Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

В. В. Капустин

ПОЧТИ ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

В этой заметке развиваются недавние результаты автора [1], полученные для ядер операторов Тёплица в пространстве Харди в единичном круге. Голоморфная функция θ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ называется *внутренней*, если она ограничена и имеет граничные значения с модулем 1 почти всюду на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Изучается подпространство K класса Харди H^2 в $\mathbb{C}_+$, состоящее из функций из $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$, обращающихся в нуль на заданном конечном наборе Λ точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для точек множества Λ на вещественной прямой предполагается, что нахождение значения в каждой из этих точек является непрерывным функционалом на K_θ. Если множество Λ содержится в нижней полуплоскости, то подпространство K совпадает с ядром оператора Тёплица с символом $\bar{\theta}B$, где B — произведение Бляшке, нули которого являются точками, комплексно сопряжёнными с точками множества Λ.

Прямой аналог теоремы Хитта об описании почти инвариантных подпространств пространства Харди в единичном круге [2] существует и для класса Харди в полуплоскости.

Теорема 1. *Допустим, что K – подпространство пространства Харди H^2 в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и что для фиксированной точки $\lambda \in \mathbb{C}_+$ имеем следующее свойство: если $f \in K$ и $f(\lambda) = 0$, то функция $\frac{f(z)}{z-\lambda}$ также принадлежит K. Тогда*

$$K = g \cdot K_\omega, \tag{1}$$

где ω – внутренняя функция, $K_\omega = H^2 \ominus \omega H^2$ и g – функция, удовлетворяющая условию $\frac{g}{z+i} \in H^2$, являющаяся изометрическим множителем на K_ω, т.е. $\|gh\| = \|h\|$ для любой функции $h \in K_\omega$.

Из представления (1) видно, что свойство деления в предположении теоремы не зависит от выбора точки λ; а именно, можно брать произвольную точку из $\mathbb{C}_+$, не являющуюся общим нулём всех функций из подпространства K.

Ключевые слова: класс Харди, модельные пространства, алгоритм Шура.
Работа частично поддержана грантом РФФИ № 19-01-00565-а.

Этот факт известен в качестве фольклора; он обсуждается в добавлении 1 ниже. Легко видеть, что подпространство K всех функций из K_θ, обращающихся в нуль на Λ, обладает свойством деления из предположения теоремы. Это естественно приводит к задаче описания функций ω и g. В [1] результат такого рода был получен для пространств на единичной окружности, причём точки множества Λ располагались внутри единичного круга. Здесь конструкция из [1] развивается для пространств на вещественной прямой. Если p – многочлен, то многочлен $p^\sharp$, значения которого на вещественной прямой $\mathbb{R}$ совпадают с $\bar{p}$, имеет ту же степень, как и p (для функций на окружности аналог этого свойства нарушается). Это позволяет получить итоговые формулы в более компактной форме и с меньшим набором параметров, чем в [1]. Кроме того, здесь не предполагается, что множество Λ соответствует случаю операторов Тёплица; в частности, мы работаем с важным частным случаем точек, лежащих на границе. Также доказательства упрощаются в связи с используемой здесь линеаризованной рациональной интерполяцией.

Проиллюстрируем нашу работу известным примером из теории Бёрлинга–Мальявена, см. например [3]. Для заданной последовательности Λ комплексных чисел и положительного числа a требуется выяснить, является ли семейство функций $\exp(it\lambda)$ при $\lambda \in \Lambda$ полным в $L^2(-a, a)$ (целью является супремум множества чисел a, для которых ответ положительный). Преобразование Фурье переносит пространство $L^2(-a, a)$ в пространство Пэли–Винера PW_a, воспроизводящие ядра которого соответствуют экспоненциальным функциям в $L^2(-a, a)$. Следовательно, свойство плотности нарушается тогда и только тогда, когда существует ненулевая функция $f \in PW_a$, обращающаяся в нуль на множестве Λ. Это соответствует нашей задаче при $\theta(z) = \exp(2iaz)$. Наиболее важным и трудным случаем этой задачи является случай, когда Λ – (счётное) подмножество вещественной прямой. Он может рассматриваться как предельный случай последовательности конечных подмножеств, в конце концов исчерпывающих всё множество Λ.

Сдвиг по Фростману ω_α внутренней функции ω определяется формулой

$$\omega_\alpha(z) = \frac{\omega(z) - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\,\omega(z)}, \qquad |\alpha| < 1. \tag{2}$$

Известно, что

$$K_\omega = \frac{1-\bar{\alpha}\omega}{\sqrt{1-|\alpha|^2}} \cdot K_{\omega_\alpha} \tag{3}$$

и $\frac{1-\bar{\alpha}\omega}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$ является изометрическим множителем на K_{ω_α}. Отсюда сразу следует неединственность представления (1); однако таким образом получаются все возможные представления.

Постановка линеаризованной задачи рациональной интерполяции выглядит следующим образом. При заданном числе $N = n+m$ и наборе интерполяционных данных (a_k, b_k) при $b_k \neq 0$, $k = 0, \dots, N$, ищется пара многочленов p, q таких, что

$$\deg p \leqslant n, \quad \deg q \leqslant m, \quad p(a_k) - b_k\, q(a_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N \tag{4}$$

(тривиальное решение $p \equiv 0$, $q \equiv 0$ всегда исключается). Это более слабая форма задачи рациональной интерполяции, когда ищется решение, удовлетворяющее соотношениям $\frac{p(a_k)}{q(a_k)} = b_k$; все такие решения также являются и решениями линеаризованной задачи, но здесь также решения могут удовлетворять равенствам $p(a_k) = 0$, $q(a_k) = 0$. Хотя с формальной точки зрения решение p, q не является дробью, с каждым решением p, q ассоциируется рациональная функция

$$\varphi = \frac{p}{q},$$

и p и q будут рассматриваться как числитель и знаменатель решения соответственно.

Следующий результат хорошо известен, он будет обсуждаться в добавлении 2 ниже.

Теорема 2. *Пары многочленов p, q, являющиеся решениями интерполяционной задачи* (4)*, существуют, и для таких пар рациональная функция $\varphi = \frac{p}{q}$ определена однозначно.*

Теперь опишем интерполяционную задачу вида (4), которая будет использоваться для описания подпространства K. Грубо говоря, берутся точки множества Λ и множества $\bar{\Lambda}$ его комплексно сопряжённых точек, и функция θ интерполируется в этих точках отношением двух многочленов p, q степени не выше n. Остаётся одна степень свободы и требуется, чтобы модуль значения отношения $\frac{p}{q}$ в бесконечности был бы строго меньше 1. Решения дадут все возможные представления K в виде (1) по описанной ниже схеме.

Для точек $\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{C}_+$ берутся значения $\theta(\lambda)$, их модули всегда строго меньше 1. Для точек $\lambda \in \mathbb{C}_-$ значения θ определяются с помощью так называемого псевдопродолжения

$$\theta(\lambda) = \overline{\theta(\bar{\lambda})}^{-1}.$$

Функция θ может обращаться в нуль в точке $\lambda \in \Lambda$ только если $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Тогда $\theta(\bar{\lambda}) = \infty$. Это означает, что интерполирующая функция содержит сомножитель $\dfrac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}$, при удалении которого задача сводится к множеству $\Lambda \setminus \{\lambda\}$. Таким образом, можно предполагать, что θ не обращается в нуль на Λ. Тогда значения θ в интерполяционных узлах из $\mathbb{C}_-$ также конечны, что позволяет работать в контексте теоремы 2.

Допустим, что множество Λ состоит из n элементов (с учётом кратностей). Тогда объединение $\Lambda \cup \bar{\Lambda}$ содержит $2n$ элементов; они будут считаться узлами интерполяции. Если какие-либо невещественные точки имеют кратности, задача естественно модифицируется с помощью рассмотрения производных в таких точках.

Для точек $\lambda \in \Lambda$ на вещественной прямой предполагаем, что нахождение значения в λ является непрерывным функционалом на K_θ. Тогда значение $\theta(\lambda)$ корректно определено и имеет модуль 1; кроме того, производная $\theta'(\lambda)$ также определена корректно. Это можно увидеть в терминах воспроизводящих ядер пространства K_θ. А именно, для $\lambda \in \mathbb{C}_+$ функция k_λ,

$$k_\lambda(z) = -\frac{1-\overline{\theta(\lambda)}\theta(z)}{2\pi i\,(z-\bar{\lambda})},$$

является воспроизводящим ядром пространства K_θ, иными словами,

$$(f, k_\lambda) = f(\lambda), \qquad f \in K_\theta.$$

Если значение в точке $\lambda \in \mathbb{R}$ является ограниченным функционалом на K_θ, то соответствующая функция k_λ принадлежит K_θ. Если функция θ аналитична в λ, можно записать

$$\begin{aligned}(k_\lambda, k_\lambda) = k_\lambda(\lambda) &= \lim_{\lambda'\to\lambda} k_\lambda(\lambda') = -\lim_{\lambda'\to\lambda} \frac{1-\overline{\theta(\lambda)}\theta(\lambda')}{2\pi i\,(\lambda'-\lambda)} \\ &= \frac{1}{2\pi i\,\theta(\lambda)} \cdot \lim_{\lambda'\to\lambda} \frac{\theta(\lambda')-\theta(\lambda)}{\lambda'-\lambda} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\theta'(\lambda)}{\theta(\lambda)},\end{aligned}$$

и в общем случае это соотношение можно использовать в качестве определения производной $\theta'(\lambda)$.

Таким образом, рассматривается линеаризованная задача рациональной интерполяции, которая записывается так:

$$p(\lambda) - \theta(\lambda)q(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \Lambda \cup \bar{\Lambda}, \qquad \deg p \leqslant n, \quad \deg q \leqslant n, \tag{5}$$

вместе со всеми пояснениями перед этой формулой.

Если f – мероморфная функция в $\mathbb{C}_+$, через $f^\sharp$ обозначается мероморфная в $\mathbb{C}_+$ функция, граничные значения которой совпадают с $\bar{f}$ почти всюду (если такая функция существует). В частности, если f – рациональная функция, то $f^\sharp$ сущестует и также является рациональной, а для любой внутренней функции f имеем $f^\sharp = f^{-1}$.

Пара p_0, q_0 многочленов, задающая решение задачи (5), удовлетворяющее условию

$$\deg p_0 \leqslant n-1, \qquad \deg q_0 \leqslant n,$$

единственна в смысле теоремы 2. На самом деле имеем

$$\deg q_0 = n. \tag{6}$$

Мы не располагаем прямым доказательством этого факта и он будет проверен при доказательстве основной теоремы. Точнее, будет установлено свойство нормировки (8) ниже, и из него очевидно вытекает (6). Таким образом, можно выбрать q_0 в виде $z^n + \dots$

Очевидно, пара $q_0^\sharp, p_0^\sharp$ также является решением задачи (5), а следовательно и все пары

$$p_0 + \alpha q_0^\sharp, \quad q_0 + \alpha p_0^\sharp \tag{7}$$

– также решения при любом комплексном числе α (эти формулы относятся к так называемому преобразованию Геронимуса). Для $\varphi = \frac{p}{q}$ нужно, чтобы $|\varphi(\infty)| < 1$, так что рассматриваются только числа α, у которых $|\alpha| < 1$.

Таким образом, после доказательства свойства (6) будем иметь следующий факт, нужный для формулировки нашего основного результата.

Предложение 3. *Все решения интерполяционной задачи* (5) *при*

$$\deg p \leqslant n, \quad \deg q \leqslant n; \qquad |\varphi(\infty)| < 1$$

имеют вид (7) *при* $\alpha = \varphi(\infty)$.

Доказательство единственности вполне стандартно, ср. с доказательством теоремы 2 в добавлении 2 ниже.

В терминах старших коэффициентов многочленов p, q,

$$p(x) = \mu x^n + \dots, \qquad q(x) = \nu x^n + \dots,$$

имеем $\varphi(\infty) = \frac{\mu}{\nu}$. Свойство $|\varphi(\infty)| < 1$ равносильно тому, что многочлены p, q могут быть выбраны удовлетворяющими условию нормировки

$$|\nu|^2 - |\mu|^2 = 1. \tag{8}$$

Определим

$$\rho(z) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (z - \lambda).$$

Основная теорема. *Предположим, что Λ – набор из n точек на комплексной плоскости, а θ – внутренняя функция, не являющаяся произведением Бляшке степени не выше n; пусть $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$. Для точек $\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{R}$ предположим, что нахождение значения в λ – непрерывный функционал на K_θ. Обозначим через K подпространство всех функций из K_θ, обращающихся в нуль на Λ.*

Допустим, что пара многочленов p, q, для которых $\deg p \leqslant n$, $\deg q \leqslant n$, является решением интерполяционной задачи (5), *и что для $\varphi = \frac{p}{q}$ имеем $|\varphi(\infty)| < 1$, и выполнено условие нормировки* (8).

Тогда

$$\omega = \frac{q\theta - p}{q^\sharp - p^\sharp \theta} \tag{9}$$

– внутренняя функция; функция

$$g = \frac{q^\sharp - p^\sharp \theta}{\rho^\sharp} \tag{10}$$

является изометрическим множителем на K_ω, и $K = g \cdot K_\omega$.

Замечания. 1. Предположение, что θ не является произведением Бляшке степени не выше n, означает, что $K \neq \{0\}$.

2. Теорема верна, если некоторые точки Λ встречаются с кратностями. Как было сказано выше, для точек Λ из $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ следует рассматривать интерполяцию с производными, определёнными естественным образом. Для точек из $\Lambda \cap \mathbb{R}$ можно рассматривать случай, когда все функции из K_θ имеют значения вместе с k производными в λ, и изучается подпространство с условием, что все они обращаются в нуль. Тогда в силу [4] функция θ имеет $2k+1$ производных в λ, и интерполяционная задача поставлена корректно.

3. Можно отметить, что наша процедура из доказательства для случая, когда $\Lambda \subset \mathbb{C}_+$ или $\Lambda \subset \mathbb{C}_-$, соответствует алгоритму Шура, применённому к внутренней функции θ: последовательно применяются, во-первых, сдвиг по Фростману для получения нуля внутренней функции в некоторой точке, а затем деление на множитель Бляшке с нулём в этой точке. Если определить произведение Бляшке $B = \frac{q^\sharp}{q}$, получится формула для ω как в [1]:

$$\omega = \frac{1}{B} \cdot \frac{\theta - \varphi}{1 - \varphi^\sharp \theta},$$

где $\varphi = \frac{p}{q}$.

Лемма 4. *Предположим, что подпространство записано в виде* (1)*, причём* ω, g *определены формулами* (9), (10) *для некоторых многочленов* p, q, ρ*, а* g *является изометрическим множителем на* K_ω*. Пусть* α *– комплексное число, у которого* $|\alpha| < 1$*. Тогда то же самое верно, если* p, q *заменить на*

$$p_\alpha = \frac{p + \alpha q^\sharp}{\sqrt{1 - |\alpha|^2}}, \qquad q_\alpha = \frac{q + \alpha p^\sharp}{\sqrt{1 - |\alpha|^2}}$$

соответственно.

Доказательство. Предположим, что функция ω записана в виде (9). Тогда для сдвига функции ω по Фростману получаем

$$\begin{aligned}\omega_\alpha = \frac{\omega - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\omega} = \frac{\frac{q\theta - p}{q^\sharp - p^\sharp\theta} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\frac{q\theta - p}{q^\sharp - p^\sharp\theta}} &= \frac{(q\theta - p) - \alpha(q^\sharp - p^\sharp\theta)}{(q^\sharp - p^\sharp\theta) - \bar{\alpha}(q\theta - p)} \\ &= \frac{(q + \alpha p^\sharp)\theta - (p + \alpha q^\sharp)}{(q^\sharp + \bar{\alpha}p) - (p^\sharp + \bar{\alpha}q)\theta} = \frac{q_\alpha\theta - p_\alpha}{q_\alpha^\sharp - p_\alpha^\sharp\theta},\end{aligned}$$

что представляет собой выражение вида (9), в котором выступают p_α, q_α вместо p, q.

По (3) можно записать

$$g \cdot K_\omega = g_\alpha \cdot K_{\omega_\alpha}$$

причём g_α – изометрический множитель на K_{ω_α}, где

$$g_\alpha = g \cdot \frac{1-\bar{\alpha}\omega}{\sqrt{1-|\alpha|^2}} = \frac{q^\sharp - p^\sharp\theta}{\rho^\sharp} \cdot \frac{1-\bar{\alpha}\cdot\frac{q\theta-p}{q^\sharp-p^\sharp\theta}}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$$
$$= \frac{1}{\rho^\sharp} \cdot \frac{(q^\sharp - p^\sharp\theta) - \bar{\alpha}\cdot(q\theta - p)}{\sqrt{1-|\alpha|^2}} = \frac{q^\sharp_\alpha - p^\sharp_\alpha\theta}{\rho^\sharp}.$$

Это совпадает с формулой (10), в которой p_α, q_α выступают вместо p, q.

□

Лемма 5. *Возьмём $\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{R}$, предположим, что функционал $f \mapsto f(\lambda)$ непрерывен на K_θ. Тогда*

$$\{f \in K_\theta :\ f(\lambda) = 0\} = g \cdot K_\omega,$$

где ω, g определены формулами (9), (10) *при*

$$p(z) \equiv -\frac{\theta(\lambda)^2}{\theta'(\lambda)}, \qquad q(z) = z - \lambda - \frac{\theta(\lambda)}{\theta'(\lambda)}. \tag{11}$$

Доказательство. Для доказательства используем меры Кларка, определённые в [5] для внутренних функций в единичном круге. Не умаляя общности $\theta(\lambda) = 1$; тогда число $\theta'(\lambda)$ чисто мнимое. Функция $\operatorname{Re}\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)}$ гармоническая и положительная в $\mathbb{C}_+$, значит она может быть записана как интеграл Пуассона борелевской меры σ на границе. Имеем формулу

$$\operatorname{Re}\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Im} z\, d\sigma(t)}{(t-\operatorname{Re} z)^2 + \operatorname{Im} z^2} + \sigma(\{\infty\})\cdot \operatorname{Im} z;$$

мера σ удовлетворяет условию $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma(t)}{1+t^2} < \infty$, и, поскольку функция θ внутренняя, мера σ сингулярна относительно меры Лебега. Вещественнозначные гармонические функции являются вещественными частями комплекснозначных аналитических функций, так что получаем

$$\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma(t)}{t-z} - i\,\sigma(\{\infty\})\cdot z + ic \tag{12}$$

с некоторой вещественной константой c. Основным объектом, относящимся к теории мер Кларка, является унитарный оператор между K_θ

и $L^2(\sigma)$. А именно, определим отображение $V : L^2(\sigma) \to K_\theta$ формулой

$$(Vu)(z) = \frac{1-\theta(z)}{2\pi i} \int \frac{h(t)\,d\sigma(t)}{t-z} = (1-\theta(z))\,\mathcal{K}_{h\sigma}(z). \tag{13}$$

Тогда V – унитарный оператор; при этом u может рассматриваться как граничная функция функции Vu.

То, что нахождение значения в точке λ является ограниченным функционалом на K_θ, равносильно условию $\sigma(\{\lambda\}) > 0$, и тогда

$$(Vu)(\lambda) = u(\lambda).$$

Определим $\breve{\sigma} = \sigma - \sigma(\{\lambda\}) \cdot \delta_\lambda$, где δ_λ – мера Дирака в точке λ; то есть у меры σ убирается точечная масса в точке λ. Пусть ω – внутренняя функция с мерой Кларка $\breve{\sigma}$. Из формулы (12) и аналогичной формулы с $\omega, \breve{\sigma}$ вместо θ, σ получаем

$$\frac{1+\theta}{1-\theta} = \frac{1+\omega}{1-\omega} - \frac{1}{\pi i}\,\frac{\sigma(\{\lambda\})}{z-\lambda}.$$

Поскольку $\sigma(\{\lambda\}) = \frac{2\pi i}{\theta'(\lambda)}$, имеем

$$\frac{1+\theta}{1-\theta} = \frac{1+\omega}{1-\omega} - \frac{2}{(z-\lambda)\,\theta'(\lambda)},$$

или, что равносильно,

$$\frac{1}{1-\omega} = \frac{1}{1-\theta} + \frac{1}{(z-\lambda)\,\theta'(\lambda)}. \tag{14}$$

Это даёт выражение для ω; непосредственным вычислением проверяется, что оно совпадает с формулой (9), где p, q такие, как в (11).

Оператор V переводит функции из K_θ, обращающиеся в нуль в точке λ, в подпространство пространства $L^2(\sigma)$ всех функций, обращающихся в нуль в λ, которое естественно отождествляется с $L^2(\breve{\sigma})$. Если заменить θ, σ на $\omega, \breve{\sigma}$ в формуле (13), получим оператор унитарного соответствия между $L^2(\breve{\sigma})$ и K_ω. В правой части в (13) получится множитель $1-\omega$ вместо $1-\theta$; это означает, что умножение на $g = \frac{1-\theta}{1-\omega}$ является изометрическим отображением из K_ω в K_θ, образ которого совпадает со множеством всех функций из K_θ, обращающихся в нуль в λ. Наконец, для функции g из соотношения (14) получаем

$$g = \frac{1-\theta}{1-\omega} = 1 + \frac{1-\theta}{(z-\lambda)\,\theta'(\lambda)},$$

что представляет собой то же самое, как в (10) при p, q, определённых формулой (11). $\square$

Доказательство основной теоремы. Сначала предположим, что имеется одно представление подпространства K в виде (1). Тогда лемма 4 даёт все представления такого вида для K.

Пусть μ, ν – старшие коэффициенты многочленов p, q соответственно; $\frac{\mu}{\nu} = \alpha$, $|\nu|^2 - |\mu|^2 = 1$. Тогда старшие коэффициенты многочленов p_α, q_α соответственно равны $\frac{\mu+\alpha\bar{\nu}}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}, \frac{\nu+\alpha\bar{\mu}}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$. Поскольку

$$\left|\frac{\nu+\alpha\bar{\mu}}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}\right|^2 - \left|\frac{\mu+\alpha\bar{\nu}}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}\right|^2 = \frac{|\nu|^2 + |\alpha|^2|\mu|^2 - |\mu|^2 - |\alpha|^2|\nu|^2}{1-|\alpha|^2} = |\nu|^2 - |\mu|^2,$$

условие нормировки (8) для p, q влечёт условие нормировки для p_α, q_α. В частности, отсюда следует, что $\deg q_\alpha = \deg q$ и

$$|\varphi_\alpha(\infty)| < 1 \qquad \text{для} \qquad \varphi_\alpha = \frac{p_\alpha}{q_\alpha}.$$

По построению линеаризованное условие интерполяции для пары p_α, q_α очевидно выполнено. Таким образом, если исходное представление было как в теореме, это верно и для всех представлений, построенных в соответствии с леммой 4.

В случае $n = 0$ тривиально имеем $p \equiv 0$, $q \equiv 1$; $\omega = \theta$, $g \equiv 1$. Для $n = 1$ есть три случая: $\lambda \in \mathbb{C}_+$, $\lambda \in \mathbb{C}_-$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Допустим, что $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Тогда лемма 4 позволяет свести задачу к случаю $\theta(\lambda) = 0$. Действительно, если не так, то применим лемму 4 при $\omega = \theta$, $\alpha = \theta(\lambda)$, и получим $\omega_\alpha(\lambda) = 0$. Соответствующие многочлены p, q будут постоянными функциями $\frac{\alpha}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$ соответственно. Тогда

$$K = \{f \in K_\theta : \ f(\lambda) = 0\} = b_\lambda \cdot K_{\theta/b_\lambda},$$

где $b_\lambda(z) = \frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}$ – множитель Бляшке. Это соответствует представлению пространства K как в теореме при $p(z) = \frac{\alpha\cdot(z-\bar{\lambda})}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$, $q(z) = \frac{z-\bar{\lambda}}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}$; $\rho(z) = z - \lambda$. Легко видеть, что интерполяционное свойство (5) и свойство нормировки (8) выполнены.

Случай, когда $\lambda \in \mathbb{C}_-$, сводится к случаю $\lambda \in \mathbb{C}_+$ рассмотрением комплексно сопряжённой точки. Поскольку умножение на множитель Бляшке b_λ является изометрическим отображением, в получающейся формуле нужно только разделить изометрический множитель на b_λ.

В случае $\lambda \in \mathbb{R}$ ответ дан в лемме 5.

Остаётся проверить, что можно добавлять точки к множеству Λ по одной. Это вытекает из следующего свойства суперпозиции, применяемого в случае, когда Λ_2 содержит один элемент. Предположим, что множество всех $f \in K_\theta$, обращающихся в нуль на Λ_1, записано в виде $g_1 \cdot K_{\omega_1}$ при

$$\omega_1 = \frac{q_1\theta - p_1}{q_1^\sharp - p_1^\sharp\theta}, \qquad g_1 = \frac{q_1^\sharp - p_1^\sharp\theta}{\rho_1^\sharp},$$

а множество всех $f \in K_{\omega_1}$, обращающихся в нуль на Λ_2, записано в виде $g_2 \cdot K_\omega$ при

$$\omega = \frac{q_2\omega_1 - p_2}{q_2^\sharp - p_2^\sharp\omega_1}, \qquad g_2 = \frac{q_2^\sharp - p_2^\sharp\omega_1}{\rho_2^\sharp};$$

также предполагаем, что в обоих случаях имеется подходящее свойство интерполяции. Тогда множество всех функций $f \in K_\theta$, обращающихся в нуль на $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ (с учётом кратностей), имеет вид $g \cdot K_\omega$ при $g = g_1g_2$. Можно проверить, что это равносильно формулам (9), (10) при

$$p = p_1q_2 + q_1^\sharp p_2, \qquad q = q_1q_2 + p_1^\sharp p_2, \qquad \rho = \rho_1 \cdot \rho_2.$$

Свойство интерполяции на Λ_1 вытекает из формулы для $p - \theta q$,

$$p - \theta q = (p_1q_2 + q_1^\sharp p_2) - \theta \cdot (q_1q_2 + p_1^\sharp p_2) = (p_1 - \theta q_1) \cdot q_2 + (q_1^\sharp - \theta p_1^\sharp) \cdot p_2,$$

в которой выражения в скобках в правой части обращаются в нуль на Λ_1. С другой стороны,

$$p - q\theta = (p_2 - q_2\omega_1)\,(q_1^\sharp - p_1^\sharp\theta),$$

где, по построению, $p_2 - q_2\omega_1$ обращается в нуль на Λ_2.

Простое непосредственное вычисление показывает, что если условие нормировки (8) выполнено для пар p_1, q_1 и p_2, q_2, то оно также верно и для пары p, q. □

Добавление 1. Почти инвариантные подпространства. Подпространство K класса Харди H^2 в единичном круге называется почти инвариантным подпространством оператора обратного сдвига $f \mapsto \frac{f - f(0)}{z}$, если для любой функции $f \in K$ со свойством $f(0) = 0$ имеем $\frac{f}{z} \in K$. В [2] доказано, что любое почти инвариантное подпространство имеет вид $g \cdot K_\omega$, где ω – внутренняя функция, $K_\omega = H^2 \ominus \omega H^2$, а $g \in H^2$ – изометрический множитель на K_ω. У этого результата имеется аналог для пространства Харди в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

Для заданного подпространства $K \subset H^2(\mathbb{C}_+)$ возьмём точку $\lambda \in \mathbb{C}_+$, не являющуюся общим нулём всех функций из K. Свойство почти инвариантности в полуплоскости может быть определено следующим образом: для любой функции f из K, у которой $f(\lambda) = 0$, имеем $\frac{f}{z-\lambda} \in K$, или, равносильно, $\frac{f}{b_\lambda} \in K$, где $b_\lambda(z) = \frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}$ – множитель Бляшке. Очевидно, все ядра операторов Тёплица почти инвариантны для любой точки $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Для доказательства утверждения теоремы 1, что все почти инвариантные подпространства имеют вид $g \cdot K_\omega$, применим унитарное преобразование между пространствами Харди в полуплоскости и в единичном круге:

$$f \mapsto \frac{2\sqrt{\pi \cdot \mathrm{Im}\lambda}}{1-z} \cdot f\left(\frac{\lambda - \bar{\lambda}z}{1-z}\right), \qquad f \in H^2(\mathbb{C}_+).$$

Тогда требуемое легко следует из описания Хитта почти инвариантных подпространств в пространстве Харди в единичном круге. В частности, из этого следует, что свойство почти инвариантности не зависит от выбора точки λ, если λ не является общим нулём для K.

Кроме того, представление Хитта единственно с точностью до мультипликативных констант с модулем 1, если потребовать, чтобы внутренняя функция обращалась в нуль в нуле. Следовательно, представление (1) также единственно при дополнительном ограничении $\omega(\lambda) = 0$. Все представления вида (1) могут быть получены преобразованиями, при которых функция ω переходит в её сдвиги по Фростману; это также следует из аналогичного факта для пространств в единичном круге.

Добавление 2. Рациональная интерполяция. Для удобства читателя здесь приводится набросок доказательства теоремы 2. Автор признателен А. Жеданову за полезные обсуждения в связи с рациональной интерполяцией.

Чтобы получить единственность, допустим, что $p(a_k) - b_k\, q(a_k) = 0$, $\tilde{p}(a_k) - b_k\, \tilde{q}(a_k) = 0$; следовательно, $p(a_k)\tilde{q}(a_k) = \tilde{p}(a_k)q(a_k)$. Многочлены степени не выше N имеют одинаковые значения в $N+1$ точках, значит, они совпадают: $p\tilde{q} = \tilde{p}q$, и таким образом $\frac{p}{q} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$.

Решение интерполяционной задачи может быть построено с помощью алгоритма Евклида, например, ср. [6]. Определим

$$\chi(z) = \prod_{k=0}^{N}(z - a_k),$$

и пусть η – интерполяционный многочлен степени не выше N,

$$\eta(a_k) = b_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Возьмём

$$p_0 = \chi, \quad q_0 \equiv 0; \qquad p_1 = \eta, \quad q_1 \equiv 1.$$

Имеем $p_1(a_k) = \eta(a_k) = b_k$. На l-м шаге $(l = 1, 2, \ldots)$ находятся многочлены u_l, p_{l+1} такие, что

$$p_{l+1} = p_{l-1} - u_l p_l, \qquad \deg u_l = \deg p_{l-1} - \deg p_l, \quad \deg p_{l+1} < \deg p_l;$$

также определим

$$q_{l+1} = q_{l-1} - u_l q_l.$$

Алгоритм останавливается после L-го шага, как только получится $\deg p_{L+1} \leqslant n$, и тогда полагаем

$$p = p_{L+1}, \qquad q = q_{L+1}.$$

Для любого $l = 1, \ldots, L, L+1$ по индукции получаем

$$p_l(a_k) - b_k\, q_l(a_k) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, N,$$

и

$$\deg q_l \leqslant (N+1) - \deg p_{l-1},$$

откуда, в частности, $\deg p_l + \deg q_l \leqslant N$ и $\deg q \leqslant m$.

Многочлены p, q допускают независимое описание в терминах ортогональности, которое может быть доказано в рамках индукционной схемы, описанной выше. А именно, для любого многочлена φ степени $n-1$ и, аналогично, для любого многочлена ψ степени $m-1$ имеем

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{p(a_k)\cdot\varphi(a_k)}{b_k\cdot\chi'(a_k)} = 0, \qquad \sum_{k=0}^{N} q(a_k)\cdot\psi(a_k)\cdot\frac{b_k}{\chi'(a_k)} = 0.$$

Список литературы

1. В. В. Капустин, *Ядра операторов Тёплица и рациональная интерполяция.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **467** (2018), 85–107.
2. D. Hitt, *Invariant subspaces of $\mathcal{H}^2$ of an annulus.* — Pacific J. Math. **134**, no. 1 (1988), 101–120.
3. N. Makarov, A. Poltoratski, *Meromorphic inner functions, Toeplitz kernels and the uncertainty principle.* — Perspectives in analysis, 185–252, Math. Phys. Stud., 27, Springer, Berlin, 2005.
4. P. R. Ahern, D. N. Clark, *Radial limits and invariant subspaces.* — Amer. J. Math. **92** (1970), 332–342.
5. D. N. Clark, *One dimensional perturbations of restricted shifts.* — J. Anal. Math. **25** (1972), no. 1, 169–191.

6. A. C. Antoulas, *Rational interpolation problem and the Euclidean algorithm*. — Linear Algebra Appl. **108** (1988), 157–171.

Kapustin V. V. Nearly invariant subspaces and rational interpolation.

Given an inner function θ in the upper half-plane, consider the subspace $H^2 \ominus \theta H^2$ of the Hardy space H^2. For a finite collection Λ of points on the complex plane, the subspace of functions from K_θ that vanish on Λ can be represented in the form $g \cdot K_\omega$, where ω is an inner function and g is an isometric multiplier on K_ω. We obtain a description of the functions ω and g in terms of θ and Λ.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
набережная реки Фонтанки 27,
191023, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kapustin@pdmi.ras.ru

Поступило 26 августа 2019 г.