного положительного ε удолетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\frac{1}{p} - \varepsilon} = +\infty,$$

т.е. условие (1) не является необходимым для представимости в виде $\mathbb{Z}_f$.

В этой заметке мы докажем следующее утверждение.

Ключевые слова: характеристика Неванлинны, L^p пространство, классы аналитических функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 17-51-15005-НЦНИ).

Теорема. *Пусть* $0 < p < 1$, $f \in \Pi_p$, $f(0) = 1$, $\mathbb{Z}_f = \{z_k\}_1^\infty$. *Тогда*

$$n(r, f) \leqslant \frac{C}{(1-r)^{\frac{1}{p}}}, \quad 0 < r < 1, \tag{2}$$

где C – некоторое положительное число, зависящее только от f.

Обратно: если $0 < p < 1$ и последовательность $\mathbb{Z} = \{z_k\}_1^\infty$ содержится в объединении конечного числа углов Штольца, то из условия

$$\int_0^1 n^p(r) dr < +\infty \tag{3}$$

следует, что можно построить фунцкию $f \in \Pi_p$, такую, что

$$f(z_k) = 0, \quad f(z) \neq 0, \quad z \neq z_k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Замечание. Основной результат заметки был изложен на региональной конференции “Современные проблемы комплексного и гармонического анализа” и без доказательства анонсирован в [3].

2. В дальнейшем нам потребуется еще несколько обозначений и определений. Для двух вещественнозначных функций f и g с общей областью определения $E \subset \mathbb{C}$, будем писать $f(\zeta) \lesssim g(\zeta), \zeta \in E$, если существует положительное число $A > 0$, такое, что $f(\zeta) \leqslant Ag(\zeta), \zeta \in E$. Символ $f(\zeta) \sim g(\zeta)$, $\zeta \in E$, означает, что одновременно выполняется: $f(\zeta) \lesssim g(\zeta), g(\zeta) \lesssim f(\zeta), \zeta \in E$. Если $z_0 \in \mathbb{D}$, $0 < \rho < 1$, то

$$K_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{D} : |z - z_0| < \rho(1 - |z_0|)\},$$
$$\widetilde{K}_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{D} : |z_0| - \rho(1 - |z_0|) \leqslant |z| \leqslant |z_0| + \rho(1 - |z_0|)\}.$$

Следующее утверждение при $0 < p < 1$ является простым следствием теоремы Харди–Литтлвуда (см. [4], стр. 143), а при $1 \leqslant p < +\infty$ сразу следует из неравенства Гёльдера и субгармоничности функции $(\ln^+ |f(z)|)^p$ в $\mathbb{D}$.

Лемма 1. *Если $f \in \Pi_p, 0 < p < +\infty$, то $\ln^+ |f(z)| \lesssim \frac{1}{(1-|z|)^{\frac{1}{p}}}, z \in \mathbb{D}$.*

Доказательство. Докажем лемму только при $0 < p < 1$. Согласно вышеуказанному замечанию,

$$(\ln^+ |f(z)|)^p \leqslant \frac{A(p)}{(1-|z|)^2} \int\limits_{K_{\frac{1}{2}}(z)} (\ln^+ |f(\zeta)|)^p dm_2(\zeta),$$

где $A(p)$ зависит только от p, m_2 – плоская мера Лебега на $\mathbb{C}$. Используя очевидное включение $K_{\frac{1}{2}}(z) \subset \widetilde{K}_{\frac{1}{2}}(z)$, получаем

$$(\ln^+|f(z)|)^p \leqslant \frac{A(p)}{(1-|z|)^2} \int\limits_{\widetilde{K}_{\frac{1}{2}}(z)} (\ln^+|f(\zeta)|)^p \, dm_2(\zeta)$$

$$= \frac{A(p)}{(1-|z|)^2} \int\limits_{|z|-\frac{1-|z|}{2}}^{|z|+\frac{1-|z|}{2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\ln^+|f(\rho e^{i\theta})|)^p \, d\theta \rho d\rho$$

$$\lesssim \frac{1}{1-|z|} \sup_{0<\rho<1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\ln^+|f(\rho e^{i\theta})|)^p \, d\theta. \qquad \square$$

Следующее произведение было введено М. М. Джрбашяном. Указанное произведение возникает естественным образом при интегральном представлении аналитической функции посредством ядра

$$K_\alpha(\zeta, z) = \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-\overline{\zeta}z)^{\alpha+2}}, \quad \zeta,\ z \in \mathbb{D}$$

(см. [5]), как появляется произведение Бляшке при выводе формулы Пуассона–Иенсена.

Лемма 2. *Бесконечное произведение*

$$\Pi_\alpha(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{z}{z_k}) \exp\left\{ -\frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \ln|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}|}{(1-\rho e^{-i\theta}z)^{\alpha+2}} \, d\theta \rho d\rho \right\},$$

$z \in \mathbb{D}$, $\alpha \geqslant -1$,

сходится равномерно внутри $\mathbb{D}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_1^\infty (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty. \tag{4}$$

Лемма 3 (см. [6], стр. 108)**.** *Если последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (4)*, то справедлива оценка*

$$\ln^+|\Pi_\alpha(z, z_k)| \lesssim \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-|z_k|^2)^{\alpha+2}}{|1-\overline{z}_k z|^{\alpha+2}}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{5}$$

Доказательство теоремы. Оценка (2) сразу следует из леммы 1 и равенства Иенсена. Действительно, по равенству Иенсена имеем

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+|f(re^{i\varphi})|)^p(\ln^+|f(re^{i\varphi})|)^{1-p}\,d\varphi.$$

Учитывая принадлежность функции f классу Π_p и лемму 1, из последней оценки выводим

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}dt \lesssim \frac{1}{(1-r)^{\frac{1}{p}-1}}, \quad r\in(0,1).$$

Поэтому

$$\int_r^{r+\frac{1-r}{2}} \frac{n(t)}{t}dt \lesssim \frac{1}{(1-r)^{\frac{1}{p}-1}}.$$

Следовательно,

$$n(r)\frac{(1-r)}{2} \lesssim \frac{1}{(1-r)^{\frac{1}{p}-1}},$$

т.е.

$$n(r) \lesssim \frac{1}{(1-r)^{\frac{1}{p}}}, \quad r\in(0,1).$$

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Сначала заметим, что условие (3) равносильно сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^k} < +\infty, \tag{6}$$

где $n_k = \operatorname{card}\left\{|z_j| : |z_j| < 1 - \frac{1}{2^k}\right\}$.

Для краткости, введем также обозначение $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 0, 1, \ldots$; $a(r,\varphi) = ((1-r)^2+\varphi^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}$, $\varphi\in[0,\pi]$, $0\leqslant r<1$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ находится в угле Штольца с вершиной в точке $z=1$, причем она расположена на радиусе (0,1).

Итак, пусть $z_k = \rho_k, k = 1, 2, \ldots; 0 < \rho_k < 1$ и выполнено условие (6). Тогда очевидно, что из сходимости ряда (6) следует, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty \tag{7}$$

для произвольного α такого, что $\alpha > \frac{1}{p} - 2$.

Таким образом, можно применить лемму 3 и получить оценку

$$\ln^+ |\Pi_\alpha(z, z_k)| \lesssim \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|z_k|}{|1-\overline{z_k}z|}\right)^{\alpha+2}. \tag{8}$$

Из этой оценки, учитывая вышеуказанные замечания, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+ |\Pi_\alpha(re^{i\varphi}, z_k)|\right)^p d\varphi \lesssim \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+2}}{|1-tre^{i\varphi}|^{\alpha+2}}dn(t)\right)^p d\varphi$$
$$\lesssim \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+2}}{a(rt,\varphi)}dn(t)\right)^p d\varphi = 2\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+2}}{a(rt,\varphi)}dn(t)\right)^p d\varphi.$$

Положим

$$I(\varphi) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+2}}{a(rt,\varphi)}\, dn(t).$$

Как было отмечено выше, α можно выбрать достаточно большим, и при этом $0 < \rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \ldots$. Тогда

$$I(\varphi) = \int_0^1 n(t)\frac{(\alpha+2)(1-t)^{\alpha+1}a(rt,\varphi) - (1-t)^{\alpha+2}ra'(rt,\varphi)}{((1-rt)^2+\varphi^2)^{\alpha+2}}\, dt$$
$$= (\alpha+2)\int_0^1 n(t)\frac{(1-t)^{\alpha+1}((1-tr)^2+\varphi^2 - r(1-t)(1-rt))}{((1-rt)^2+\varphi^2)^{\frac{\alpha+2}{2}+1}}\, dt$$
$$\lesssim \int_0^1 n(t)\frac{(1-t)^{\alpha+1}((1-tr)^2+\varphi^2)}{((1-rt)^2+\varphi^2)^{\frac{\alpha+2}{2}+1}}\, dt = \int_0^1 n(t)\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{((1-rt)^2+\varphi^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}}\, dt.$$

Из неравенства (8) окончательно получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |\Pi_\alpha(re^{i\varphi}, z_k)|\right)^p d\varphi \lesssim \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 n(t) \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{((1-rt)^2+\varphi^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}} \right)^p d\varphi. \quad (9)$$

Приступим к оценке последнего интеграла.

Сначала оценим внутренний интеграл. Используя неравенство $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$ при $0 < p \leqslant 1, a, b \geqslant 0$, имеем

$$I^p(\varphi) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{(1-t)^{\alpha+1} n(t)}{((1-rt)^2+\varphi^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}}\, dt \right)^p;$$

напомним, что $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}, k = 0, 1, \ldots$.

Теперь заметим, что

$$\left(\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{(1-t)^{\alpha+1} n(t)}{((1-rt)^2+\varphi^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}}\, dt \right)^p \lesssim \frac{n_{k+1}^p (r_{k+1}-r_k)^{(\alpha+2)p}}{((1-rr_{k+1})^2+\varphi^2)^{\frac{(\alpha+2)p}{2}}}, \quad (10)$$

где, как и прежде, $n_k = n(1-\frac{1}{2^k})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

В последнем неравенстве мы учли равенство $2(r_{k+1} - r_k) = 1 - r_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, используя оценки (8)–(10), окончательно получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |\Pi_\alpha(re^{i\varphi}, z_k)|\right)^p d\varphi \lesssim \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n_{k+1}^p}{2^{(k+1)(\alpha+2)p}} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{((1-r_{k+1}r)^2+\varphi^2)^{\frac{(\alpha+2)p}{2}}},$$

как было отмечено выше, можно предположить, что $\frac{(\alpha+2)p}{2} > 1$. Учитывая это и хорошо известную оценку интегралов последнего типа (см. [6], стр. 37):

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{((1-r_k r)^2+\varphi^2)^{\frac{(\alpha+2)p}{2}}} \lesssim \frac{1}{(1-r_k r)^{(\alpha+2)p-1}}, \quad (11)$$

из оценок (9)–(11) окончательно получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left|\Pi_\alpha(re^{i\varphi}, z_k)\right|\right)^p d\varphi \lesssim \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n_{k+1}^p}{2^{k+1}} < +\infty. \qquad \square$$

Список литературы

1. И. И. Привалов, *Граничные свойства однозначных аналитических функций*, Москва, изд. Московского университета, 1941.
2. Ф. А. Шамоян, В. А. Беднаж, О. В. Приходько, *О нулевых множествах некоторых классов аналитических в круге функций.* — Вестник БГУ, РИО БГУ No. 4 (2008), 85–96.
3. Ф. А. Шамоян, *О корневых множествах некоторых весовых классов аналитических функций.* — Современные проблемы комплексного и гармонического анализа. Материалы региональной научно-практической конференции. РИО БГУ (2014).
4. M. Pavlovic, *Introduction to function spaces on the disk.* — Mathematic Institut SANU, Belgrad, (2004), pp. 190.
5. М. М. Джрбашян, *К проблеме представимости аналитических функций.* — Сообщение института математики и механики АН Арм. ССР, **3** (1948), 3–40.
6. Ф. А. Шамоян, *Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой.* — РИО БГУ (2014), 250 стр.

Shamoyan F. A. Some properties of the zero sets of a function from Privalov's class in a disk.

Some properties of the zero set of a function from Privalov's class in the unit disk are discussed.

Саратовский
Национальный научно-исследовательский
государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского,
ул. Астраханская 83, 410012 Саратов
E-mail: shamoyanfa@yandex.ru

Поступило 26 августа 2019 г.