Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

Д. В. Руцкий

ВЕЩЕСТВЕННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВ ТИПА ХАРДИ: АНОНС И НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Настоящая заметка представляет собой анонс работы [13] с некоторыми пояснениями и замечаниями, а также некий подготовительный этап к обзору, который впоследствии подытожит исследования по вещественной и комплексной интерполяции пространств типа Харди и связанным вопросам. За 20 лет со времени публикации единственного обзора на эту тему [7] произошел значительный прогресс, и некоторые важные вопросы представляются уже весьма близкими к удовлетворительному разрешению. Однако при этом нетривиальные детали соответствующих рассуждений и множество эквивалентных формулировок основных понятий, рассматривавшиеся в разные периоды исследований, значительно усложняют дело, и, по-видимому, всё ещё нуждаются в систематическом описании. Здесь мы, прежде всего, приведём имеющиеся на данный момент формулировки основных результатов, связывающих вместе K-замкнутость, BMO-регулярность и устойчивость вещественной интерполяции, и постараемся раскрыть суть происходящего, ограничиваясь при этом минимумом подробностей. Некоторые новые (по сравнению с основной статьёй [13]) результаты о BMO-регулярности слабого типа приведены в разделе 5.

§1. Вещественная интерполяция подпар

Начнём с некоторых абстрактных моментов. Можно сказать, что вещественная интерполяция подпространств – это, в общем смысле, наука о разложениях элементов какого-то пространства в суммы из заданной пары подпространств, или более общего их семейства. Наиболее востребованным свойством, по-видимому, является K-замкнутость.

Определение 1. *Пусть дана совместимая пара пространств* (X, Y). *Её подпара* (E, F) *называется* K*-замкнутой в* (X, Y) *с константой* C, *если для всякого элемента* $h \in E + F$ *и его разложения* $h = f_0 + g_0$,

Ключевые слова: пространства типа Харди, вещественная интерполяция, K-замкнутость, BMO-регулярность.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00053).

$f_0 \in X$, $g_0 \in Y$, также существует разложение $h = f + g$, $f \in E$, $g \in F$ удовлетворяющее оценкам $\|f\|_X \leqslant C\|f_0\|_X$ и $\|g\|_Y \leqslant C\|g_0\|_Y$.

Это свойство впервые было явно введено Ж. Пизье в работе [10], который заметил фактическое его присутствие в результатах П. Джонса об интерполяционных формулах для классических пространств Харди, изложенных в монографии [1], и существенно упростил, обобщил и усилил эти результаты. Подробнее про K-замкнутость и некоторые приложения к вопросам анализа см., например, статью [5]. В отличие от более слабых свойств, таких, как устойчивость вещественной интерполяции

$$(E, F)_{\theta,r} = [E + F] \cap (X, Y)_{\theta,r}, \tag{1}$$

K-замкнутость сохраняется при переходе к аннуляторам, что, например, позволяет автоматически получить K-замкнутость пары пространств Харди $(\mathrm{H}_2, \mathrm{H}_\infty)$ из K-замкнутости пары $(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$. K-замкнутость также хорошо согласуется с умножением функций. Это, например, позволяет получать K-замкнутость пары $(\mathrm{H}_p, \mathrm{H}_q)$ из K-замкнутости пары $(\mathrm{H}_{2p}, \mathrm{H}_{2q})$, сводя, таким образом, K-замкнутость на всей шкале $0 < p, q \leqslant \infty$ к тривиальному случаю $1 < p, q < \infty$.

Отметим, что по определению вещественных интерполяционных пространств соотношение (1) также является ни чем иным, как существованием некоторых разложений. В частности, непрерывное вложение

$$(E + F) \cap Z \subset (E, F)_{\theta,\infty} \tag{2}$$

для некоторого пространства Z означает, что с некоторой константой C для всякого $h \in (E + F) \cap Z$ с единичной нормой и $t > 0$ найдутся разложения $h = f + g$, $f \in E$, $g \in F$, такие, что $\|f\|_E \leqslant Ct^\theta$ и $\|g\|_F \leqslant Ct^{\theta-1}$. Вообще говоря, из устойчивости (1) не следует K-замкнутость соответствующей пары, но устойчивость интерполяции сама по себе является важным и интересным свойством, а во многих приложениях достаточно и более слабых разложений, нежели (2). Большое значение также имеет устойчивость комплексной интерполяции

$$(E, F)_\theta = [E + F] \cap (X, Y)_\theta, \tag{3}$$

поскольку многие шкалы пространств естественным образом интерполируются именно комплексным методом. К тому же, комплексная интерполяция применима к аналитическим семействам операторов. Кроме того, (1) получается из (3) по известным соотношениям между вещественным и комплексным методами. Интерес представляют также и значительно более сильные свойства подпар, такие как квазилинеаризуемость и частичная ретрактность, которыми мы в этой работе заниматься не будем.

§2. Пространства типа Харди

Как известно, классические пространства Харди H_p определяются как пространства аналитических функций F в единичном круге $\mathbb{D}$ с равномерно ограниченными нормами в L_p соответствующих значений на окружностях $F(re^{i\theta})$, $0 < r < 1$. При этом функции F в круге $\mathbb{D}$ можно отождествить с их некасательными граничными значениями, существующими почти всюду на единичной окружности $\mathbb{T}$, и в этих терминах пространства Харди H_p – это (с точностью до некоторых деталей) просто функции f из класса Лебега L_p, являющиеся некасательными граничными значениями аналитических функций в круге.

Пространства типа Харди $X_A = X \cap \mathrm{N}^+$ являются естественным обобщением классических пространств, понимаемых в смысле свойств граничных значений аналитических функций в круге, при котором пространства Лебега заменяются достаточно общими решётками измеримых функций X, и рассматриваются граничные значения N^+ функций из класса Смирнова, то есть функций F с равномерно интегрируемыми значениями $\log^+ |F(re^{i\theta})|$ на окружностях $0 < r < 1$. Они были явно введены в работе [6].

Мы рассматриваем измеримые функции на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$, где (Ω, μ) — это некоторое σ-конечное измеримое пространство, играющее роль области изменения дополнительной переменной. *Квазинормированной решёткой измеримых функций* на $\mathbb{T} \times \Omega$ называется квазинормированное пространство X с квазинормой, которая согласована с естественным порядком: если $|f| \leqslant g$ и $g \in X$, то также и $f \in X$, причём $\|f\|_X \leqslant \|g\|_X$. Это понятие естественным образом обобщает многие рассматриваемые в анализе конкретные пространства, такие, например, как весовые пространства Лебега, пространства Орлича, пространства Лоренца, пространства Лебега с переменным показателем.

Решётки измеримых функций (рассматриваемые, как правило, в нормированном случае, и с некоторыми дополнительными предположениями) появляются в литературе под разными названиями. По-видимому, наиболее распространённый в настоящий момент термин – это “банаховы функциональные пространства” (BFS, Banach Function Space), под которым они даны, например, в энциклопедии [4]. Отметим, что наиболее точным представляется термин “банаховы идеальные пространства”, поскольку именно свойство идеала $\mathrm{L}_\infty X \subset X$ в смысле поточечного умножения решёток определяет эти пространства. Тем не менее, термин “решётка” в рассматриваемых нами вопросах представляется более удобным, и в некотором смысле даже уместным, поскольку речь часто идёт о характеризации различных свойств в терминах существования некоторых мажорант, а замкнутость линейного пространства функций относительно взятия модуля эквивалентна свойству решётки (т. е. существованию точных верхних и нижних граней у конечных наборов элементов). Подробнее о решётках см., например, [15].

Дополнительная переменная позволяет естественным образом рассматривать, например, векторнозначные решётки $X = Y(l^p)$ как решётки со смешанной нормой, и определять, таким образом, в том числе и векторнозначные пространства типа Харди, которые также имеют важное значение. Для общих решёток измеримых функций X на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$ соответствующее пространство типа Харди определяется так:

$$X_A = \left\{ f \in X \mid f(\cdot, \omega) \in \mathrm{N}^+ \text{ для почти всех } \omega \in \Omega \right\}.$$

При этом, однако, основные результаты настоящей работы пока удаётся доказать лишь для дискретных пространств Ω, т. е. в случае, когда мера μ состоит из не более чем счётного множества точечных нагрузок.

Относительно рассматриваемых решёток мы всегда предполагаем полноту носителя $\operatorname{supp} X = \mathbb{T} \times \Omega$ (с точностью до множества меры 0). Также мы часто предполагаем *свойство Фату*: если $f_j \in X$, $\|f_j\|_X \leqslant 1$ и $f_j \to f$ почти всюду, то также $f \in X$ и $\|f\|_X \leqslant 1$. Для нормированных решёток X это свойство эквивалентно замкнутости единичного шара B_X относительно сходимости по мере на множествах конечной меры, и из него следует, что пространство X является банаховым. Свойство Фату очень важно для многих рассуждений с решётками.

Для работы с пространствами типа Харди важным техническим предположением является следующее свойство.

Определение 2. *Пусть X является квазинормированной решёткой измеримых функций на $\mathbb{T} \times \Omega$. Решётка X удовлетворяет свойству $(*)$ с константой C, если для всякого $f \in X$, $f \neq 0$, найдётся мажоранта $g \geqslant |f|$, такая, что $\|g\|_X \leqslant C\|f\|_X$ и $\log g(\cdot,\omega) \in \mathrm{L}_1$ для почти всех $\omega \in \Omega$.*

По существу, это свойство означает наличие достаточно полного набора внешних функций в рассматриваемых решётках: для всякой функции $f \in X$ можно взять соответствующую мажоранту g и построить внешнюю функцию $G = \exp(\log g + iH\log g)$, такую, что $|G| = g \geqslant |f|$ почти всюду на $\mathbb{T} \times \Omega$. Здесь буквой H обозначено преобразование Гильберта. С этим предположением можно дать и несколько более простое эквивалентное определение пространства типа Харди X_A как множества произведений ограниченных аналитических функций из H_∞ на внешние функции, построенные по подходящим функциям из пространства X.

Если X – нормированная решётка измеримых функций на измеримом пространстве $\mathbb{T}\times\Omega$, обладающая свойством Фату и свойством $(*)$, то соответствующее пространство типа Харди X_A является банаховым пространством (см. [16, §1.1]), причём его единичный шар замкнут относительно сходимости по мере на множествах конечной меры.

Показывается, что если пространство Ω дискретно, то с топологией равномерной сходимости на компактах в множестве $\mathbb{D}\times\Omega$ замкнутый единичный шар пространства типа Харди X_A компактен, если дополнительно предположить, что решётка X со свойством Фату и свойством $(*)$ также r-выпукла при некотором значении $r > 0$. В этом смысле пространства типа Харди полностью аналогичны классическим пространствам Харди. Этот довольно естественный факт позволяет устанавливать замкнутость отображений, которые возникают в доказательствах основных результатов. Кроме этого, с помощью него удаётся обобщить на квазинормированный случай один результат из работы [9] об эквивалентности K-замкнутости пространств типа Харди более сильному условию, при котором функция h в определении 1 берётся из множества $(X+Y)_A \supset X_A + Y_A$.

§3. BMO-регулярность

Следующее свойство для общих решёток измеримых функций было явно введено в работе [6], где с его помощью удалось охарактеризовать устойчивость комплексной интерполяции. Впрочем, для весовых и векторных пространств Лебега оно, по существу, уже устанавливалось и использовалось в эквивалентном (как впоследствии выяснилось) виде незадолго до этого в работе [8].

Определение 3. *Квазинормированная решётка X измеримых функций на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$ называется* BMO*-регулярной с константами (C, m), если для всякой ненулевой функции $f \in X$ найдётся некоторая мажоранта $u \geqslant |f|$, такая, что $\|u\|_X \leqslant m\|f\|_X$ и $\|\log u(\cdot, \omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ для почти всех $\omega \in \Omega$.*

Отметим, что этим свойством обладают, например, все перестановочно инвариантные квазибанаховы решётки, являющиеся промежуточными пространствами для пары $(\mathrm{L}_r, \mathrm{L}_\infty)$ при некотором $r > 0$ (см., например, [20, предложение 2]). В частности, BMO-регулярны все пространства Лоренца $\mathrm{L}_{p,q}$ при $0 \leqslant p, q \leqslant \infty$. С другой стороны, если решётка X BMO-регулярна, то весовая решётка $X(w)$ (определённая как множество функций $\{wf \mid f \in X\}$ с соответствующей квазинормой) BMO-регулярна тогда и только тогда, когда $\log w(\cdot, \omega) \in \mathrm{BMO}$ равномерно при почти всех $\omega \in \Omega$ (см., например, [20, предложение 5]).

Следующее естественное определение BMO-регулярности для пар решёток было дано в [7, §3.4], хотя в эквивалентном виде оно появилось в [6, §5], где с его помощью была охарактеризована устойчивость комплексной интерполяции.

Определение 4. *Пара (X, Y) квазинормированных решёток измеримых функций на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$ называется* BMO*-регулярной с константами (C, m), если для всех ненулевых функций $f \in X$ и $g \in Y$ найдутся некоторые мажоранты $u \geqslant |f|$ и $v \geqslant |g|$, такие, что $\|u\|_X \leqslant m\|f\|_X$, $\|v\|_Y \leqslant m\|g\|_Y$ и $\left\|\log \frac{u(\cdot,\omega)}{v(\cdot,\omega)}\right\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ при почти всех $\omega \in \Omega$.*

Легко видеть, что, в частности, если обе решётки X и Y BMO-регулярны, то пара (X, Y) также BMO-регулярна. Оказалось (см. [7, теорема 3.3]), что BMO-регулярность пары решёток (X, Y) достаточна и для K-замкнутости пары соответствующих пространств типа Харди (X_A, Y_A) в (X, Y), а в важном случае пар весовых пространств Лебега, так же как для устойчивости комплексной интерполяции, имеется эквивалентность между этими свойствами (см. [7, теорема 3.2]). Хотя в [16, 17, 19] были установлены некоторые важные результаты в случае пространств с дополнительной переменной, вопрос о связи между соответствующей K-замкнутостью и BMO-регулярностью в общем случае долго оставался нерешённым. К сожалению, работа автора [22] на эту тему, несмотря на исправление, содержит ошибку.

Как мы вскоре увидим, в достаточно общих случаях K-замкнутость и устойчивость вещественной интерполяции в действительности характеризуются несколько более слабым свойством, чем BMO-регулярность. Чтобы охарактеризовать его в общей ситуации, нам понадобятся некоторые естественные конструкции для решёток измеримых функций.

Для нормированной решётки измеримых функций X её порядково сопряжённая решётка X' определяется как множество измеримых функций с конечной нормой $\|g\|_{X'} = \sup_{f \in B_X} \int |fg|$. Свойство Фату эквивалентно порядковой рефлексивности $(X')' = X$. В частности, $\mathrm{L}_p' = \mathrm{L}_{p'}$ при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Для квазинормированных решёток измеримых функций X и Y поточечное произведение XY определяется как множество измеримых функций с квазинормой $\|h\|_{XY} = \inf_{h=fg} \|f\|_X \|g\|_Y$. Также мы определяем степень решётки X^δ, $\delta > 0$, как множество измеримых функций с конечной квазинормой $\|f\|_{X^\delta} = \big\||f|^{1/\delta}\big\|^\delta$. Эта конструкция иногда называется $\frac{1}{\delta}$-конвексификацией решётки X.

Если решётки X и Y являются r-выпуклыми при некотором $r > 0$, то BMO-регулярность пары (X, Y) эквивалентна BMO-регулярности решётки $(X^r)'(Y^r)$ для решёток со свойством Фату. В случае окружности это было показано в работах [9] и [19], а затем обобщено на случай пространств однородного типа в [20, теорема 8]. Отметим, что соответствующие конструкции с решётками использовались уже в работе [6], частично в неявном виде через определённые специальным образом индикаторные функции. Однако более или менее окончательный вид техника с использованием степеней и произведений решёток приобрела, по существу, именно в работе [9].

Основные результаты настоящей работы показывают, что, по крайней мере при достаточно общих предположениях, K-замкнутость и устойчивость вещественной интерполяции для пар пространств типа Харди полностью характеризуется следующим свойством.

Определение 5. *Предположим, что (X, Y) — пара квазибанаховых решёток измеримых функций на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$, причём решётка X r-выпукла при некотором значении $r > 0$. Мы говорим, что пара (X, Y) обладает* BMO*-регулярностью слабого типа, если решётка $(\mathrm{L}_1, (X^r)'Y^r)_{\theta,p}$ является* BMO*-регулярной при некоторых значениях $0 < \theta < 1$ и $0 < p \leqslant \infty$.*

Нетрудно проверить, что это свойство не зависит от конкретных величин θ и p, по крайней мере при всех достаточно малых значениях θ. Известно, что вещественные интерполяционные пространства пар BMO-регулярных решёток также BMO-регулярны. Поэтому по упомянутой выше характеризации BMO-регулярность слабого типа вытекает из обычной. Обратное неверно, как показывает следующий пример. Пусть для простоты $X = \mathrm{L}_1$, $1 \leqslant p, q_0, q_1 \leqslant \infty$, а решётка Y задана нормами пространств Лоренца L_{p,q_0} и L_{p,q_1} соответственно отдельно на верхней и на нижней полуокружности (при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$ и при $\mathrm{Re}\, z < 0$). Тогда, как легко видеть, $(\mathrm{L}_1, X'Y)_{\theta,p} = \mathrm{L}_{s,p}$ при некотором значении s, и пара (X, Y) всегда обладает BMO-регулярностью слабого типа.

BMO-регулярность слабого типа, таким образом, нечувствительна к тонким локальным различиям такого рода, и вместо полуокружностей можно даже взять любое измеримое разбиение окружности на две части. Но обычной BMO-регулярностью при $q_0 \neq q_1$ такие пары обладать уже не будут. В основной работе показывается, что если норма решётки Y задана естественным образом на полуокружностях нормами двух различных перестановочно инвариантных пространств $Y_0 \subsetneqq Y_1$ на интервале $(0, \pi)$,то она никогда не будет BMO-регулярной. Это получается из того, что по известной характеризации [20, теорема 1] эта BMO-регулярность эквивалентна ограниченности максимального оператора Харди-Литлвуда в некоторой решётке Z, связанной с Y и образованной аналогичным образом из двух различных перестановочно инвариантных решёток $Z_0 \subsetneqq Z_1$. Чтобы увидеть, что указанная ограниченность не имеет места, достаточно рассмотреть какую-либо монотонно убывающую функцию из множества $Z_1 \setminus Z_0$. Подобным образом можно построить множество новых, ранее не изучавшихся примеров пар решёток, обладающих BMO-регулярностью слабого типа, но при этом без BMO-регулярности, соответствующие пространства Харди которых K-замкнуты.

Выявить более детальные различия между этими свойствами позволила бы характеризация свойства BMO-регулярности слабого типа для конкретных интересных примеров решёток, и в настоящий момент про это известно довольно мало. В [21, §5.7] было установлено, что (с учётом результатов настоящей работы) для пар вида $\left(\mathrm{L}_\infty, \mathrm{L}_{p(\cdot)}\right)$ с пространствами Лебега с переменным показателем $p(\cdot)$ при наличии свойства K-замкнутости для соответствующей пары пространств типа Харди этот показатель не может иметь грубые разрывы, и при монотонном поведении вблизи своих особых точек должен удовлетворять логарифмическому условию Гёльдера. Если показатель удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера всюду, кроме конечного числа точек, то подобные пары будут BMO-регулярными. Осталось невыясненным, различаются ли свойства BMO-регулярности слабого типа и обычной в общем случае пространств Лебега с переменным показателем. Неясно также, например, может ли показатель иметь грубые разрывы в весовом случае.

Отметим, что сделанный выбор названия для свойства BMO-регулярности слабого типа обусловлен, прежде всего, тем, что по своей природе оно, по-видимому, тесно связано с некоторыми оценками слабого типа для операторов гармонического анализа. Некоторые результаты об этой связи приводятся далее в разделе 5. Кроме того, более простой термин “слабая BMO-регулярность” уже вводился в работе [9] для некоторого свойства, которое впоследствии оказалось эквивалентно обычной BMO-регулярности (см. [19]).

К сожалению, неясно, можно ли найти для BMO-регулярности слабого типа в общем случае какое-то более простое и естественное определение. По крайней мере, при некоторых ограничениях устанавливается (см. условия (v) и (vi) в теореме 6 ниже), что BMO-регулярность слабого типа пары (X, Y) эквивалентна обычной BMO-регулярности пар вещественных интерполяционных пространств вида $((X,Y)_{\alpha,p}, (X,Y)_{\beta,q})$ при $0 < \alpha < \beta < 1$, и для пар такого вида свойства BMO-регулярности и BMO-регулярности слабого типа совпадают. Этот результат, однако, весьма нетривиален, и получается через вещественную и комплексную интерполяцию соответствующих пространств типа Харди. Поскольку эти формулировки сами по себе чисто вещественные и не связаны напрямую с интерполяцией, желательно также получить подобную характеризацию чисто вещественным методом и для общего случая решёток на пространствах однородного типа наподобие того, как это было сделано в работе [20] для обычной BMO-регулярности.

Нетрудно установить, что для решёток со свойством Фату BMO-регулярность слабого типа для *одной пары* обладает примерно теми же основными свойствами (вроде делимости и самодвойственности), что и обычная BMO-регулярность пар решёток. Такие свойства изучались ранее (см., например, [20, §5]), и поэтому работать с BMO-регулярностью слабого типа в такой абстрактной форме, делая естественные преобразования пар решёток, ничуть не сложнее, чем с обычной BMO-регулярностью. При этом существенное отличие заключается в том, что произведение пар решёток с BMO-регулярностью слабого типа, вообще говоря, уже не будет обладать никакой BMO-регулярностью, в то время как обычная BMO-регулярность выдерживает такую операцию. Если бы это было верно хотя бы для умножения на пары решёток вида $(\mathrm{L}_p(l^p), \mathrm{L}_q(l^q))$ при каких-либо значениях $p \neq q$, или даже на пары решёток $(\mathrm{L}_\infty, \mathrm{L}_\infty(w))$ со степенными весами $w(\,\cdot\,, j) = 2^j$, $j \in \Omega = \mathbb{Z}$, то из результатов работы [19] можно было бы получить эквивалентность BMO-регулярности слабого типа и обычной.

§4. Основные результаты

Если ограничиться дискретными пространствами с дополнительной переменной Ω, то удаётся полностью охарактеризовать основные свойства вещественной интерполяции пространств типа Харди при, в остальном, довольно общих и естественных предположениях. Доказательство при этом выявляет некоторые глубокие и неожиданные свойства BMO-регулярности слабого типа. Все эти результаты можно коротко сформулировать в следующем виде. Напомним, что по одной из эквивалентных формулировок пространство Z имеет тип $\mathcal{C}_\theta(X, Y)$, $0 < \theta < 1$, для совместимой пары квазибанаховых пространств, если имеют место включения $(X, Y)_{\theta,1} \subset Z \subset (X, Y)_{\theta,\infty}$.

Теорема 6. *Предположим, что $r > 0$, дана пара (X, Y) квазинормированных r-выпуклых решёток измеримых функций со свойством Фату и свойством $(*)$ на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$ с некоторым дискретным пространством Ω, таких, что решётки $X^{1-\theta_j} Y^{\theta_j}$ банаховы при некоторых значениях $0 < \theta_0 < \theta < \theta_1 < 1$. Следующие условия эквивалентны.*

(i) *Пара* (X_A, Y_A) *устойчива относительно вещественной интерполяции* $(\cdot,\cdot)_{\theta,s}$*, т. е.* $(X_A, Y_A)_{\theta,s} = (X_A + Y_A) \cap (X, Y)_{\theta,s}$ *при некоторых (эквивалентно, при всех) значениях* $1 \leqslant s \leqslant \infty$.

(ii) *Пара* (X_A, Y_A) K*-замкнута в паре* (X, Y).

(iii) *Пара* (E_A, F_A) K*-замкнута в паре* (E, F) *для некоторых (эквивалентно, для всех) квазинормированных* r*-выпуклых решёток* E *и* F *измеримых функций* $\mathbb{T} \times \Omega$*, обладающих свойством Фату и свойством* $(*)$*, таких, что решётки* E *и* F *имеют типы* $\mathcal{C}_\alpha(X, Y)$ *и* $\mathcal{C}_\beta(X, Y)$ *соответственно при некоторых значениях* $0 \leqslant \alpha < \theta < \beta \leqslant 1$ *(эквивалентно, для всех таких пар при всех значениях* $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$*)*.

(iv) *Свойство* (iii) *выполнено для пар вида*

$$(E, F) = ((X, Y)_{\alpha,p}, (X, Y)_{\beta,q})$$

при некоторых значениях $0 < \alpha < \theta < \beta < 1$ *(эквивалентно, при всех значениях* $0 < \alpha < \beta < 1$*) и* $0 < p, q \leqslant \infty$.

(v) *Пара* $((X, Y)_{\alpha,p}, (X, Y)_{\beta,q})$ BMO*-регулярна при некоторых (эквивалентно, при всех) значениях* $0 < \alpha < \beta < 1$ *и* $0 < p, q \leqslant \infty$.

(vi) *Пара* $((X, Y)_{\alpha,p}, (X, Y)_{\beta,q})$ *обладает* BMO*-регулярностью слабого типа при некоторых (эквивалентно, при всех) значениях* $0 < \alpha < \beta < 1$ *и* $0 < p, q \leqslant \infty$.

(vii) *Пара* (E, F) *обладает* BMO*-регулярностью слабого типа для некоторых (эквивалентно, для всех) решёток* E *и* F *того же вида, что и в условии* (iii).

(viii) *Пара* (X, Y) *обладает* BMO*-регулярностью слабого типа.*

(ix) *Имеет место вложение* $\left(X^{1-\theta} Y^\theta\right)_A \subset (X_A, Y_A)_{\theta,\infty}$.

В частности, если пара (X, Y) удовлетворяет предположениям этой теоремы, то пара (X_A, Y_A) может быть устойчивой относительно вещественной интерполяции, но при этом не быть устойчивой относительно комплексной интерполяции, поскольку последнее по [6, теорема 5.12] эквивалентно BMO-регулярности пары (X, Y), по крайней мере если обе решётки банаховы и одна из них обладает нетривиальной выпуклостью. Доказательство теоремы 6 довольно сложное, и во многом основано на этой эквивалентности и на связи между вещественной и комплексной интерполяцией: устойчивость вещественной интерполяции в виде условия (i) влечёт устойчивость комплексной интерполяции для пар, которые появляются в условии (iv), и, соответственно, условие (v).

Пожалуй, наиболее неожиданным и технически сложным моментом оказался переход (iii) $\Rightarrow$ (ii). Здесь важную роль играет свойство ограниченной K-замкнутости, которое было явно введено и частично исследовано в работе [19]. Оно усиливает обычное свойство K-замкнутости для пространств типа Харди следующим образом: разложения функции h в определении 1 можно брать в виде $f = Uh$, $g = (1-U)h$ для некоторой ограниченной аналитической функции U с нормой в пространстве H_∞ не более фиксированной константы C. Теорема 6, в частности, показывает эквивалентность ограниченной K-замкнутости и обычной для рассматриваемых в ней пар пространств. В работе с помощью теоремы Пауэрса о неподвижной точке получен довольно общий результат о том, что во многих случаях устойчивость разложений в сумму аналитических функций, наподобие свойства K-замкнутости для пространств типа Харди и свойства (i) теоремы (рассматриваемое в смысле J-пространств вещественной интерполяции), можно заменить на ограниченную устойчивость в подходящем смысле. Это, в частности, позволяет переходить в свойстве (i) от пары (X, Y) банаховых решёток к парам (X^δ, Y^δ), $0 < \delta < 1$, решёток с нетривиальной выпуклостью, и применять результаты работы [6], изначально не требуя никакой дополнительной выпуклости нигде на шкале, образованной какой-то парой банаховых пространств (X, Y).

Всего в доказательстве основной части теоремы 6 теорема Пауэрса о неподвижной точке применяется в двух местах, и ещё одна теорема о неподвижной точке (Фана–Какутани) появляется в переходе (ix) $\Rightarrow$ (ii). Предположение о дискретности пространства Ω связано с тем, что без него не получилось провести соответствующие рассуждения, которые требуют некоторых топологических свойств вроде замкнутости графика и компактности для рассматриваемых отображений.

Отметим, что переход вида (ii) $\Rightarrow$ (iv) от пары к более узкой подпаре на шкале вещественных интерполяционных пространств имеет место для любых подпар (см., например, [7, лемма 1.1]). В переходе вида (iii) $\Rightarrow$ (ii) устанавливается обратное свойство для произвольных интерполяционных шкал с пространствами типа Харди, и это означает, что для данной пары решёток (X, Y) соответствующая K-замкнутость имеет место лишь одновременно для неё и для *всех* более узких пар решёток вида $(\mathcal{C}_\alpha(X, Y), \mathcal{C}_\beta(X, Y))$, $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, удовлетворяющих указанным в свойстве (iii) техническим предположениям. Для подпространств вообще, по-видимому, подобное свойство выполняется довольно редко. В частности, нетрудно привести примеры одномерных подпространств, для которых такое свойство не выполняется. Рассмотрим пару пространств Лебега $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty)$ на отрезке $[0,1]$ и подпространства, образованные какой-нибудь функцией $f \in \bigcap_{1<p<\infty} \mathrm{L}_p \setminus \mathrm{L}_\infty$, например $f(x) = \log x$. Легко видеть, что из-за вырождения на правом конце соответствующая пара подпространств не будет K-замкнута в паре $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty)$. Однако для соответствующих подпространств в паре $(\mathrm{L}_p, \mathrm{L}_q)$ при $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$ такая K-замкнутость имеет место, как и вообще в случае одномерных подпространств в паре (X, Y), образованных ненулевой функцией $f \in X \cap Y$, или даже произвольным конечным набором таких функций. Чтобы убедиться в этом, возьмём произвольное разложение $f = g_0 + h_0$, и заметим, что неравенства $\|g_0\|_X \leqslant \varepsilon \|f\|_X$ и $\|h_0\|_Y \leqslant \varepsilon \|f\|_Y$ не могут выполняться одновременно при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$, поскольку иначе мы имели бы оценку $\|f\|_{X+Y} \leqslant \|g_0\|_X + \|h_0\|_Y \leqslant \varepsilon\,(\|f\|_X + \|f\|_Y)$. Таким образом, одно из разложений $f = f + 0$, $f = 0 + f$ всегда даёт требуемую K-замкнутость.

Из перехода (iii) $\Rightarrow$ (ii) с учётом известных свойств K-замкнутости пространств типа Харди довольно легко получается достаточность BMO-регулярности слабого типа для ограниченной K-замкнутости, то есть переход (viii) $\Rightarrow$ (ii). Необходимость BMO-регулярности слабого типа для этой K-замкнутости устанавливается методами работы [22], которые не требуют предположения о дискретности пространства Ω. Эти методы удалось значительно обобщить, и проверить эту необходимость при довольно естественных предположениях, напоминающих соответствующий результат работы [6]: достаточно, чтобы обе решётки были банаховыми со свойством Фату и свойством $(*)$, и при этом одна из них обладала нетривиальной выпуклостью или нетривиальной вогнутостью.

С другой стороны, в случае $X = \mathrm{L}_\infty$ переход вида (iii) $\Rightarrow$ (ii) от ограниченной K-замкнутости пары (L_∞, F) к ограниченной K-замкнутости пары (L_∞, Y) устанавливается довольно коротким и простым рассуждением, которое также не требует предположения о дискретности пространства Ω. Отсюда можно естественным образом получить достаточность BMO-регулярности слабого типа для ограниченной K-замкнутости пространств типа Харди в случае, когда решётка $(X^r)'Y^r$ является банаховой. Это предположение, по крайней мере, включает в себя классический случай пар весовых пространств Лебега, поскольку (опуская для простоты веса)

$$\left(\mathrm{L}_p^r\right)'\mathrm{L}_q^r=\left(\mathrm{L}_{\frac{p}{r}}\right)'\mathrm{L}_q^r=\mathrm{L}_1^{1-\frac{r}{p}}\mathrm{L}_1^{\frac{r}{q}}=\mathrm{L}_1^{1-r\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)},$$

и всегда можно обеспечить банаховость этой решётки, выбирая число r достаточно малым и, возможно, изменяя порядок решёток.

Необходимость BMO-регулярности слабого типа с таким предположением, однако, в общем случае удаётся установить лишь при $r \geqslant 1$. Это связано с тем, что в отличие от свойства BMO-регулярности неясно, сохраняется ли в общем случае свойство K-замкнутости пространств типа Харди при делении пары квазибанаховых пространств на решётку (в смысле поточечного умножения), или при возведении пары в малую степень. Таким образом, мы получаем следующий результат для общего случая без предположения о дискретности пространства Ω, который, в частности, полностью решает вопрос о связи между этими двумя свойствами для пар вида (X, L_∞). Условие банаховости решётки $X'Y$, по-видимому, впервые возникло в работе [9] вместе с соответствующей техникой.

Теорема 7. *Пусть дана пара (X, Y) квазинормированных решёток измеримых функций на измеримом пространстве $\mathbb{T}\times\Omega$ со свойством Фату и свойством $(*)$. Предположим также, что либо решётка X является r-выпуклой при некотором значении $r > 0$ и $Y = \mathrm{L}_\infty$, либо все три решётки X, Y и $X'Y$ являются банаховыми. Тогда пара (X_A, Y_A) K-замкнута в паре (X, Y) в том и только в том случае когда она обладает* BMO*-регулярностью слабого типа.*

Отметим также, что условие (ix) обобщает соответствующие результаты для пар весовых пространств Лебега (см. [3, теорема 1.8], [7, теорема 3.2] и [18, теорема 1]), в которых условие вида $\log w \in \mathrm{BMO}$ впервые явно появилось в связи с вопросами интерполяции весовых пространств Харди. При этом для пар банаховых решёток и при $s = \infty$ соответствующий переход (i) $\Rightarrow$ (ii) устанавливается относительно простыми средствами (с использованием стандартной теоремы Фана–Какутани о неподвижной точке) и независимо от остального доказательства, что даёт эквивалетность этих условий, причём получается ограниченная K-замкнутость. Условие (ix) также позволяет значительно расширить набор интерполяционных функторов, для которых устойчивость интерполяции влечёт BMO-регулярность слабого типа.

А именно, если такая устойчивость при сделанных предположениях имеет место для некоторого функтора $\mathcal{F}$, такого, что $\mathcal{F}((X,Y)) \supset X^{1-\theta}Y^{\theta}$, то пара (X,Y) будет обладать BMO-регулярностью слабого типа. Интересно было бы выяснить, для каких функторов типа $\mathcal{C}_\theta(X,Y)$ имеет место подобная характеризация. Её наличие для всех таких функторов эквивалентно следующему обобщению условия (ix) теоремы: включение $\left[(X,Y)_{\theta,1}\right]_A \subset (X_A, Y_A)_{\theta,\infty}$ влечёт BMO-регулярность слабого типа для пары (X,Y).

§5. BMO-регулярность слабого типа в терминах операторов

Известно, что обычная BMO-регулярность связана с ограниченностью стандартных операторов гармонического анализа. Именно на связи между BMO-регулярностью и ограниченностью проектора Рисса $\mathbb{P}$ (или, эквивалентно, преобразования Гильберта H) основана характеризация устойчивости комплексной интерполяции [6]. Соответствующая “классическая” формулировка, впервые появившаяся в [6, предложение 5.11], выглядит следующим образом: при некоторых предположениях решётка X BMO-регулярна тогда и только тогда, когда преобразование Гильберта (действующее по первой переменной) ограничено в решётке $\mathrm{L}_2^{1-\alpha}X^{\alpha}$ при некотором значении (эквивалентно, при всех достаточно малых значениях) $0<\alpha<1$. В работе [6] это было сделано для решёток с нетривиальной вогнутостью без дополнительной переменной. Соответствущее рассуждение без затруднений проводится и в общем случае с дополнительной переменной. Для общих решёток со свойством Фату и свойством $(*)$ такая же характеризация приводится в работе [16, теорема 3] с предположением дискретности пространства Ω.

Несколько более общий результат подобного рода был получен в [20, теорема 1]: для произвольных фиксированных значений $0<\beta<1$ и банаховых решёток X измеримых функций на измеримом пространстве $S\times\Omega$ со свойством Фату, где S — пространство однородного типа, BMO-регулярность решётки X эквивалентна ограниченности максимального оператора Харди-Литлвуда M в решётке $\left(\mathrm{L}_1^{1-\alpha}X^{\alpha}\right)^{\beta}$ при некотором значении $0<\alpha<1$ (эквивалентно, при всех достаточно малых значениях $\alpha>0$). Для случая окружности (и, более обще, пространства $\mathbb{R}^n$) вместо M можно взять любой ограниченный и невырожденный в подходящем смысле оператор, такой, как, например, преобразование Гильберта (а в $\mathbb{R}^n$ можно взять любое преобразование Рисса).

Этот результат естественным образом приводит к соответствующей характеризации и для свойства BMO-регулярности слабого типа. Введем для удобства следующие свойства регулярности слабого типа для одной решётки. Появляющиеся в нём свойства регулярности с классами Макенхаупта A_p понадобятся нам чуть позднее. Понятие A_p-регулярности для одной решётки было явно введено в работе [20]. Оно получается буквальной заменой класса BMO на класс A_p в определении 3.

Определение 8. *Пусть Y – квазибанахова решётка измеримых функций на измеримом пространстве $S \times \Omega$, и пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Мы говорим, что решётка Y обладает* BMO*-регулярностью* (A_p*-регулярностью*) *слабого типа, если пара* (L_1, Y) *обладает* BMO*-регулярностью* (A_p*-регулярностью*) *слабого типа, то есть пространство* $(\mathrm{L}_1, Y)_{\theta,s}$ BMO*-регулярно* (A_p*-регулярно*) *при некоторых значениях* $0 < \theta < 1$ *и* $0 < s \leqslant \infty$.

Отметим, что так же, как и в случае двух решёток, значение s можно выбрать произвольно, если немного уменьшить параметр θ (см. [13, предложение 3.5]). Из этих определений сразу следует, что для пар квазибанаховых решёток (X, Y) их BMO-регулярность слабого типа эквивалетна определённой таким образом BMO-регулярности слабого типа решётки $(X^r)'Y^r$, если решётка X r-выпукла.

Предложение 9. *Предположим, что Y – банахова решётка измеримых функций на измеримом пространстве $S \times \Omega$, обладающая свойством Фату, и пусть $0 < \beta < 1$, $0 < s \leqslant \infty$. Решётка Y обладает* BMO*-регулярностью слабого типа тогда и только тогда, когда максимальный оператор M ограничен в пространстве* $(\mathrm{L}_1, Y)^{\beta}_{\alpha,s}$ *при некотором значении (эквивалентно, всех достаточно малых значениях) $0 < \alpha < 1$. В случае окружности $S = \mathbb{T}$ то же самое верно для преобразования Гильберта H.*

В самом деле, из ограниченности этих операторов в решётке $(\mathrm{L}_1, Y)^{\beta}_{\theta,s}$ сразу вытекает A_1-регулярность этого пространства (см., например, [20, предложение 1] и основной результат работы [23]), и, в частности, BMO-регулярность слабого типа пространства Y. В обратную сторону, если решётка Y обладает BMO-регулярностью слабого типа, то по упомянутому результату [20, теорема 1] соответствующие операторы будут ограничены в решётках $Z_\alpha = \left[\mathrm{L}_1^{1-\alpha}\left(\mathrm{L}_1, Y\right)^\alpha_{\theta,s}\right]^\beta$ при всех достаточно малых значениях $0 < \alpha < 1$. Нетрудно видеть, что эти решётки имеют тип $\mathcal{C}_{\alpha\theta}\left(\mathrm{L}_1^\beta, Y^\beta\right)$. Поэтому по теореме реитерации соответствующие операторы также будут ограничены в пространствах $(Z_{\alpha_0}, Z_{\alpha_1})_{\gamma,q} = \left(\mathrm{L}_1^\beta, Y^\beta\right)_{\alpha,q} = (\mathrm{L}_1, Y)^\beta_{\alpha,\beta q}$ при всех достаточно малых значениях α, произвольном значении $0 < q \leqslant \infty$ и подходящих значениях остальных параметров.

Таким образом, для BMO-регулярности слабого типа имеет место характеризация в терминах ограниченности операторов такого же вида, что и для обычной BMO-регулярности, всего лишь с заменой произведения Кальдерона–Лозановского $\mathrm{L}_1^{1-\alpha}Y^\alpha$, которое в рассматриваемом случае совпадает с комплексным интерполяционным пространством $(\mathrm{L}_1, Y)_\alpha$, на вещественное интерполяционное пространство $(\mathrm{L}_1, Y)_{\alpha,s}$.

Оказывается, что в двойственной форме такого рода ограниченность естественным образом связана с оценками слабого типа, которые изначально появились в классической интерполяционной теореме Марцинкевича в случае пространств Лебега. Для квазинормированной решётки измеримых функций Y мы определяем соответствующую решётку слабого типа Y_∞ через квазинорму $\|f\|_{Y_\infty} = \sup_{t>0}\left\|t\chi_{\{|f|>t\}}\right\|_Y$. Для пространств Лебега $Y = \mathrm{L}_p$ эта конструкция, разумеется, даёт пространства Марцинкевича $Y_\infty = \mathrm{L}_{p,\infty}$. Отметим, что оценки с такими пространствами Y_∞ относительно недавно изучались и для пространств Лебега с переменным показателем $Y = \mathrm{L}_{p(\cdot)}$ (см., например, [2, теорема 3.16]). Следующие результаты показывают, что решётки слабого типа непосредственно связаны с вещественной интерполяцией, а оценки слабого типа для максимального оператора тесно связаны со свойством A_p-регулярности слабого типа.

Предложение 10. *Пусть Y – квазибанахова решётка измеримых функций на некотором измеримом пространстве Ω. Тогда $Y_\infty = (\mathrm{L}_\infty, Y^r)_{\frac{1}{r},\infty}$ при всех значениях $r > 1$.*

В самом деле, обозначим для удобства $\theta = \frac{1}{r}$. Предположим, что дана функция $f \in \left(\mathrm{L}_\infty, Y^{\frac{1}{\theta}}\right)_{\theta,\infty}$ с квазинормой 1 и число $t > 0$. Тогда для всех $j \in \mathbb{Z}$ найдётся разложение $f = f_0 + f_1$, $\|f_0\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant 2^{\theta j+1}$ и $\|f_1\|_{Y^{\frac{1}{\theta}}} \leqslant$

$2^{(\theta-1)j+1}$. Выберем индекс j таким образом, чтобы выполнялось соотношение $2^{\theta j+2} \leqslant t < 2^{\theta(j+1)+2}$. Тогда из неравенства $|f(x)| > t$ в какой-то точке $x \in \Omega$ вытекает оценка $|f_1(x)| = |f(x) - f_0(x)| \geqslant |f(x)| - |f_0(x)| > t - 2^{\theta j+1} \geqslant 2^{\theta j+1}$, и, следовательно,

$$\begin{aligned}\left\|t\chi_{\{|f|>t\}}\right\|_Y &= t^{1-\theta}\left\|t\chi_{\{|f|>t\}}\right\|^{\theta}_{Y^{\frac{1}{\theta}}}\\ &< 2^{(\theta(j+1)+2)(1-\theta)}\left\|2^{\theta+1}2^{\theta j+1}\chi_{\{|f_1|>2^{\theta j+1}\}}\right\|^{\theta}_{Y^{\frac{1}{\theta}}}\\ &\leqslant 2^{(\theta(j+1)+2)(1-\theta)+\theta(\theta+1)}\|f_1\|^{\theta}_{Y^{\frac{1}{\theta}}}\\ &\leqslant 2^{(\theta(j+1)+2)(1-\theta)+\theta((\theta-1)j+1)+\theta(\theta+1)} = 2^{2+\theta},\end{aligned}$$

откуда $\|f\|_{Y_\infty} \leqslant 8$.

Проверим теперь обратное включение. Мы воспользуемся для этого хорошо известным эквивалентным определением соответствующего интерполяционного пространства через J-функционал

$$J(\alpha, g; X_0, X_1) = \|g\|_{X_0} \vee \alpha\|g\|_{X_1}.$$

Пусть дана какая-то функция $f \in Y_\infty$ с квазинормой 1. Обозначим для удобства $\lambda = \mu^\theta$ при некоторых $\mu > 1$, и определим функции $f_j = f\chi_{\{\lambda^j<|f|\leqslant\lambda^{j+1}\}}$, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда выполняется оценка

$$\begin{aligned}\|f_j\|_{Y^{\frac{1}{\theta}}} \leqslant \lambda\left\|\lambda^j\chi_{\{|f|>\lambda^j\}}\right\|_{Y^{\frac{1}{\theta}}} &= \lambda^{1+j\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}\left\|\lambda^{\frac{j}{\theta}}\chi_{\{|f|>\lambda^j\}}\right\|_{Y^{\frac{1}{\theta}}}\\ &= \lambda^{1+j\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}\left\|\lambda^j\chi_{\{|f|>\lambda^j\}}\right\|^{\frac{1}{\theta}}_{Y} \leqslant \lambda^{1+j\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \quad (4)\end{aligned}$$

Легко видеть, что ряд $\sum_{j\leqslant 0} f_j$ сходится в пространстве L_∞, а ряд $\sum_{j>0} f_j$ сходится в пространстве $Y^{\frac{1}{\theta}}$ вследствие оценки (4), если число μ выбрано достаточно большим в зависимости от значения θ и константы в неравенстве треугольника пространства $Y^{\frac{1}{\theta}}$. Также мы имеем оценку $\mu^{-\theta j}\|f_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant \mu^{-\theta j}\lambda^{j+1} = \mu^\theta$, а неравенство (4) влечёт $\mu^{(1-\theta)j}\|f_j\|_{Y^{\frac{1}{\theta}}} \leqslant \mu^{(1-\theta)j}\lambda^{j\left(1-\frac{1}{\theta}\right)+1} = \mu^\theta$, откуда следует, что

$$\bigvee_j \mu^{-\theta j} J\left(\mu^j, f_j; \mathrm{L}_\infty, Y^{\frac{1}{\theta}}\right) \leqslant \mu^\theta.$$

Таким образом, $f = \sum\limits_j f_j \in (L_\infty, Y^{\frac{1}{\theta}})_{\theta,\infty}$ с подходящей оценкой квазинормы.

Предложение 11. *Пусть дана банахова решётка Y измеримых функций на измеримом пространстве $S \times \Omega$, обладающая свойством*

Фату. Если максимальный оператор M ограниченно действует из решётки Y' в решётку Y'_∞, то он также ограничен в решётке $(\mathrm{L}_1, Y)^\beta_{\delta,1}$ при всех значениях $0 < \beta, \delta < 1$ (и, в частности, решётка Y обладает BMO*-регулярностью слабого типа). Если решётка Y обладает A_∞-регулярностью слабого типа, то максимальный оператор ограничен в пространстве ${Y'}^\alpha_\infty$ (и, в частности, он имеет слабый тип $M : {Y'}^\alpha \to {Y'}^\alpha_\infty$) при некотором достаточно малом значении $\alpha > 0$.*

Действительно, пусть в предположениях предложения 11 максимальный оператор M ограниченно действует из решётки Y' в решётку $Y'_\infty = (\mathrm{L}_\infty, {Y'}^r)_{\frac{1}{r},\infty}$, $r > 1$. Тогда, поскольку он ограничен в пространстве L_∞, он также ограничен из пространства $(\mathrm{L}_\infty, Y')_{\delta,\infty} = \Big(\mathrm{L}_\infty, {Y'}^{\frac{1}{\delta}}\Big)^\delta_{\delta,\infty} = {Y'}^\delta_\infty$ при всех значениях $0 < \delta < 1$ в это же пространство

$$\Big(\mathrm{L}_\infty, (\mathrm{L}_\infty, {Y'}^r)_{\frac{1}{r},\infty}\Big)_{\delta,\infty} = (\mathrm{L}_\infty, {Y'}^r)_{\frac{\delta}{r},\infty} = \big(\mathrm{L}_\infty, {Y'}^{\frac{r}{\delta}}\big)^\delta_{\frac{\delta}{r},\infty} = {Y'}^\delta_\infty$$

по теореме реитерации. Оно порядково сопряжено к решётке

$$(\mathrm{L}_1, Y)_{\delta,1} = \big(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_1^{1-\alpha} Y^\alpha\big)_{\frac{\delta}{\alpha},1}$$

при $\delta < \alpha < 1$ (см. доказательство [13, предложение 3.7]), поэтому по [20, предложение 4] оператор M также ограничен в решётке $(\mathrm{L}_1, Y)^\beta_{\delta,1}$ при всех значениях $0 < \beta < 1$.

Далее, пусть решётка Y обладает A_∞-регулярностью слабого типа. Это означает, что пространство $(\mathrm{L}_1, Y)_{\delta,1}$ A_p-регулярно при некоторых значениях $0 < \delta < 1$ и $1 < p < \infty$, откуда по [20, предложение 4] и с учётом приведённых выше вычислений максимальный оператор ограничен в решётке ${(\mathrm{L}_1, Y)'}^{\frac{1}{p}}_{\delta,1} = (\mathrm{L}_\infty, Y')^{\frac{1}{p}}_{\delta,\infty} = \Big(\mathrm{L}_\infty, {Y'}^{\frac{1}{\delta}}\Big)^{\frac{\delta}{p}}_{\delta,\infty} = {Y'}^\alpha_\infty$ при $\alpha = \frac{\delta}{p}$.

Отметим напоследок, что для многих классов решёток Y можно получить точную характеризацию A_1-регулярности слабого типа в терминах ограниченности максимального оператора в решётке ${Y'}^\delta_\infty$. Это будет показано в следующих работах. Некоторые вопросы, изначально возникшие в связи с K-замкнутостью пространств типа Харди на окружности и устойчивостью их интерполяции, в результате привели к развитию содержательной техники, связанной со свойством BMO-регулярности, которая нашла и продолжает находить приложения к некоторым фундаментальным вопросам вещественного гармонического анализа (см., например, [11, 12, 14, 20, 23]).

Список литературы

1. C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic Press, 1988.
2. D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces.* — Foundations and Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer Basel AG, 2013.
3. M. Cwikel, J. E. McCarthy, T. H. Wolff, *Interpolation between weighted Hardy spaces.* — Proc. Am. Math. Soc. **116**, No. 2 (1992), 381–388.
4. M. Hazewinkel (ред.). *Encyclopaedia of Mathematics: Supplement Volume II*, Springer Netherlands, 2000.
5. S. Janson, *Interpolation of subcouples and quotient couples.* — Ark. Mat., **31** (1993), 307–338.
6. N. J. Kalton, *Complex interpolation of Hardy-type subspaces.* — Math. Nachr. **171** (1995), 227–258.
7. S. V. Kisliakov, *Interpolation of H_p-spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conf. **13** (1999), 102–140.
8. S. V. Kisliakov, Quanhua Xu, *Interpolation of weighted and vector-valued Hardy spaces.* — Trans. Am. Math. Soc. **343**, No. 1 (1994), 1–34.
9. S. V. Kislyakov, *On BMO-regular couples of lattices of measurable functions.* — Stud. Math. **159**, No. 2 (2003), 277–289.
10. G. Pisier, *Interpolation between H^p spaces and noncommutative generalizations. I.* — Pacific J. Math. **155** (1992), 341–368.
11. D. V. Rutsky, *A_1-regularity and boundedness of Calderón-Zygmund operators.* — Stud. Math. **221**, No. 3 (2014), 231–247.
12. D. V. Rutsky, *Corrigendum to "A_1-regularity and boundedness of Calderón-Zygmund operators" with some remarks.* — Stud. Math. **248** (2018), 217–231.
13. D. V. Rutsky, *Real interpolation of Hardy-type spaces and BMO-regularity.* `arXiv:1811.10128`, 2018.
14. Д. В. Руцкий, *Векторнозначная ограниченность операторов гармонического анализа.* — Алгебра и анализ **28**, No. 6 (2016), 91–117.
15. Г. П. Канторович, Л. В. Акилов, *Функциональный анализ*, БХВ-Петербург, 2004.
16. С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках измеримых функций.* — Алгебра и анализ **14**, No. 2 (2002), 117–135.
17. С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках измеримых функций. II.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **303** (2003), 161–168.
18. Д. В. Руцкий, *Два замечания о связи BMO-регулярности и аналитической устойчивости интерполяции для решеток измеримых функций.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **366** (2009), 102–115.
19. Д. В. Руцкий, *Замечания о BMO-регулярности и AK-устойчивости.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **376** (2010), 116–165.
20. Д. В. Руцкий, *BMO-регулярность в решетках измеримых функций на пространствах однородного типа.* — Алгебра и Анализ **23**, No. 2 (2011), 248–295.

21. Д. В. Руцкий, *BMO-регулярность в решётках измеримых функций и интерполяция классов Харди.* дис. к. ф.-м. н., ПОМИ РАН, 2011.
22. Д. В. Руцкий, *О связи между AK-устойчивостью и BMO-регулярностью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **416** (2013), 175–187.
23. Д. В. Руцкий, *A_1-регулярность и ограниченность преобразований Рисса в банаховых решётках измеримых функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **447** (2016), 113–122.

Rutsky D. V. Real interpolation of Hardy-type spaces: an announcement with some remarks.

We consider the couples (X_A, Y_A) of Hardy-type spaces defined for quasi-Banach lattices of measurable functions on $\mathbb{T}\times\Omega$. Under certain fairly general assumptions, the following conditions are shown to be equivalent: (X_A, Y_A) is K-closed in (X, Y), this couple is stable with respect to the real interpolation in the sense that $(X_A, Y_A)_{\theta,p} = (X_A + Y_A) \cap (X, Y)_{\theta,p}$, the inclusion $\left(X^{1-\theta} Y^{\theta}\right)_A \subset (X_A, Y_A)_{\theta,\infty}$ holds true, and the lattices $\left(\mathrm{L}_1, (X^r)' Y^r\right)_{\delta,q}$ are BMO-regular for some values of the parameters. The last property is weaker than the BMO-regularity of (X, Y), and it requires further study. Some new (compared to the main article) results are given concerning the characterization of this property in terms of the boundedness of the standard harmonic analysis operators such as the Hilbert transform and the Hardy-Littlewood maximal operator.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, С.-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: rutsky@pdmi.ras.ru

Поступило 3 сентября 2019 г.