Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

Д. М. Столяров

МАРТИНГАЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СЛАБО СОКРАЩАЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§1. Введение

В работе [4] Ван Шафтинген охарактеризовал линейные однородные векторно-значные эллиптические дифференциальные операторы A порядка k от d переменных, для которых неравенство

$$\|\nabla^{k-1} f\|_{L_{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|Af\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}$$

выполнено для всякой гладкой функции f с компактным носителем[1]. Операторы с таким свойством называют сокращающими. Пусть $k \geqslant d$ и $l \in [1, \ldots, d-1]$ – натуральные числа. В работе [4] также показано, что оператор A сокращающий (в предположении эллиптичности) тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\|\nabla^{k-l} f\|_{L_{\frac{d}{d-l}}} \lesssim \|Af\|_{L_1}.$$

Однако в случае $l = d$ условие сокращения лишь необходимо для выполнения аналогичного неравенства. В работе [3] Раита нашёл необходимые и достаточные для выполнения неравенства

$$\|\nabla^{k-d} f\|_{L_\infty} \lesssim \|Af\|_{L_1}$$

условия на оператор A. Операторы, удовлетворяющие этим условиям, называют слабо сокращающими.

В работе [1] была предложена мартингальная интерпретация теоремы Ван Шафтингена. Оказывается, что условие сокращения имеет прямой аналог в вероятностной модели, ранее введённой в работе [2].

Ключевые слова: слабо сокращающие операторы, мартингалы, теоремы вложения Соболева.

Работа поддержана грантом РФФИ 18-31-00037 и программой социальных инвестиций "Родные города" ПАО "Газпром нефть".

[1] Запись "$X \lesssim Y$" (как, например, в неравенстве выше) обозначает существование константы C, такой что неравенство $X \leqslant CY$ выполнено для всех значений параметра. Параметр, в свою очередь, всегда легко восстанавливается из контекста.

Цель данной заметки – дать мартингальный аналог условия слабого сокращения Раиты.

Читатель может обратиться к работе [1], где более подробно изложены исторические и мотивационные аспекты, а также более подробно описаны обозначения. В разделе 4 проведено сравнение результатов заметки с результатами работ [3] и [4].

Автор благодарен Богдану Раите за привлечение внимания к рассматриваемому вопросу.

§2. Обозначения и формулировка

Пусть $m \geqslant 2$ – натуральное число, а $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_n$ есть m-равномерная фильтрация на вероятностном пространстве, то есть, фильтрация, в которой алгебра $\mathcal{F}_0$ тривиальна и каждый атом алгебры $\mathcal{F}_n$ разбивается на m атомов равной массы в алгебре $\mathcal{F}_{n+1}$. Через $\mathcal{AF}_n$ обозначим множество всех атомов алгебры $\mathcal{F}_n$. Для каждого атома $\omega \in \mathcal{AF}_n$ зафиксируем отображение

$$\mathrm{J}_\omega\colon [1,\dots,m] \to \{\omega' \in \mathcal{AF}_{n+1} \mid \omega' \subset \omega\}.$$

Таким образом, определена структура дерева на множестве всех атомов. Каждый атом набора $\mathcal{AF}_n$ соответствует последовательности n натуральных чисел интервала $[1,\dots,m]$, которые мы называем цифрами. Мы можем обобщить это соответствие и рассмотреть множество $\mathbb{T}$ бесконечных путей в дереве атомов. Каждый путь начинается с атома алгебры $\mathcal{F}_0$, после чего выбирает одного из его сыновей в алгебре $\mathcal{F}_1$, потом одного из его сыновей в алгебре $\mathcal{F}_2$, и так далее. Естественным образом устанавливается соответствие между точками множества $\mathbb{T}$, то есть, путями, и бесконечными последовательностями цифр, то есть, элементов множества $[1,\dots,m]$. На множестве $\mathbb{T}$ также есть естественная метрика. Расстояние между двумя путями γ_1 и γ_2 определим стандартной формулой

$$\mathrm{dist}(\gamma_1,\gamma_2) = m^{-d}, \quad d = \max\{n \mid \gamma_1(j) = \gamma_2(j) \text{ для всех } j < n\}. \tag{2.1}$$

Определим линейное пространство V согласно формуле

$$V = \Big\{x \in \mathbb{R}^m \;\Big|\; \sum_{j=1}^m x_j = 0\Big\}.$$

Пусть ℓ – натуральное число. Мы будем работать с $\mathbb{R}^\ell$-значными мартингалами, согласованными с фильтрацией $\mathcal{F}$. Пусть $F = \{F_n\}_n$ –

такой мартингал. Определим последовательность его мартингальных разностей:

$$f_{n+1} = F_{n+1} - F_n, \quad n \geqslant 0.$$

Зафиксируем атом $\omega \in \mathcal{AF}_n$. Отображение J_ω можно естественным образом расширить до линейного отображения, которое отождествляет элемент пространства $V \otimes \mathbb{R}^\ell$ с сужением $f_{n+1}|_\omega$ мартингальной разности (некоторого мартингала) на атом ω. Иными словами, отображение J_ω отождествляет пространство $V \otimes \mathbb{R}^\ell$ с пространством всех $\mathbb{R}^\ell$-значных $\mathcal{F}_{n+1}$-измеримых функций с нулевым средним на множестве ω. Упомянутое расширение будем также обозначать символом J_ω.

Определение 2.1. *Пусть $W \subset V \otimes \mathbb{R}^\ell$ – линейное пространство. Определим мартингальное пространство Соболева согласно правилу*

$$\mathfrak{W} = \Big\{F \text{ есть } L_1\text{-мартингал} \,\Big|\, \forall n \quad \forall \omega \in \mathcal{AF}_n \quad f_{n+1}|_\omega \in \mathrm{J}_\omega[W]\Big\}.$$

Норма в пространстве $\mathfrak{W}$ наследуется от пространства L_1.

Введём в рассмотрение мартингальный аналог потенциала Рисса:

$$\mathcal{I}_\alpha[F] = \Big\{\sum_{k=0}^{n} m^{-\alpha k} f_k\Big\}_n, \quad \alpha > 0.$$

Теорема 2.2 (Теорема 1.9 работы [1])**.** *Если пространство W не содержит ненулевых тензоров ранга один $v \otimes a$, таких что вектор v имеет $m-1$ равную координату, то*

$$\|\mathcal{I}_{\frac{p-1}{p}}[F]\|_{L_p} \lesssim \|F\|_{\mathfrak{W}}, \quad p \in (1, \infty]. \tag{2.2}$$

Замечание 2.3. *На самом деле, в этом случае верно более сильное неравенство*

$$\sum_{n \geqslant 0} m^{-\frac{p-1}{p} n} \|f_n\|_{L_p} \lesssim \|F\|_{\mathfrak{W}} \tag{2.3}$$

(*см. теорему* 1.10 *в* [1]). *Более того, отсутствие векторов упомянутого вида необходимо для выполнения неравенства* (2.2).

Оказывается, что введение ещё одного мартингального преобразования может сделать ситуацию интереснее, по крайней мере, в случае $p = \infty$. Пусть $\varphi\colon W \to V$ – линейный оператор. Когда неравенство

$$\Big\|\sum_n m^{-n} \sum_{\omega \in \mathcal{AF}_n} \mathrm{J}_\omega\Big[\varphi\big[\mathrm{J}_\omega^{-1}[f_{n+1}|_\omega]\big]\Big]\Big\|_{L_\infty} \lesssim \|F\|_{\mathfrak{W}} \tag{2.4}$$

верно[2]? Согласно неравенству (2.3) и неравенству треугольника, неравенство (2.4) верно, если W не содержит тензоров $v \otimes a$ ранга один с векторами v, имеющими $m-1$ равную координату. Удивительным образом оказывается, что неравенство (2.4) может выполняться и в других случаях. По-видимому, этот эффект присутствует лишь в случае $p = \infty$.

Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_m$ – "вредные" векторы пространства V, те, что портят наши неравенства:

$$D_j = (\underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{j-1}, m-1, -1, \ldots, -1).$$

Теорема 2.4. *Неравенство* (2.4) *выполнено в том и только том случае, когда тождество*

$$\big(\varphi[D_j \otimes a]\big)_j = 0 \tag{2.5}$$

имеет место для всякого тензора $D_j \otimes a \in W$.

Формула (2.5) обозначает, что j-я координата вектора $\varphi[D_j \otimes a] \in V$ равна нулю.

§3. Доказательство теоремы 2.4

3.1. Необходимость. Предположим противное: пусть существуют число $j \in [1, \ldots, m]$ и вектор $a \in \mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$, такие что $D_j \otimes a \in W$ и имеет место равенство

$$\big(\varphi[D_j \otimes a]\big)_j = \theta \neq 0.$$

Рассмотрим мартингал F, определённый следующим образом:

$$F_n = a \cdot m^n \chi_{\omega_n}, \quad \text{где атом } \omega_n \text{ лежит в } \mathcal{AF}_n, \quad n \geqslant 0,$$

соответствует последовательности $\{\underbrace{j, j, j \ldots, j}_{n}\}$. В таком случае,

$$f_{n+1} = \mathrm{J}_\omega[D_j \otimes a] \cdot m^n \chi_{\omega_n}.$$

Остановим наш мартингал на шаге N и подставим этот остановленный мартингал в формулу (2.4). В таком случае, сумма под знаком нормы

[2]Здесь мы допустили некоторую вольность обозначений. А именно, образом отображения J_ω формально является множество функций на атоме ω, а не на всем множестве $\mathbb{T}$. В приведённом выше неравенстве мы продолжили эту функцию нулём на оставшуюся часть вероятностного пространства.

в левой части неравенства (2.4) равняется на атоме ω_N в точности величине $N\theta$. Значит, выражение в левой части стремится к бесконечности, когда $N \to \infty$, в то время как правая часть тождественно равна единице. Итак, если $\theta \neq 0$, то неравенство (2.4) не выполнено.

3.2. Достаточность.

Лемма 3.1. *Пусть G – конечномерное линейное пространство над полем вещественных чисел, а E и F – его подпространства. Пусть ψ – некоторый линейный функционал на пространстве E, равный нулю на пространстве $E \cap F$. Существует линейный функционал Ψ на пространстве G, являющийся продолжением функционала ψ и обнуляющийся на пространстве F.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[ddrr, "\Psi"] & G/F \arrow[ddr, "(2)"] & \\
E \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[drr, "\psi"'] & E/(E\cap F) \arrow[u, hook] \arrow[dr, "(1)"] & \\
 & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}.$$

Стрелка (1) существует в силу условия $\psi|_{E\cap F} = 0$. Стрелка (2) получается из стрелки (1) применением теоремы Хана–Банаха. После чего отображение Ψ задаётся коммутативностью диаграммы. $\square$

Мы хотим продолжить оператор φ на всё пространство $V \otimes \mathbb{R}^\ell$, сохранив условие (2.5). Для этого рассмотрим координатные функционалы $\varphi_j\colon W \to \mathbb{R}$, являющиеся координатами оператора φ, и попробуем продолжить их. Рассмотрим пространства $\mathfrak{D}_j$, заданные по правилу

$$\mathfrak{D}_j = \Big\{ D_j \otimes a \;\Big|\; a \in \mathbb{R}^\ell \Big\}.$$

Формула (2.5) означает в точности $\varphi_j|_{W\cap\mathfrak{D}_j} = 0$. Применив лемму 3.1 с $G := V \otimes \mathbb{R}^\ell$, $E := W$, $F := \mathfrak{D}_j$ и φ_j в роли ψ, получим функционал $\Phi_j := \Psi$ на пространстве $V \otimes \mathbb{R}^\ell$, зануляющийся на пространстве $\mathfrak{D}_j$

и продолжающий φ_j. Соберём линейный оператор $\Phi\colon V\otimes\mathbb{R}^\ell\to\mathbb{R}^m$ из функционалов Φ_j:

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m).$$

Этот оператор продолжает оператор φ и удовлетворяет условию

$$\forall j \in [1,\dots,m] \quad \forall a \in \mathbb{R}^\ell \quad (\Phi[D_j \otimes a])_j = 0. \tag{3.1}$$

Достаточно показать априори более сильную версию неравенства (2.4): неравенство

$$\Big\| \sum_n m^{-n} \sum_{\omega\in\mathcal{AF}_n} \mathrm{J}_\omega\Big[\Phi\big[\mathrm{J}_\omega^{-1}[f_{n+1}|_\omega]\big]\Big]\Big\|_{L_\infty} \lesssim \|F\|_{L_1} \tag{3.2}$$

выполнено для всякого L_1-мартингала[3] F. Воспользуемся тем фактом, что всякий L_1-мартингал, согласованный с фильтрацией $\mathcal{F}$, имеет предельную $\mathbb{R}^\ell$-значную меру μ на пространстве $\mathbb{T}$, ограниченной вариации (мера определена на борелевской σ-алгебре множества $\mathbb{T}$, задаваемой метрикой (2.1)), связанную с ним формулой

$$F_n = \sum_{\omega\in\mathcal{AF}_n} \mu(\omega)\cdot m^n \chi_\omega. \tag{3.3}$$

Таким образом, неравенство (3.2) есть не что иное, как оценка линейного оператора, действующего из пространства мер. Достаточно проверить его равномерную ограниченность в случае, когда μ есть дельта-мера.

Пусть $j = \{j_n\}_n$ – последовательность цифр, то есть, точка множества $\mathbb{T}$, пусть $a\in\mathbb{R}^\ell$. Рассмотрим мартингал F, соответствующий мере $a\cdot\delta_j$ согласно формуле (3.3). В таком случае,

$$f_{n+1} = \mathrm{J}_{\omega_n}\Big[D_{j_{n+1}}\otimes a\Big]\cdot m^n, \qquad \text{где } \omega_n = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}.$$

Благодаря условию (3.1), носители слагаемых во внутренней сумме в формуле (3.2) дизъюнктны. Поясним это. Действительно,

$$\mathrm{J}_{\omega_n}\Big[\Phi\big[\mathrm{J}_{\omega_n}^{-1}[f_{n+1}|_{\omega_n}]\big]\Big] = \mathrm{J}_{\omega_n}\Big[\Phi(D_{j_{n+1}}\otimes a)\Big].$$

По условию (3.1), эта функция равна нулю на атоме $\{j_1, j_2, \dots, j_n, j_{n+1}\}$, внутри которого как раз и лежат носители функций f_k для всех $k > n+1$.

[3]Отметим, что мы определили отображение J_ω с областью V, а теперь применяем его к элементу пространства $\mathbb{R}^m$; конечно, эта неточность чисто формальна.

Таким образом, неравенство (3.2) следует из тривиальной оценки $\|f_{n+1}\|_{L_\infty} \lesssim m^n$.

§4. Сравнение с евклидовым случаем

Предположим, что множество $[1,\ldots,m]$ снабжено структурой абелевой группы G. Пусть группа Γ двойственна группе G. Пространства V и W можно рассматривать как пространства функций с нулевыми средними[4] на группе G. Предположим также, что пространство W инвариантно относительно действия группы G. В таком случае, существуют пространства $W_\gamma \subset \mathbb{R}^\ell$, $\gamma \in \Gamma$, такие что

$$W = \Big\{ w \in V \otimes \mathbb{R}^\ell \,\Big|\, \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} \quad \hat{w}(\gamma) \in W_\gamma \Big\}.$$

Как было показано в работе [1], условие отсутствия в пространстве W тензоров ранга один вида $v\otimes a$, таких что вектор v имеет $m-1$ равную координату, может быть переформулировано в виде

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}} W_\gamma = \{0\}.$$

Это в точности соответствует условию сокращения Ван Шафтингена из работы [4].

Предположим также, что оператор φ перестановочен со сдвигами. Это означает существование функционалов φ_γ на пространствах W_γ, $\gamma \neq 0$, таких что

$$\widehat{\varphi[w]}(\gamma) = \varphi_\gamma[\hat{w}(\gamma)], \quad \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}, \quad w \in W.$$

Выразим условие (2.5) в терминах преобразования Фурье, используя теорему Планшереля (ввиду инвариантности задачи относительно сдвигов, достаточно рассмотреть лишь случай $j = 0$):

$$\varphi[D_0\otimes a](0) = \langle \varphi[D_0 \otimes a], \delta_0\rangle = \sum_{\Gamma} \varphi[\widehat{D_0 \otimes a}](\gamma) = \sum_{\Gamma\setminus\{0\}} \varphi_\gamma[a], \ \ D_0\otimes a \in W.$$

Таким образом, условие (2.5) равносильно условию

$$\sum_{\Gamma\setminus\{0\}} \varphi_\gamma[a] = 0, \quad \forall a \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}} W_\gamma,$$

[4] Так как мы будем работать с преобразованием Фурье, читатель может пожелать перейти к комплексным скалярам. Это не влечёт никаких проблем.

что в точности соответствует условию слабого сокращения Раиты из работы [3].

Список литературы

1. R. Ayuosh, D. Stolyarov, M. Wojciechowski, *Martingale approach to Sobolev embedding theorems*, https://arxiv.org/abs/1811.08137.
2. S. Janson, *Characterizations of H^1 by singular integral transforms on martingales and R^n.* — Math. Scand. **41** (1977), 140–152.
3. B. Raita, *Critical differentiability of* $\mathrm{BV}^{\mathbb{A}}$*-maps and cancelling operators*, https://arxiv.org/pdf/1712.01251v2, принята к печати в Trans. Amer. Math. Soc.
4. J. Van Schaftingen, *Limiting Sobolev inequalities for vector fields and canceling linear differential operators.* — J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **15**, No. 3 (2013), 877–921.

Stolyarov D. M. Martingale interpretation of weakly cancelling differential operators.

We provide martingale analogs of weakly cancelling differential operators and prove a Sobolev-type embedding theorem for these operators in the martingale setting.

СПБГУ,
Факультет Математики и Компьютерных Наук,
14 линия 29б, Васильевский остров,
С.-Петербург, 199178;
С.-Петербургское Отделение
Математического Института РАН,
Фонтанка 27,
С.-Петербург 191023, Россия
E-mail: d.m.stolyarov@spbu.ru

Поступило 28 мая 2019 г.