Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин

ОПЕРАТОРНЫЕ СИНУС-ФУНКЦИИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРЫ

Во второй половине прошлого века бурное развитие получили методы сильно непрерывных операторных косинус-функций (см. обзоры [1, 8], а также работы [4–6, 9, 10]) при исследовании корректной разрешимости задачи Коши для уравнения

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t), \qquad t \in [0,T] \subset \mathbb{R}^+ = [0,\infty), \tag{0.1}$$

где A – линейный оператор с плотной в комплексном банаховом пространстве E областью определения $D(A)$.

Рассматриваются две постановки такой задачи:

1) в постановке Г. О. Фатторини [11, 12] (задача типа ω) (см. также [2, стр. 176]);

2) в постановке С. Г. Крейна [7, стр. 291] (задача с условием B).

В случае 1) задача Коши типа ω ставится для уравнения (0.1), решением которого называется функция $u(t) \in D(A)$, $t \in [0,T]$, дважды непрерывно дифференцируемая при $t \in [0,T]$ и удовлетворяющая уравнению (0.1).

Задача Коши для уравнения (0.1) называется корректной типа ω на $\mathbb{R}^+$ или $\mathbb{R}$, где $\omega \in \mathbb{R}$, если выполняются следующие условия:

а) существует плотное подмножество $D \subset D(A)$ такое, что для любых $u_0, u_1 \in D$ найдется единственное решение $u(t)$ уравнения (0.1), удовлетворяющее условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1; \tag{0.2}$$

б) для каждого решения, такого как в а), справедливо неравенство

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \ln \|u(t)\| \leqslant \omega; \tag{0.3}$$

Ключевые слова: сильно-непрерывная полугруппа, генератор, косинус-функции, синус-функции, экспоненциальные тригонометрические пары.

в) если $\{u_n(t)\}$ – последовательность решений задачи (0.1)–(0.2) при $u_0 = u_1 = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = 0$ и сходимость равномерная по t на ограниченных подмножествах в $\mathbb{R}^+$ или $\mathbb{R}$. М. Сове принадлежит следующий результат (теорема корректности; см. [2, стр. 176]).

Задача Коши (0.1)–(0.2) корректна тогда и только тогда, когда A порождает сильно непрерывную операторную косинус-функцию $C(t)$ со свойствами

1) $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s), \quad t, s \in \mathbb{R}$;

2) $C(0) = I$;

3) $\lim\limits_{t\to 0} \|C(t)\varphi - \varphi\| = 0$, для всех $\varphi \in E$.

В этом случае

$$\left.\frac{d^2C(t)}{dt^2}\right|_{t=0} \varphi = A\varphi, \quad \varphi \in D(A), \tag{0.4}$$

и решение имеет вид

$$u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1, \tag{0.5}$$

где

$$S(t)u_1 = \int\limits_0^t C(s)u_1 ds \tag{0.6}$$

– ассоциированный с $C(t)$ синус.

По С. Г. Крейну, уравнение (0.1) рассматривается в виде

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = B^2u(t), \tag{0.7}$$

где B – неограниченный линейный оператор с плотной в E областью определения $D(B)$, имеющий регулярные точки.

Решением уравнения (0.7) называется функция $u(t)$ со значениями в $D(B^2)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению (0.7) на отрезке $[0, T]$.

Для постановки задачи Коши накладывается еще одно условие на решение.

Условие B) $u'(t)$ принимает значения из $D(B)$ и функция $Bu(t)$ непрерывна на $[0, T]$.

Под задачей Коши для уравнения (0.7) понимают задачу о нахождении решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u'_0, \tag{0.8}$$

$$u_0 \in D(B^2), \qquad u'_0 \in D(B) \bigcap \mathfrak{R}(B). \tag{0.9}$$

Утверждение 0.1. ([7, стр. 295]). *Для того чтобы для уравнения* (0.7) *задача Коши имела единственное решение, удовлетворяющее условию* B)*, необходимо и достаточно, чтобы операторы B и $-B$ были производящими операторами сильно непрерывных полугрупп $U(t, B)$ и $U(t, -B)$.*

Заметим, что здесь непрерывная зависимость от u_0 не утверждается, однако в [7, стр. 295] показано, что она имеет место, если существует ограниченный обратный оператор B^{-1}.

В настоящей работе утверждается, что требование ограниченности оператора B^{-1} можно снять. При этом указывается связь корректной разрешимости задачи Коши, поставленной по С. Г. Крейну (0.7)–(0.8), с операторной синус-функцией $Sh(t)$, введенной в [3] и удовлетворяющей функциональному соотношению

$$Sh(t+s) + Sh(t-s) = 2[I + 2Sh^2(\frac{t}{2})]Sh(s)$$

с производящим оператором $Sh''(0)$.

§1. Необходимые понятия

Следующие понятия и факты можно найти в [2, 7].

Пусть E – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$.

C_0 *– полугруппы*

$U(t, A)$ – сильно непрерывная полугруппа линейных преобразований (C_0 – полугруппа) с производящим оператором (генератором A).

Это означает, что справедливы соотношения:

(1) $U(t, A)U(s, A) = U(t+s, A)$, для всех $t, s \geqslant 0$;

(2) $U(0, A) = I$ – тождественный в E оператор;

(3) $\lim\limits_{t\to 0+} \|U(t, A)\varphi - \varphi\| = 0$ для всех $\varphi \in E$ и справедливо равенство

$$\lim_{t\to 0+} \frac{U(t, A)\varphi - \varphi}{t} = U'(0, A)\varphi = A\varphi.$$

$D(A)$ – область определения оператора A – плотна в E.

Далее,

$$\omega(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|U(t,A)\| = \inf_{t\to 0} \frac{1}{t} \|U(t,A)\| < \infty$$

– тип полугруппы $U(t,A)$.

Для каждого $\delta > \omega(A)$ справедлива оценка

$$\|U(t,A)\| \leqslant M_\delta \cdot \exp(\delta t). \tag{1.1}$$

(C_0) – *группа*

(C_0) – группой на E называется семейство ограниченных операторов $T = \{T(t):\ t \in \mathbb{R} = (-\infty,\infty)\}$, удовлетворяющее условиям (1)–(3), в которых $\mathbb{R}^+$ заменяется на $\mathbb{R}$, при этом предел при $t \to 0+$ заменяется на $t \to 0$.

Замечание. Оператор A является генератором (C_0) – группы тогда и только тогда, когда $\pm A$ порождают (C_0) – полугруппы $U_\pm(t)$. В этом случае

$$T(t) = \begin{cases} U_+(t,A), & t \geqslant 0 \\ U_-(-t,-A), & t \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Сильно непрерывная косинус-функция (КОФ) в E определяется как семейство линейных ограниченных операторов $C(t)$ со следующими свойствами:

(i) $C(t+s) = C(t)C(s)$, $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $C(0) = I$;

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} \|C(t)\varphi - \varphi\| = 0$ при всех $\varphi \in E$.

Для КОФ определен производящий оператор (генератор)

$$\lim_{t\to 0} \left[\frac{C(2t) - I}{2t^2} \varphi \right] = C''(0)\varphi = A\varphi,$$

при этом $\overline{D(A)} = E$.

С КОФ $C(t,A)$ *ассоциируют* синус-оператор-функцию (СОФ; см. [1])

$$S(t,A)f = \int\limits_0^t C(s,A) f ds, \qquad t \in \mathbb{R}, f \in E,$$

и линейные многообразия $E^k = \{f \in E : C(t,A)f \in C^k(\mathbb{R},E)\}$, $k = 1,2$.

Операторы $C(t,A)$, $S(t,A)$ коммутируют между собой в области определения оператора A при всех $t, s \in \mathbb{R}$, и между ними имеют место различные соотношения (см. [1]), в числе которых важное равенство

$$C(t+s,A) - C(t-s,A) = 2AS(t,A)S(s,A). \qquad (1.3)$$

Проводя аналогию между равенствами (1.3) и соответствующими соотношениями для скалярных тригонометрических функций, приходим к вопросу о существовании операторных функций $C(t)$ и $S(t)$, удовлетворяющих условию (1.3), но без сомножителя A. То есть, удовлетворяющих равенству

$$C(t+s) - C(t-s) = 2S(t)S(s). \qquad (1.4)$$

Ответ на этот вопрос сформулирован ниже.

§2. Формулировка результатов

1. В общем случае для косинус-функции $C(t)$, определенной соотношениями (i)–(iii), нельзя определить синус-функцию $S(t)$, связанную с $C(t)$ соотношением (1.4).

2. Положительное решение имеет обратная задача построения косинус-функции $C(t)$ со свойствами (i)–(iii) по синус-функциям, то есть по ограниченным в E операторам $Sh(t)$, определяемым соотношениями:

$$\begin{aligned} &\text{a) } Sh(t+s) + Sh(t-s) = 2\left[I + 2Sh^2\left(\frac{s}{2}\right)\right]Sh(t);\\ &\text{b) } Sh(0) = 0;\ \lim_{t\to 0}\|Sh(t)\varphi\| = 0,\ \varphi \in E;\\ &\text{c) } Sh(t)Sh(s) = Sh(s)Sh(t),\ t,s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

В этом случае $Sh(t)$ порождает косинус-функцию по закону

$$Ch(t) = I + 2Sh^2\left(\frac{t}{2}\right). \qquad (2.3)$$

3. Для сильно непрерывной функции $Sh(t)$ определен генератор $(Sh)''(0) = A$ и справедливо утверждение, что A является генератором тогда и только тогда, когда он имеет вид $A = B^2$, где B и $-B$ являются генераторами C_0-полугрупп в E $U(t,B)$ и $U(t,-B)$.

4. При выполнении условия (2.3) функции $Ch(t)$ и $Sh(t)$ можно записать в виде

$$Ch(t,A) = C(t,B^2) = \frac{1}{2}[T_+(t,B) + T_-(t,-B)], \qquad (2.4)$$

$$Sh(t,A) = S(t,B^2) = \frac{1}{2}[T_+(t,B) - T_-(t,-B)], \qquad (2.5)$$

где $T_+(t, B)$ и $T_-(t, -B)$ – группы операторов, удовлетворяющих условию (1.2).

Определение 2.1. Косинус и синус-функции, удовлетворяющие соотношениям (2.4) и (2.5), будем называть *экспоненциальной тригонометрической парой* (ЭТП) и записывать

$$Ch(t, B^2) = \frac{1}{2}[\exp(tB) + \exp(-tB)], \tag{2.6}$$

$$Sh(t, B^2) = \frac{1}{2}[\exp(tB) - \exp(-tB)]. \tag{2.7}$$

§3. Задача Коши по С. Г. Крейну и связка экспоненциальных тригонометрических пар

На связь операторных экспоненциальных тригонометрических пар $Sh(t, B^2)$, $Ch(t, B^2)$ указывает следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для уравнения С. Г. Крейна* (0.7) *задача Коши с условием* (0.8) *равномерно корректна тогда и только тогда, когда оператор B^2 является генератором экспоненциальной тригонометрической синус-функции $Sh(t, B^2)$, ее решение имеет вид*

$$u(t) = Ch(t, B^2)u_0 + Sh(t, B^2)v_0, \tag{3.1}$$

где v_0 – какое-либо решение уравнения $Bv_0 = u_0'$.

Таким образом, если задача Коши для уравнения (0.7) равномерно корректна в постановке С. Г. Крейна, то она корректна и в постановке Г. О. Фатторини. При этом, ее решение имеет вид (3.1).

Связка экспоненциальных тригонометрических пар. Следующее понятие позволяет значительно расширить класс задач, равномерно корректных по С. Г. Крейну.

Определение 3.1. Пусть $Ch(t, B_1^2)$, $Ch(t, B_2^2)$, $Sh(t, B_1^2)$, $Sh(t, B_2^2)$ коммутирующие экспоненциальные пары, действующие в E, тогда выражения

$$Ch(t, B_1^2) * Ch(t, B_2^2) = \frac{1}{2}[\exp(tB_1)\exp(tB_2) + \exp(-tB_1)\exp(-tB_2)], \tag{3.2}$$

$$Sh(t, B_1^2) * Sh(t, B_2^2) = \frac{1}{2}[\exp(tB_1)\exp(tB_2) - \exp(-tB_1)\exp(-tB_2)] \tag{3.3}$$

будем называть *связкой* соответствующих тригонометрических пар.

Непосредственной проверкой показываются равенства

$$Ch(t, B_1^2) * Ch(t, B_2^2) = Ch(t, (B_1 + B_2)^2), \tag{3.4}$$

$$Sh(t, B_1^2) * Sh(t, B_2^2) = Sh(t, (B_1 + B_2)^2). \tag{3.5}$$

Далее, по индукции, равенства (3.2), (3.3) обобщаются на случай произвольных $n \in \mathbb{N}$:

$$Ch\left(t, (\sum_{i=1}^{n} B_i)^2\right) = Ch(t, B_1^2) * \cdots * Ch(t, B_n^2)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} * Ch(t, B_i^2) = \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{n} \exp(tB_i) + \prod_{i=1}^{n} \exp(-tB_i)\right], \tag{3.6}$$

$$Sh\left(t, (\sum_{i=1}^{n} B_i)^2\right) = Sh(t, B_1^2) * \cdots * Sh(t, B_n^2)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} * Sh(t, B_i^2) = \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{n} \exp(tB_i) - \prod_{i=1}^{n} \exp(-tB_i)\right]. \tag{3.7}$$

Отсюда следует, что производящим оператором связки является оператор $\big(\sum_{i=1}^{n} B_i\big)^2$.

Список литературы

1. В. В. Васильев, С. И. Пискарев, С. Г. Крейн, *Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения.* — Итоги науки и техники. Серия Математический анализ ВИНИТИ, (1990), 87–202.
2. Дж. Голдстейн, *Полугруппы линейных операторов и их приложения*, Киев, Высща школа, 1989.
3. В. А. Костин, *Абстрактные сильно-непрерывные пары тригонометрических групп преобразований.* — Дифференциальные уравнения **7**, No. 8 (1984), 1419–1425.
4. В. А. Костин, *Об аналитических полугруппах и сильно непрерывных косинус-функциях.* — ДАН СССР **307**, No. 4 (1989), 796–799.
5. А. В. Костин, *Экспоненциальные косинус оператор-функции и их связки.* — Материалы ВЗМШ С. Г. Крейна, Воронеж (2018), 254–255.
6. В. А. Костин, *К решении одной проблемы, связанной с абстрактной косинус-функцией.* — ДАН **336**, No. 5 (1994), 584–586.
7. С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* М. Наука, 1967.

8. С. Г. Крейн, М. И. Хазан, *Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* — Итоги науки и техники. Мат. анализ **21** (1983), 130–264.
9. S. Kurepa, *Semigroups and cosine functions. Lecture Notes in Math.* **948**. Berlin, Springer, 1982.
10. M. Sova, *Cosine operator functions.* — Rozprawy Mat. **49** (1966), 1–46.
11. H. O. Fattorini, *A note on fractional derivatives of semigroups and cosine functions.* — Pasif. J. Math. **109**, No. 2 (1983), 335–347.
12. H. O. Fattorini, *Second order linear differential equations in Banach spaces.* North Holland, Amsterdam, 1985.

Kostin V. A., Kostin A. V., Kostin D. V. Operator sine-functions and trigonometric exponential pairs.

With the help of operator functional relations $Sh(t+s)+Sh(t-s) = 2[I+2Sh^2(\frac{t}{2})]Sh(s)$, $Sh(0)=0$, we introduce and study strongly continuous sine-function $Sh(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, of linear bounded transformations acting in a complex Banach space E, together with the cosine-function $Ch(t)$ given by the equation $Ch(t) = I + 2Sh^2(\frac{t}{2})$, where I is the identity operator in E.

The pair $Ch(t)$, $Sh(t)$ is the exponential of a trigonometric pair (ETP). For such pairs a generating operator (generator) is determined by the equation $Sh''(0)\varphi = Ch''(0)\varphi = A\varphi$, and a criterion for A to be the generator of the ETP is provided.

A relationship of $Sh(t)$ with the uniform well-posedness of the Cauchy problem with the Krein condition for the equation $\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t)$ is described. This problem is uniformly well-posed if and only if A is an exponent generator of the sine-function $Sh(t)$.

The concept of bundles of several ETP, which also forms a ETP, is introduced, and a representation for its generator is given.

The obtained facts expand significantly the possibilities of operator methods in the study of well-posed initial boundary value problems.

Воронежский
Государственный Университет,
Университетская площадь 1
394006 Воронеж, Россия
E-mail: vlkostin@mail.ru
E-mail: leshakostin@mail.ru
E-mail: dvk605@mail.ru

Поступило 5 августа 2019 г.