Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

Л. Н. Ихсанов

ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕНИЯ ОПЕРАТОРАМИ ТИПА КАНТОРОВИЧА ЧЕРЕЗ ВТОРОЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Введение

Далее $B[0,\,1]$ – пространство измеримых, ограниченных на $[0,\,1]$ вещественнозначных функций, снабженное sup-нормой, причем функции считаются заданными во всех точках; $\mathbb{P}_n$ – пространство полиномов степени не больше n,

$$p_{n,\,j}(x) = C_n^j x^j (1-x)^{n-j}.$$

В серии статьей, собранных в книге [1], Раду Палтаней был получен следующий результат о приближении функции из $B[0,\,1]$ полиномами Бернштейна.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и оператор $B_n : B[0,\,1] \to \mathbb{P}_n$ определён формулой*

$$B_n(f) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Тогда

$$\|B_n(f) - f\| \leqslant \omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

причём неравенство является точным для каждого n.

В 1930 году Канторович [2] предложил обобщённую конструкцию полиномиальных операторов

$$K_n(f) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j} F_{n,\,j}(f),$$

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, второй модуль непрерывности.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00055).

где $F_{n,\,j}$ – некоторые положительные функционалы над рассматриваемым пространством функций. В частности, при

$$F_{n,\,j}(f) = (n+1)\int\limits_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} f(t)\,dt$$

получаются классические операторы Канторовича, при $F_{n,j} = \delta_{\frac{j}{n}}$ получаем обычные операторы Бернштейна.

Данная работа посвящена обобщению результата Палтани на семейство операторов типа Канторовича, для которых функционалы $F_{n,\,j}$ представляют собой некоторые вероятностные меры с ожиданием $\frac{j}{n}$.

Введём несколько определений.

Пусть $s \in [0,1]$, $m \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_m > 0$, $0 < t_1 < \ldots < t_m \leqslant \min\{s, 1-s\}$, $0 < t_0 \leqslant \min\{s, 1-s\}$ и $\varphi \in L[0,\,t_0]$ – неотрицательная функция, причём

$$\sum_{i=1}^{m} c_i + \int\limits_0^{t_0} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

и $t_0 \in \operatorname{supp}\varphi$, где под $\operatorname{supp}\varphi$ будем понимать носитель меры, порождённой функцией φ:

$$\mu_\varphi(A) = \int\limits_A \varphi(t)\,dt, \quad A \subset [0,\,t_0].$$

Тогда на пространстве $B[0,\,1]$ определён функционал

$$F(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i(f(s-t_i) + f(s+t_i)) + \int\limits_0^{t_0} (f(s-t) + f(s+t))\varphi(t)\,dt. \quad (1)$$

Несложно видеть, что F является линейным и положительным, а также что

$$F(e_0) = 1, \quad F(e_1) = s,$$

где $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$, $x \in [0,1]$.

Через $\mathcal{P}_s$ обозначим множество таких функционалов для всех допустимых наборов $(m,\,(c_i)_{i=1}^m,\,(t_i)_{i=0}^m,\,\varphi)$.

Для $F \in \mathcal{P}_s$ обозначим

$$\operatorname{supp} F = \bigcup_{i=1}^{m} (\{s+t_i\} \cup \{s-t_i\}) \cup (s + \operatorname{supp}\varphi) \cup (s - \operatorname{supp}\varphi),$$

$$d(F) = \max_{x \in \operatorname{supp} F} |s - x| \leqslant \max\{t_0,\, t_m\}.$$

Обращаем внимание, что величина $d(F)$ однозначно определяется функционалом F и из $|t| < d(F)$ следует $s + t \in [0,\, 1]$ и, более того,

$$|f(s-t) - 2f(s) + f(s+t)| \leqslant \omega_2(f,\, d(F)).$$

Кроме того, если функция f равна нулю на множестве $\operatorname{supp} F$, то $F(f) = 0$. Поскольку $F(e_0) = 1$, имеем

$$|F(f)| \leqslant \sup_{x \in \operatorname{supp} F} |f(x)|, \quad f \in B[0,\, 1]. \tag{2}$$

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 2. *Пусть* $n \geqslant 60$, $F_j \in \mathcal{P}_{\frac{j}{n}}$, *где* $j = 0, \ldots, n$,

$$h_1 = \max_{j=0,\ldots,n} d(F_j) \leqslant \frac{1}{3n}$$

и оператор $B_n : B[0,\, 1] \to \mathbb{P}_n$ *определён формулой*

$$B_n(f) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j}(x) F_j(f).$$

Тогда

$$\|B_n(f) - f\| \leqslant \omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}} + h_1\right),$$

причём неравенство является точным для каждого n.

Поскольку $h_1 \leqslant \frac{1}{3n}$, порядок шага по прежнему равен $\frac{1}{\sqrt{n}}$, что, как известно, является оптимальным для приближения положительными полиномиальными операторами.

В доказательстве используются некоторые идеи Палтани, однако адаптация их к случаю произвольных функционалов из $\mathcal{P}_s$ оказывается сопряжена с техническими трудностями. Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Леммы

Если $F \in \mathcal{P}_s$ и $0 \leqslant h \leqslant 1 - s - d(F)$, то определён “сдвинутый” функционал

$$F(f,h) = \sum_{i=1}^{m} c_i\big(f(s+h-t_i) + f(s+h+t_i)\big) + \int_0^{t_0} \big(f(s+h-t) + f(s+h+t)\big)\varphi(t)\,dt.$$

В самом деле, поскольку $0 < h \leqslant 1 - s - d(F)$, для $|t| \leqslant d(F)$ имеем $s + h + t < 1 - d(F) \leqslant 1$, $s + h - t \geqslant s - t \geqslant 0$. Иными словами, $F(\,\cdot\,, h) \in \mathcal{P}_{s+h}$, а параметры этого функционала совпадают с параметрами функционала F. Следовательно,

$$\operatorname{supp} F(\,\cdot\,,\, h) = \operatorname{supp} F + h, \quad d(F(\,\cdot\,,\, h)) = d(F). \tag{3}$$

Следующая лемма даёт простейшие свойства элементов множества $\mathcal{P}_s$.

Лемма 1. *Пусть $s \in (0,\, 1)$, $F \in \mathcal{P}_s$. Тогда для любой функции $f \in B[0,\, 1]$ справедливы оценки*

$$|f(s) - F(f)| \leqslant \frac{1}{2}\, \omega_2(f,\, d(F)), \tag{4}$$

$$|F(f) - 2f(s+h) + F(f,\, 2h)| \leqslant \omega_2(f, h + d(F)) \quad \forall h \in \left(0,\, \frac{1 - d(F) - s}{2}\right], \tag{5}$$

$$|F(f) - 2F(f,\, h) + F(f,\, 2h)| \leqslant \omega_2(f,\, h), \quad \forall h \in \left(0,\, \frac{1 - d(F) - s}{2}\right]. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть функционал F определён формулой (1), тогда

$$f(s) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f(s) + \int_0^{t_0} f(s)\varphi(t)\, dt\right).$$

Также обратим внимание, что если $|t| \leqslant d(F)$, то из определения величины $d(F)$ и ограничения $h \leqslant \frac{1-s-d(F)}{2}$ следует, что

$$[s - t,\, s + 2h + t] \subseteq [0,\, 1].$$

Имеем

$$\begin{aligned}
|F(f) - f(s)| = \Bigg| \sum_{i=1}^{m} c_i (f(s - t_i) + f(s + t_i)) + \int\limits_0^{t_0} (f(s-t) + f(s+t))\varphi(t)\, dt \\
- 2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f(s) + \int_0^{t_0} f(s)\varphi(t)\, dt\right) \Bigg| \\
\leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i |f(s - t_i) - 2f(s) + f(s + t_i)| \\
+ \int\limits_0^{t_0} \varphi(t) |f(s-t) - 2f(s) + f(s+t)|\, dt \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} c_i + \int_0^{t_0} \varphi(t)\, dt\right) \omega_2(f,\, d(F)) \\
= \frac{1}{2}\, \omega_2(f,\, d(F)),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|F(f) - 2f(s+h) + F(f,\,2h)| \\
&= \Bigg|\sum_{i=1}^{n} c_i(f(s-t_i) + f(s+t_i) - 4f(s+h) + f(s+2h-t_i) + f(s+2h+t_i)) \\
&\qquad + \int_0^{t_0} \varphi(t)(f(s-t)+f(s+t)-4f(s+h)+f(s+2h-t)+f(s+2h+t))dt\Bigg| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i(|f(s-t_i)-2f(s+h)+f(s+2h+t_i)|+|f(s+t_i)-2f(s+h)+f(s+2h-t_i)|) \\
&+ \int_0^{t_0} \varphi(t)(|f(s-t)-2f(s+h)+f(s+2h+t)|+|f(s+t)-2f(s+h)+f(s+2h-t)|)\,dt \\
&\qquad\qquad \leqslant 2\left(\sum_{i=0}^{m} c_i + \int_0^1 \varphi(t)\,dt\right)\omega_2(f,\,h+d(F)) = \omega_2(f,\,h+d(F)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|F(f) - 2F(f,\,h) + F(f,\,2h)| \\
&\qquad \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i(|f(s-t_i) - 2f(s+h-t_i) + f(s+2h-t_i)| \\
&\qquad\quad + |f(s+t_i) - 2f(s+h+t_i) + f(s+2h+t_i)|) \\
&\qquad + \int_0^{t_0} \varphi(t)(|f(s-t) - 2f(s+h-t) + f(s+2h-t)| \\
&\qquad\quad + |f(s+t) - 2f(s+h+t) + f(s+2h+t)|)\,dt \\
&\qquad\qquad \leqslant 2\left(\sum_{i=0}^{m} c_i + \int_0^1 \varphi(t)\,dt\right)\omega_2(f,\,h) = \omega_2(f,\,h). \quad \square
\end{aligned}
$$

Лемма 2 даёт оценку на величину модуля функции между двух точек с заданными средними (в том или ином смысле) значениями через второй модуль непрерывности.

Лемма 2. *Пусть* $h > 0$, $a, b \in [0, 1]$, $F_a \in \mathcal{P}_a$, $F_b \in \mathcal{P}_b$, *причём* $0 < b - a \leqslant 2h$, $h_1 = \max\{d(F_a),\, d(F_b)\} \leqslant \frac{b-a}{3}$. *Тогда*

$$
\left|f(x) - \frac{b-x}{b-a}F_a(f) - \frac{x-a}{b-a}F_b(f)\right| \leqslant \omega_2(f,\,h+h_1) \qquad \forall x \in [a,\,b], \quad f \in B[0,\,1]. \tag{7}
$$

Доказательство. Доказательство леммы для $F_a = \delta_a$, $F_b = \delta_b$, то есть

$$\left|f(x) - \frac{b-x}{b-a}f(a) - \frac{x-a}{b-a}f(b)\right| \leqslant \omega_2(f,\, h) \qquad \forall x \in [a,\, b],\ \forall f \in B[0,\, 1] \tag{8}$$

можно найти в [1], стр. 22.

Рассмотрим

$$g(x) = f(x) - \frac{b-x}{b-a}F_a(f) - \frac{x-a}{b-a}F_b(f).$$

Поскольку $g - f$ – линейная функция, справедливо равенство

$$\omega_2(f,\, h+h_1) = \omega_2(g,\, h+h_1),$$

и, кроме того, $F_a(g) = F_b(g) = 0$.

Пусть $\|g\| = \sup\limits_{x\in[a,\,b]} |g(x)|$, $\varepsilon > 0$. Достаточно доказать, что

$$\|g\| \leqslant \omega_2(g,\, h+h_1) + \varepsilon.$$

Пусть $x_\varepsilon \in [a,\, b]$ – такая точка, что $\|g\| \leqslant |g(x_\varepsilon)| + \frac{\varepsilon}{2}$.

Сначала рассмотрим случай $a + h_1 \leqslant x_\varepsilon \leqslant b - h_1$. Понятно, что мы можем считать, что $g(x_\varepsilon) > 0$. В силу положительности функционалов F_a и F_b и условия $F_a(g) = F_b(g) = 0$, найдутся такие точки $a^* \in [a - d(F_a),\, a + d(F_a)]$, $b^* \in [b - d(F_b), b + d(F_b)]$, что

$$g(a^*) \leqslant 0, \quad g(b^*) \leqslant 0.$$

Поскольку $x_\varepsilon \in [a^*,\, b^*]$, согласно формуле (8) имеем

$$\begin{aligned}\|g\| \leqslant g(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} &\leqslant \omega_2(f,\, h+h_1) + \frac{x_\varepsilon - a^*}{b^* - a^*}g(b^*) + \frac{b^* - x_\varepsilon}{b^* - a^*}g(a^*) + \frac{\varepsilon}{2}\\ &\leqslant \omega_2(f,\, h+h_1) + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Шаг в модуле непрерывности берётся из неравенства

$$b^* - a^* \leqslant (b + d(F_b)) - (a - d(F_a)) = (b-a) + (d(F_b) + d(F_a)) \leqslant 2h + 2h_1.$$

Рассмотрим случай $x_\varepsilon \in [a,\, a+h_1)$. Если $x_\varepsilon = a$, то по лемме 1

$$\begin{aligned}\|g\| \leqslant |g(a)| + \frac{\varepsilon}{2} = |f(a) - F_a(f)| + \frac{\varepsilon}{2} &\leqslant \frac{1}{2}\,\omega_2(f,\, d(F_a)) + \frac{\varepsilon}{2}\\ &\leqslant \omega_2(f,\, h+h_1) + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Если $x_\varepsilon \in (a,\, a+h_1)$, то рассмотрим

$$a_k = a + 2^k(x_\varepsilon - a).$$

Последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ монотонно и неограниченно возрастает, при этом $a_0 = x_\varepsilon$. Следовательно, найдётся номер $m > 0$ такой, что $a_m \geqslant a + h_1$, $a_{m-1} < a + h_1$. При этом, поскольку $h_1 \leqslant \frac{b-a}{3}$, получаем

$$\begin{aligned} a_m = a + 2^m(x_\varepsilon - a) = a_{m-1} + (a_{m-1} - a) < a + 2h_1 \\ \leqslant a + \frac{2}{3}(b-a) \leqslant b - h_1 \leqslant 1 - d(F_a), \end{aligned}$$

а, значит, $a_m \in [a+h_1,\, b-h_1]$ и, поскольку $0 \leqslant a_k - a \leqslant a_m - a \leqslant 1 - a - d(F_a)$, определены функционалы

$$F^{(k)} = F(\,\cdot\,,\, a_k - a), \quad 0 < k \leqslant m.$$

Несложно видеть, что, так как $F_a(g) = 0$, то

$$F_{a,\,1}(g) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2^i}(F_a(g) - 2F_{a,\,i}(g) + F_{a,\,i+1}(g)) - \frac{1}{2^{m-1}}F_{a,\,m}(g).$$

С учётом леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} \|g\| < |g(x_\varepsilon)| + \frac{\varepsilon}{2} = \left|\frac{1}{2}F_a(g) - g(x_\varepsilon) + \frac{1}{2}F_{a,\,1}(g) - \frac{1}{2}F_{a,\,1}(g)\right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ \leqslant \frac{1}{2}|F(g) - 2g(x_\varepsilon) + F_{a,\,1}(g)| + \frac{1}{2}|F_{a,\,1}(g)| + \frac{\varepsilon}{2} \\ \leqslant \frac{1}{2}\omega_2(f,\, h+h_1) + \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}(F(g) - 2F_{a,i}(g) + F_{a,i+1}(g)) - \frac{1}{2^{m-1}}F_{a,\,m}(g)\right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ \leqslant \frac{1}{2}\omega_2(f,\, h+h_1) + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^{i+1}}\omega_2(g,\, h+h_1) + \frac{1}{2^m}|F_{a,\,m}(g)| + \frac{\varepsilon}{2} \\ \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)\omega_2(g,\, h+h_1) + \frac{1}{2^m}|F_{a,\,m}(g)| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Из (3) следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} F^{(m)} = \operatorname{supp} F + a_m - a \subseteq [a_m - d(F_a),\, a_m + d(F_a)] \\ \subseteq [a_m - h_1,\, a_m + h_1] \subseteq [a,\, b]. \end{aligned}$$

Окончательно, с учётом формулы (2) имеем

$$\|g\| < |g(x_\varepsilon)| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)\omega_2(g,\, h+h_1) + \frac{1}{2^m}\|g\| + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует требуемое. Доказательство для случая $x_\varepsilon \in (b-h_1, b]$ проводится аналогично. $\square$

Для $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $s \in [0,\, 1-2h]$, $x \in (s,\, s+h]$, $f \in B[0,\, 1]$ и $F \in \mathcal{P}_s$ такого, что $s+2h+d(F) \leqslant 1$, через $X(F,\, f,\, x,\, h)$ обозначим множество точек

$$x^* \in \left[x+h-d(F)-\frac{h}{2^{\lceil \log_2\left(\frac{h}{b-a}\right)\rceil+1}},\ s+2h+d(F)\right]$$

таких, что

$$\left|f(x^*)-\frac{x-x^*}{x-s}F(f)-\frac{x^*-s}{x-s}f(x)\right| \leqslant \left(\frac{x^*-s}{x-s}-1\right)\omega_2(f,\, h). \tag{9}$$

Лемма 3 продолжает результат леммы 2 вне промежутка $[a,\, b]$.

Лемма 3. *Пусть* $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $a \in [0,\, 1-2h]$, $b \in (a,\, a+h]$, $f \in B[0,\, 1]$ *и* $F \in \mathcal{P}_a$, *причём*

$$d(F) \leqslant \min\left\{1-a-2h,\ \frac{b-a}{3}\right\}.$$

Тогда $X(F,\, f,\, b,\, h) \neq \varnothing$ *и для всех* $x^* \in X(F,\, f,\, b,\, h)$ *справедлива оценка*

$$\left|f(x)-\frac{b-x}{b-a}F(f)-\frac{x-a}{b-a}f(b)\right| \leqslant \frac{x-a}{b-a}\ \omega_2(f,\, h+d(F)), \tag{10}$$

где $x \in [b,\, x^*]$.

Доказательство. Как и раньше, обозначим

$$g(x) = f(x)-\frac{b-x}{b-a}F(f)-\frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Напомним, что $\omega_2(f,\ \cdot) = \omega_2(g,\ \cdot)$.

Пусть $m = \left\lceil \log_2 \frac{h}{b-a}\right\rceil$ и $b_k = a+2^k(b-a)$, $0<k\leqslant m$. Тогда

$$\begin{aligned} b_k-a \leqslant b_m-a = 2^m(b-a) = 2^{\left\lceil \log_2 \frac{h}{b-a}\right\rceil}(b-a) \\ \leqslant 2^{\log_2 \frac{h}{b-a}+1}(b-a) = 2h \leqslant 1-a-d(F), \quad 0<k\leqslant m, \end{aligned}$$

а значит, определены функционалы

$$F_k = F(\,\cdot\,,\, b_k-a), \quad 0<k\leqslant m.$$

Отдельно определим $F_0 = \delta_b$.

Согласно лемме 1, верно неравенство

$$|F(g) - 2F_k(g) + F_{k+1}(g)| \leqslant \omega_2(g,\, h + d(F)), \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1.$$

С учётом того, что $F(g) = F_0(g) = 0$, а также $d(F_k) = d(F)$, из сказанного легко вывести по индукции, что

$$|F_k(g)| \leqslant \left(2^k - 1\right)\, \omega_2(f,\, h + d(F)) = \left(\frac{b_k - a}{b-a} - 1\right) \omega_2(f,\, h + d(F)), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

и, в частности,

$$|F_m(g)| \leqslant \left(\frac{b_m - a}{b-a} - 1\right) \omega_2(f,\, h + d(F)). \tag{11}$$

Докажем, что $X(F,\, f,\, x,\, h) \neq \varnothing$.

Предположим, что

$$|g(x)| > \left(\frac{x-a}{b-a} - 1\right)\omega_2(f,\, h + d(F)) \quad \forall x \in \operatorname{supp} F_m. \tag{12}$$

Пусть $t,\, x \in \operatorname{supp} F_m$, причём $t \leqslant x$ и, для определённости,

$$g(x) > \left(\frac{x-a}{b-a} - 1\right)\omega_2(f,\, h + d(F)) = \frac{x-b}{b-a}\omega_2(f,\, h + d(F)).$$

Тогда по лемме 2

$$g(t) - \frac{t-b}{x-b}g(x) = g(t) - \frac{t-b}{x-b}g(x) - \frac{x-t}{x-b}g(b) \geqslant -\omega_2(f,\, h + d(F)),$$

откуда, с учётом неравенства $h_1 \leqslant \frac{b-a}{3}$,

$$\begin{aligned} g(t) &\geqslant -\omega_2(f, h + d(F)) + \frac{t-b}{x-b}g(x) \\ &> -\omega_2(f,\, h + d(F)) + \frac{t-b}{x-b} \cdot \frac{x-b}{b-a}\omega_2(f,\, h + d(F)) \\ &= \left(\frac{t-b}{b-a} - 1\right)\omega_2(f,\, h + d(F)) \\ &\geqslant \left(\frac{b_m - h_1 - b}{b-a} - 1\right)\omega_2(f,\, h + d(F)) \\ &\geqslant \left(\frac{b_m - b}{b-a} - \frac{4}{3}\right)\omega_2(f,\, h + d(F)) \qquad (13) \\ &\geqslant \left(\frac{b_1 - b}{b-a} - \frac{4}{3}\right)\omega_2(f,\, h + d(F)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3}\omega_2(f,\, h+d(F)) \geqslant -\frac{2}{3}\omega_2(f,\, h+d(F)) \\
&= -\left(\frac{b_1-a}{b-a}-\frac{4}{3}\right)\omega_2(f,\, h+d(F)) \\
&\geqslant -\left(\frac{b_m-h_1-b}{b-a}-1\right)\omega_2(f,\, h+d(F)) \\
&\geqslant -\left(\frac{t-b}{b-a}-1\right)\omega_2(f,\, h+d(F)).
\end{aligned}
$$

Если $g(t)<0$, то из (13) получаем, что

$$|g(t)| \leqslant \left(\frac{t-b}{b-a}-1\right)\omega_2(f,\, h+d(F)).$$

Таким образом, при условии (12) функция g не может менять знак на множестве $\operatorname{supp} F_m$. Но тогда в силу положительности функционала F_m имеем

$$F_m(g) > F_m\left(\frac{x-a}{b-a}-1\right)\omega_2(f, h+d(F)) = \left(\frac{b_m-a}{b-a}-1\right)\omega_2(f, h+d(F)),$$

что противоречит формуле (11).

Для доказательства неравенства (10) можно применить лемму 2 к функционалам δ_b и δ_{x^*}:

$$\left|g(x)-\frac{x-b}{x^*-b}g(x^*)\right| \leqslant \omega_2(f,\, h+d(F)),$$

откуда следует требуемое. □

Далее θ_x будет будет обозначать функцию Хевисайда:

$$\theta_x(t) = \begin{cases} 0, & t<x, \\ 1, & t \geqslant x. \end{cases}$$

Пусть $Y=(y_0,\ldots,y_n)$, где $0 \leqslant y_0 < \ldots < y_n \leqslant 1$, $x\in[0,\,1]$. Обозначим через $\mathfrak{F}_{x,\,Y}$ множество функционалов F над пространством $B[0,\,1]$, представимых в виде

$$F = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i F_i,$$

где $\gamma_i > 0$, $F_i \in \mathcal{P}_{y_i}$, причём

$$\max_{0\leqslant i<n} d(F_i) \leqslant \frac{y_{i+1}-y_i}{3}, \tag{14}$$

$$\frac{F(e_1)}{F(e_0)} = x. \tag{15}$$

Через $d_Y(F)$ обозначим величину $\max_{0\leqslant i<n} d(F_i)$. Заметим, что функционалы F_i и коэффициенты γ_i однозначно определены условием $F \in \mathfrak{F}_{x,\,Y}$. В самом деле, из условия (15) следует, что $\operatorname{supp} F_i \cap \operatorname{supp} F_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\operatorname{supp} F_i \subset [a_i,\, b_i]$, где $[a_i,\, b_i] = [y_i - d_Y(F),\, y_i + d_Y(F)] \cap [0,\, 1]$. Поэтому

$$F((\theta_{a_i} - \theta_{b_i})f) = \gamma_i F_i((\theta_{a_i} - \theta_{b_i})f) = \gamma_i F_i(f)$$

при всех $f \in B[0,\, 1]$, откуда $\gamma_i = F(\theta_{a_i} - \theta_{b_i})$, $F_i(f) = \frac{F((\theta_{a_i} - \theta_{b_i})f)}{F(\theta_{a_i} - \theta_{b_i})}$.

Доказательство основного результата сводится к получению оценок для величин вида $|F(f) - F(e_0)f(x)|$ через второй модуль непрерывности, где $F \in \mathfrak{F}_{x,\,Y}$.

Лемма 4 позволяет переходить от длинных наборов Y к коротким.

Лемма 4. *Пусть $h,\, h_1 > 0$, $f \in B[0,\, 1]$, $Y = (y_0, \dots, y_n)$, где $0 \leqslant y_0 < \dots < y_n \leqslant 1$, $x \in (y_l,\, y_{l+1}]$ и*

$$F = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i F_i \in \mathfrak{F}_{x,\,Y},$$

где $F_i \in \mathcal{P}_{y_i}$, причём $d_Y(F) \leqslant h_1$. Пусть также для каждого $0 \leqslant i \leqslant l$ существуют $x_i \in X(F_i,\, f,\, x,\, h)$ и номер k_i такие, что

$$\max\{x,\, x_i - h\} \leqslant y_{k_i} < x_i, \quad \frac{F(\theta_{y_{k_i}-h_1} e_1)}{F(\theta_{y_{k_i}-h_1} e_0)} \leqslant x_i.$$

Тогда найдутся такие $F^{(i)} \in \mathfrak{F}_{x_i,\,Y^{(i)}}$, где $Y^{(i)} = (y_{k_i}, \dots, y_n)$, что $d_{Y^{(i)}}(F^{(i)}) \leqslant h_1$,

$$\frac{F^{(i)}(\theta_{y_m-h_1} e_1)}{F^{(i)}(\theta_{y_m-h_1} e_0)} = \frac{F(\theta_{y_m-h_1} e_1)}{F(\theta_{y_m-h_1} e_0)} \quad \forall m \geqslant k_i, \tag{16}$$

$$F(e_0) > \sum_{i=0}^{l} F^{(i)}(e_0), \tag{17}$$

$$|F(f) - F(e_0)f(x)| \leqslant \left(F(e_0) - \sum_{i=0}^{l} F^{(i)}(e_0)\right)\omega_2(f,\, h + h_1) + \sum_{i=0}^{l} |F^{(i)}(g_i) - F^{(i)}(e_0)g_i(x_i)|, \tag{18}$$

где

$$g_i(t) = f(t) - \frac{x-t}{x-y_i}F_i(f) - \frac{t-y_i}{x-y_i}f(x).$$

Доказательство. Мы будем пользоваться некоторыми тождествами, проверка которых не составляет труда. Пусть $\gamma_0, \dots, \gamma_n$, $y_0, \dots, y_n, x, l$ – как в условии, $\gamma = \sum\limits_{i=0}^{l} \gamma_i(x-y_i)$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{l} \sum_{j=l+1}^{n} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma} = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i. \tag{19}$$

Если α, α_0, $\dots$, $\alpha_n, \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \gamma_i\alpha_i - \alpha\sum_{i=0}^{n}\gamma_i \\ = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=l+1}^{n} \gamma_i\gamma_j\left((x-y_i)\alpha_j + (y_j-x)\alpha_i - (y_j-y_i)\alpha\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Наконец, если x_i, k_i – как в условии для $0 \leqslant i \leqslant l$ и найдутся номер $k_i \leqslant l_i < n$ и числа $\gamma_{k_i}^{(i)}, \dots, \gamma_{l_i}^{(i)}$ такие, что

$$\sum_{j=k_i}^{l_i} \gamma_j^{(i)}(x_i-y_j) = \sum_{j=l_i+1}^{n} \frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}(y_j-x_i),$$

то

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{l}\Bigg(\sum_{j=l+1}^{l_i} \frac{\gamma_i\gamma_j}{\gamma}(y_j-y_i) - \sum_{y=k_i}^{l_i} \frac{\gamma_j^{(i)}(y_j-y_i)}{x-y_i} \\ + \left(\sum_{j=k_i}^{l_i}\gamma_j^{(i)} + \sum_{j=l_i+1}^{n}\frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}\right)\frac{x_i-y_i}{x-y_i}\Bigg) = \sum_{i=0}^{n}\gamma_i.\end{aligned} \tag{21}$$

Построим $F^{(i)}$. Пусть $y_{l_i} < x_i \leqslant y_{l_i+1}$,

$$\gamma_j^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{j=l_i+1}^{n} \frac{\gamma_j\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}(y_j-x_i)}{\sum\limits_{j=k_i}^{l_i}\gamma_j(x_i-y_j)}\cdot\gamma_j = \dfrac{\sum\limits_{j=l_i+1}^{n}\gamma_j(y_j-x_i)}{\sum\limits_{j=k_i}^{l_i}\gamma_j(x_i-y_j)}\cdot\dfrac{\gamma_i\gamma_j(x_i-y_i)}{\gamma}, & k_i\leqslant j\leqslant l_i, \\ \dfrac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}, & l_i+1\leqslant j\leqslant n. \end{cases}$$

$$F^{(i)} = \sum_{j=k_i}^{n} \gamma_j^{(i)} F_j.$$

Докажем, что $F^{(i)} \in \mathfrak{F}_{x_i,\, Y^{(i)}}$. Требуется проверить, что $\frac{F^{(i)}(e_1)}{F^{(i)}(e_0)} = x_i$ или, что то же самое, $F^{(i)}(x_i e_0 - e_1) = 0$:

$$F^{(i)}(x_i e_0 - e_1) = \sum_{j=k_i}^{n} \gamma_j^{(i)}(x_i - y_j) = \sum_{j=k_i}^{l_i} \gamma_j^{(i)}(x_i - y_j) + \sum_{j=l_{i+1}}^{n} \gamma_j^{(i)}(x_i - y_j)$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=l_i+1}^{n} \frac{\gamma_j\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}(y_j - x_i)}{\sum\limits_{j=k_i}^{l_i} \gamma_j(x_i - y_j)} \sum_{j=k_i}^{l_i} \gamma_j(x_i - y_j) + \sum_{j=l_i+1}^{n} \frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}(x_i - y_j)$$

$$= \sum_{j=l_i+1}^{n} \frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}(y_j - x_i) + \sum_{j=l_i+1}^{n} \frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}(x_i - y_j) = 0.$$

Теперь докажем равенство (16). Если $m > l_i$, то

$$\frac{F^{(i)}(\theta_{y_m-h_1}e_1)}{F^{(i)}(\theta_{y_m-h_1}e_0)} = \frac{\sum\limits_{j=m}^{n} \gamma_j^{(i)} y_j}{\sum\limits_{j=m}^{n} \gamma_j^{(i)}} = \frac{\frac{\sum\limits_{j=l_i+1}^{n} \frac{\gamma_j\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}(y_j-x_i)}{\sum\limits_{j=k_i}^{l_i}\gamma_j(x_i-y_j)} \sum\limits_{j=m}^{n} \gamma_j y_j}{\frac{\sum\limits_{j=l_i+1}^{n} \frac{\gamma_j\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}(y_j-x_i)}{\sum\limits_{j=k_i}^{l_i}\gamma_j(x_i-y_j)} \sum\limits_{j=m}^{n} \gamma_j}$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=m}^{n} \gamma_j y_j}{\sum\limits_{j=m}^{n} \gamma_j} = \frac{F(\theta_{y_m-h_1}e_1)}{F(\theta_{y_m-h_1}e_0)}.$$

Проверим неравенство (17). По условию $\frac{F(\theta_{y_{k_i}-h_1}e_1)}{F(\theta_{y_{k_i}-h_1}e_0)} \leqslant x_i$, или, иначе говоря,

$$0 \leqslant F(\theta_{y_{k_i}-h_1}(x_i e_0 - e_1)) = \sum_{j=k_i}^{n} \gamma_j(x_i - y_j)$$

$$= \sum_{j=k_i}^{l_i} \gamma_j (x_i - y_j) - \sum_{j=l_i+1}^{n} \gamma_j (y_j - x_i),$$

откуда

$$\frac{\sum\limits_{j=l_i+1}^{n} \gamma_j (y_j - x_i)}{\sum\limits_{j=k_i}^{l_i} \gamma_j (x_i - y_j)} \leqslant 1,$$

а значит, $\gamma_j^{(i)} \leqslant \frac{\gamma_i \gamma_j (x - y_i)}{\gamma}$ для всех $j \geqslant k_i$. С учётом формулы (19) получаем

$$\sum_{i=0}^{l} F^{(i)}(e_0) = \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=k_i}^{n} \gamma_j^{(i)} \leqslant \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=k_i}^{n} \frac{\gamma_i \gamma_j (x - y_i)}{\gamma} \leqslant \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=l+1}^{n} \frac{\gamma_i \gamma_j (x - y_i)}{\gamma}$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=l+1}^{n} \frac{\gamma_i \gamma_j (y_j - y_i)}{\gamma} = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i = F(e_0).$$

Наконец, докажем неравенство (18). Из (20) сразу следует, что

$$F(f) - F(e_0) f(x) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i F_i(f) - f(x) \sum_{i=0}^{n} \gamma_i$$

$$= \frac{1}{\gamma} \sum_{i=0}^{l} \gamma_i \sum_{j=l+1}^{n} \gamma_j \left((x - y_i) F_j(f) + (y_j - x) F_i(f) - (y_j - y_i) f(x) \right). \tag{22}$$

Согласно формуле (22),

$$F(f) - F(e_0) f(x)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \sum_{i=0}^{l} \gamma_i \sum_{j=l+1}^{n} \gamma_j \left((x - y_i) F_j(f) + (y_j - x) F_i(f) - (y_j - y_i) f(x) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=l+1}^{n} \frac{\gamma_i \gamma_j (x - y_i)}{\gamma} \left(F_j(f) + \frac{y_j - x}{x - y_i} F_i(f) - \frac{y_j - y_i}{x - y_i} f(x) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=l+1}^{n} \frac{\gamma_i \gamma_j (x - y_i)}{\gamma} F_j \left(f(t) - \frac{x - t}{x - y_i} F_i(f) - \frac{t - y_i}{x - y_i} f(x) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=l+1}^{n} \frac{\gamma_i \gamma_j (x-y_i)}{\gamma} F_j(g_i),$$

где g_i как в условии леммы. Далее, из определения функционалов $F^{(i)}$ нетрудно вывести, что

$$\left| \sum_{j=l+1}^{n} \frac{\gamma_i \gamma_j (x-y_i)}{\gamma} F_j(g_i) \right|$$
$$\leqslant \left| \sum_{j=l+1}^{k_i-1} \frac{\gamma_i \gamma_j (x-y_i)}{\gamma} F_j(g_i) + \sum_{j=k_i}^{l_i} \left(\frac{\gamma_i \gamma_j (x-y_i)}{\gamma} - \gamma_j^{(i)} \right) F_j(g_i) + F^{(i)}(e_0) g_i(x_i) \right|$$
$$+ \left| F^{(i)}(g_i) - F(e_0) g(x_i) \right| \leqslant \sum_{j=l+1}^{k_i-1} \frac{\gamma_i \gamma_j (x-y_i)}{\gamma} \left| F_j(g_i) \right|$$
$$+ \sum_{j=k_i}^{l_i} \left(\frac{\gamma_i \gamma_j (x-y_i)}{\gamma} - \gamma_j^{(i)} \right) \left| F_j(g_i) \right| + F^{(i)}(e_0) \left| g_i(x_i) \right| + \left| F^{(i)}(g_i) - F(e_0) g(x_i) \right|.$$

По лемме 3 имеем

$$|g_i(t)| \leqslant \frac{t-y_i}{x-y_i} \omega_2(f,\, h+h_1), \quad \forall t \in [x,\, x_i],$$
$$|g_i(x_i)| \leqslant \left(\frac{x_i - y_i}{x-y_i} - 1 \right) \omega_2(f,\, h+h_1).$$

В силу положительности функционалов $F_0, \ldots, F_n$ отсюда следует, что

$$|F_j(g_i)| \leqslant \frac{y_j - y_i}{x - y_i} \omega_2(f,\, h+h_1), \quad l+1 < j \leqslant l_i.$$

Отдельно требуется рассмотреть случай $j = l+1$, поскольку тогда $\operatorname{supp} F_j$ может выходить за промежуток $[x,\, x_i]$. По лемме 2:

$$|F_j(g_i)| = \left| F_j(f) + \frac{y_j - x}{x - y_i} F_i(f) - \frac{y_j - y_i}{x - y_i} f(x) \right|$$
$$= \frac{y_j - y_i}{x - y_i} \left| \frac{x - y_i}{y_j - y_i} F_j(f) + \frac{y_j - x}{y_j - y_i} F_i(f) - f(x) \right| \leqslant \frac{y_j - y_i}{x - y_i} \omega_2(f,\, h+h_1).$$

Поэтому

$$|F(f)-F(e_0)f(x)| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{l}\left(\sum_{j=l+1}^{n}\frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}F_j(g_i)\right)\right|$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{l}\Big(\sum_{j=l+1}^{k_i-1}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}+\sum_{j=k_i}^{l_i}\left(\frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}-\gamma_j^{(i)}\right)\frac{y_j-y_i}{x-y_i}+F^{(i)}(e_0)\frac{x_i-y_i}{x-y_i}$$
$$-F^{(i)}(e_0)\Big)\omega_2(f,\,h+h_1)+\sum_{i=0}^{l}\left|F^{(i)}(g_i)-F^{(i)}(e_0)g(x_i)\right|$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=0}^{l}\left(\sum_{j=l+1}^{l_i}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}-\sum_{j=k_i}^{l_i}\frac{\gamma_j^{(i)}(y_j-y_i)}{x-y_i}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\sum_{j=k_i}^{l_i}\gamma_j^{(i)}+\sum_{j=l_i+1}^{n}\frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}\right)\frac{x_i-y_i}{x-y_i}\right)-\sum_{i=0}^{l}F^{(i)}(e_0)\right)\omega_2(f,\,h+h_1)$$
$$+\sum_{i=0}^{l}\left|F^{(i)}(g_i)-F^{(i)}(e_0)g(x_i)\right|,$$

и нам осталось сослаться на (21). □

Теоремы

Теорема 3. *Пусть* $h,\,h_1>0$, $f\in B[0,1]$, $Y=(y_0,\ldots,y_n)$, *где* $0\leqslant y_0<\ldots<y_n\leqslant 1$, $y_n-y_0\leqslant 2h$, $F\in\mathfrak{F}_{x,Y}$, $d_Y(F)\leqslant h_1$. *Тогда*

$$|F(f)-F(e_0)f(x)|\leqslant F(e_0)\omega_2(f,\,h+h_1)\quad \forall f\in B[0,\,1].$$

Доказательство. Пусть $F=\sum\limits_{j=0}^{n}\gamma_jF_j$, где $F_j\in\mathcal{P}_{y_j}$. По построению $y_i\leqslant y_l<x\leqslant y_{l+1}\leqslant y_j$. Из включения $x\in(y_l,\,y_{l+1}]$, согласно формуле (22), получаем

$$F(f)-F(e_0)f(x)$$
$$=\frac{1}{\gamma}\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=l+1}^{n}\gamma_i\gamma_j\left((x-y_i)F_j(f)+(y_j-x)F_i(f)-(y_j-y_i)f(x)\right).$$

Используем условие $y_i<x<y_j$. По определению множества $\mathfrak{F}_{x,Y}$ имеем $d(F_i)$, $d(F_j)\leqslant\frac{y_j-y_i}{3}$, а значит, по лемме 2,

$$|(x-y_i)F_j(f)+(y_j-x)F_i(f)-(y_j-y_i)f(x)|$$

$$= (y_j - y_i)\left|\frac{x - y_i}{y_j - y_i}F_j(f) + \frac{y_j - x}{y_j - y_i}F_i(f) - f(x)\right| \\ \leqslant (y_j - y_i)\omega_2(f,\, h + h_1),$$

откуда, с учётом (19) получаем

$$\begin{aligned}
&|F(f) - f(x)F(e_0)| \\
&\quad\leqslant \frac{1}{\gamma}\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=l+1}^{n}\gamma_i\gamma_j\,|(x - y_i)F_j(f) + (y_j - x)F_i(f) - (y_j - y_i)f(x)| \\
&\quad\leqslant \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=l+1}^{n}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j - y_i)}{\gamma}\,\omega_2(f,\, h + h_1) = F(e_0)\,\omega_2(f,\, h + h_1). \quad \square
\end{aligned}$$

Теорема 4. *Пусть* $h, h_1 > 0$, $f \in B[0,\,1]$, $Y = (y_0, \ldots, y_n)$, *где* $0 \leqslant y_0 < \ldots < y_n \leqslant 1$, $F \in \mathfrak{F}_{x,\,Y}$, $d_Y(F) \leqslant h_1 \leqslant \frac{h}{4}$. *При этом* $x \in \bigl(y_0,\, y_0 + \frac{h}{2}\bigr]$, *и для любого* $z \in \bigl[x + \frac{h}{2},\, y_n\bigr)$ *найдётся* $y_k \in \bigl[z - \frac{h}{2},\, z\bigr)$ *такой, что*

$$\frac{F(\theta_{y_k - h_1}e_1)}{F(\theta_{y_k - h_1}e_0)} \leqslant z. \tag{23}$$

Тогда

$$|F(f) - F(e_0)f(x)| \leqslant F(e_0)\omega_2(f,\, h + h_1) \quad \forall f \in B[0,\,1].$$

Доказательство. Пусть

$$r = \min\left\{R \in \mathbb{N}\,|\,y_n - y_0 \leqslant \frac{hR}{3}\right\}.$$

Доказательство проведём индукцией по r.

База индукции: $r \leqslant 6$. В этом случае $y_n - y_0 \leqslant 2h$ и нам достаточно сослаться на теорему 3.

Индукционный переход. Пусть $\frac{h(r-1)}{3} < y_n - y_0 \leqslant \frac{hr}{3}$, $y_l < x \leqslant y_{l+1}$, функционал определён формулой

$$F = \sum_{j=0}^{n}\gamma_j F_j,$$

где $F_j \in \mathcal{P}_{y_j}$.

Далее, пусть $x_i \in X(F_i,\, f,\, x,\, h)$ для $0 \leqslant i \leqslant l$. Так как

$$x_i \geqslant x + h - h_1 - \frac{h}{2^{\lceil \log_2\left(\frac{h}{x-y_i}\right)\rceil+1}} \geqslant x + h - \frac{h}{4} - \frac{h}{2^{\lceil \log_2(2)\rceil+1}} = x + \frac{3}{4}h - \frac{h}{4} = x + \frac{h}{2},$$

то, по условию, найдутся номера k_i такие, что $y_{k_i} \in \left[x_i - \frac{h}{2},\, x_i\right)$ и

$$\frac{F(\theta_{y_{k_i}-h_1}e_1)}{F(\theta_{y_{k_i}-h_1}e_0)} \leqslant x_i.$$

Значит, по лемме 4 найдутся такие $F^{(i)} \in \mathfrak{F}_{x_i,\, Y^{(i)}}$, где $Y^{(i)} = (y_{k_i}, \dots, y_n)$, что

$$|F(f) - F(e_0)f(x)| \leqslant \Big(F(e_0) - \sum_{i=0}^{l} F^{(i)}(e_0)\Big)\omega_2(f,\, h+h_1) + \sum_{i=0}^{l} |F^{(i)}(g_i) - F^{(i)}g_i(x_i)|,$$

где

$$g_i(t) = f(t) - \frac{x-t}{x-y_i}F_i(f) - \frac{t-y_i}{x-y_i}f(x).$$

Достаточно доказать, что

$$|F^{(i)}(g_i) - F^{(i)}g_i(x_i)| \leqslant F^{(i)}(e_0)\omega_2(f,\, h+h_1).$$

Согласно лемме 4, $d_{Y^{(i)}}(F^{(i)}) \leqslant\, h_1$ и, если $y_m \geqslant y_{k_i}$, то

$$\frac{F^{(i)}(\theta_{y_m-h_1}e_1)}{F^{(i)}(\theta_{y_m-h_1}e_0)} = \frac{F(\theta_{y_m-h_1}e_1)}{F(\theta_{y_m-h_1}e_0)},$$

поэтому для $z \in \left[x_i + \frac{h}{2},\, y_n\right)$ и $F^{(i)}$ выполнено условие (23).

Таким образом, функционалы $F^{(i)}$ удовлетворяют условию теоремы, и чтобы применить индукционное предположение, осталось показать, что $y_{k_i} > y_0 + \frac{h}{3}$.

Уже отмечалось, что $y_{k_i} \geqslant x_i - \frac{h}{2}$, кроме того, легко убедиться, что

$$x > \frac{h}{2^{\left\lceil \ln\left(\frac{h}{x-y_i}\right)\right\rceil+1}} + y_i.$$

С учётом этого имеем

$$y_{k_i} \geqslant x_i - \frac{h}{2} \geqslant x + h - \frac{h}{6} - \frac{h}{2^{\left\lceil \log_2\left(\frac{h}{x-y_i}\right)\right\rceil+1}} - \frac{h}{2}$$
$$= x + \frac{h}{3} - \frac{h}{2^{\left\lceil \log_2\left(\frac{h}{x-y_i}\right)\right\rceil+1}} > y_i + \frac{h}{3} \geqslant y_0 + \frac{h}{3}. \quad \square$$

Введём ещё одно определение. Пусть функционал $F \in \mathcal{P}_s$ задан формулой

$$F(f) = \sum_{i=0}^{m} c_i(f(s-t_i) + f(s+t_i)) + \int_0^{t_0} (f(s-t) + f(s+t))\varphi(t)\,dt.$$

Тогда через $\overline{F}$ обозначим функционал

$$\overline{F}(f) = \sum_{i=0}^{m} c_i(f(1-s-t_i)+f(1-s+t_i))+\int_0^{t_0} (f(1-s-t)+f(1-s+t))\varphi(t)\,dt.$$

Обращаем внимание, что $\overline{F} \in \mathcal{P}_{1-s}$ и, главное,

$$\overline{F}(f(1-\,\cdot\,)) = F(f).$$

Доказательство теоремы 2. Обозначим $\frac{1}{\sqrt{n}}$ через h. Пусть

$$l(x) = \max\left\{j \,:\, \frac{j}{n} < x\right\}, \quad \overline{l}(x) = \max\left\{j \,:\, \frac{j}{n} \leqslant x\right\},$$
$$m(x) = \min\left\{j \,:\, \frac{j}{n} > x\right\}, \quad \overline{m}(x) = \min\left\{j \,:\, \frac{j}{n} \geqslant x\right\}.$$

Мы будем пользоваться сокращённой записью для сумм:

$$\left(\alpha \sum_{i=r_1}^{s_1} + \beta \sum_{i=r_2}^{s_2}\right) a_i = \alpha \sum_{i=r_1}^{s_1} a_i + \beta \sum_{i=r_2}^{s_2} a_i.$$

Палтаня показал ([1], с. 108, утверждение 4.2.6), что при $n \geqslant 60$ существуют такие положительные на $(0, 1)$ функции λ, μ, что

$$\left(\mu(x) \sum_{j=\overline{l}\left(x-\frac{h}{2}\right)}^{l(x)} + \lambda(x) \sum_{j=m(x)}^{\overline{l}(x+\frac{h}{2})} + \sum_{j=m(x+h)}^{n}\right) p_{n,j}(x) \left(x - \frac{j}{n}\right) = 0, \qquad (24)$$

$$\left(\lambda(x)\sum_{j=m(x)}^{\overline{l}(x+\frac{h}{2})}+\sum_{j=m(x+h)}^{n}\right)p_{n,j}(x)\left(z-\frac{j}{n}\right)\geqslant 0 \quad \forall z\in\left[x+\frac{3}{4}h, x+h\right), \tag{25}$$

$$\left(\lambda(x)\sum_{j=m(z-h)}^{\overline{l}(x+\frac{h}{2})}+\sum_{j=m(x+h)}^{n}\right)p_{n,j}(x)\left(z-\frac{j}{n}\right)\geqslant 0 \quad \forall z\in\left[x+h,\, x+\frac{5}{4}h\right), \tag{26}$$

$$\sum_{j=m(x+h)}^{n} p_{n,\,j}(x)\left(z-\frac{j}{n}\right)\geqslant 0 \quad \forall z\in\left[x+\frac{5}{4}h,\, x+\frac{3}{2}h\right), \tag{27}$$

$$\sum_{j=m(z-\frac{h}{2})}^{n} p_{n,\,j}(x)\left(z-\frac{j}{n}\right)\geqslant 0 \quad \forall z\in\left[x+\frac{3}{2}h,\, 1\right), \tag{28}$$

$$1-\lambda(x)-\mu(1-x)>0. \tag{29}$$

Рассмотрим операторы

$$\Theta(f,\,x)=\left(\mu(x)\sum_{j=\overline{l}\left(x-\frac{h}{2}\right)}^{m(x)}+\lambda(x)\sum_{j=l(x)}^{\overline{m}\left(x+\frac{h}{2}\right)}+\sum_{j=l(x+h)}^{n}\right)p_{n,\,j}(x)F_j(f),$$

$$\overline{\Theta}(f,\,x)=\left(\sum_{j=0}^{m(x-h)}+\lambda(1-x)\sum_{j=\overline{m}\left(x-\frac{h}{2}\right)}^{l(x)}+\mu(1-x)\sum_{j=l(x)}^{\overline{m}\left(x+\frac{h}{2}\right)}\right)p_{n,\,j}(x)F_j(f),$$

$$\Omega(f,\,x)=B_n(f,\,x)-\Theta(f,\,x)-\overline{\Theta}(f,\,x).$$

Если мы докажем, что

$$|\Theta(f,\,x)-\Theta(e_0,\,x)f(x)|\leqslant\Theta(e_0,\,x)\omega_2\left(f,\,h+\frac{7}{3}h_1\right), \tag{30}$$

$$\left|\overline{\Theta}(f,\,x)-\overline{\Theta}(e_0,\,x)f(x)\right|\leqslant\overline{\Theta}(e_0,\,x)\omega_2\left(f,\,h+\frac{7}{3}h_1\right), \tag{31}$$

$$\Omega(e_0,\,x)>0, \tag{32}$$

$$|\Omega(f,\,x)-\Omega(e_0,\,x)f(x)|\leqslant\Omega(e_0,\,x)\omega_2(f,\,h+h_1), \tag{33}$$

то

$$
\begin{aligned}
|B_n(f,\,x)-f(x)| &= |B_n(f,\,x)-B_n(e_0,\,x)f(x)| \\
&= \left|(\Theta+\overline{\Theta}+\Omega)(f,\,x)-(\Theta+\overline{\Theta}+\Omega)(e_0,\,x)f(x)\right| \\
&\leqslant |\Theta(f,\,x)-\Theta(e_0,\,x)f(x)|+\left|\overline{\Theta}(f,\,x)-\overline{\Theta}(e_0,\,x)f(x)\right| \\
&\qquad + |\Omega(f,\,x)-\Omega(e_0,\,x)f(x)| \\
&\leqslant \left(\Theta+\overline{\Theta}\right)(e_0,\,x)\omega_2\left(f,\,h+\frac{7}{3}h_1\right)+\Omega(e_0,\,x)\omega_2(f,\,h+h_1) \\
&\leqslant \omega_2\left(f,\,h+\frac{7}{3}h_1\right).
\end{aligned}
$$

Для начала докажем неравенство (30). Покажем, что при фиксированном $x \in (0,\,1)$ справедливо включение $\Theta(f,\,x) \in \mathfrak{F}_{x,\,Y}$ для некоторого Y.

Пусть

$$
\begin{aligned}
&m_1 = m(x)-\overline{l}\left(x-\frac{h}{2}\right), \quad m_2 = m_1+\overline{m}\left(x+\frac{h}{2}\right)-l(x), \\
&M = m_2+n-l(x+h), \\
&\sigma(j) = \begin{cases} j+l\left(x-\frac{h}{2}\right), & 0 \leqslant j \leqslant m_1, \\ j+l(x), & m_1 < j \leqslant m_2, \\ j+l(x+h), & m_2 < j \leqslant M, \end{cases} \\
&\gamma_j = \begin{cases} \mu(x)p_{n,\,\sigma(j)}(x), & 0 \leqslant j \leqslant m_1, \\ \lambda(x)p_{n,\,\sigma(j)}(x), & m_1 < j \leqslant m_2, \\ p_{n,\,\sigma(j)}(x), & m_2 < j \leqslant M, \end{cases} \\
&y_j = \frac{\sigma(j)}{n}, \quad Y = (y_0,\,\ldots,\,y_M).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\Theta(\,\cdot\,,\,x) = F = \sum_{j=0}^{M}\gamma_j F_{\sigma(j)}.
$$

Из (24) следует, что

$$\Theta(xe_0 - e_1,\, x)$$
$$= \left(\mu(x) \sum_{j=\overline{m}\left(x-\frac{h}{2}\right)}^{l(x)} + \lambda(x) \sum_{j=l(x)}^{\overline{m}\left(x+\frac{h}{2}\right)} + \sum_{j=l(x+h)}^{n}\right) p_{n,\,j}(x) F_j(xe_0 - e_1)$$
$$= \left(\mu(x) \sum_{j=\overline{m}\left(x-\frac{h}{2}\right)}^{l(x)} + \lambda(x) \sum_{j=m(x)}^{\overline{l}\left(x+\frac{h}{2}\right)} + \sum_{j=m(x+h)}^{n}\right) p_{n,\,j}(x) \left(x - \frac{j}{n}\right) = 0,$$

или, иными словами, что $\frac{F(e_1)}{F(e_0)} = x$. Если $x + h \geqslant 1$, то по теореме 3

$$|F(f) - F(e_0) f(x)| \leqslant F(e_0)\omega_2(f,\, h + h_1) \leqslant F(e_0)\omega_2\left(f,\, h + \frac{7}{3}h_1\right).$$

Иначе увеличим шаг до $h^* = h + \frac{4}{3}h_1$. Пусть $0 \leqslant i \leqslant m_1$, $x_i \in X(F_i,\, f,\, x,\, h^*)$. Тогда, поскольку $x - y_i \leqslant \frac{h}{2} < \frac{h^*}{2}$, имеем

$$x_i \geqslant x + h^* - d(F_i) - \frac{h^*}{2^{\lceil \log_2\left(\frac{h^*}{x-y_i}\right)\rceil + 1}} > x + h^* - h_1 - \frac{h^*}{4} = x + \frac{3}{4}h.$$

Для того, чтобы применить лемму 4, покажем, что для $0 \leqslant i \leqslant m_1$ найдутся номера k_i такие, что

$$F(\theta_{y_{k_i}}(x_i e_0 - e_1)) \geqslant 0.^{1}$$

Если $x_i \in [x + \frac{3}{4}h, x + h]$, то согласно формуле (25), $k_i = m_1 + 1$:

$$F(\theta_{y_{m_1+1} - h_1}(x_i e_0 - e_1)) = \Theta(\theta_{m(x)}(x_i e_0 - e_1))$$
$$= \left(\lambda(x) \sum_{j=m(x)}^{\overline{l}\left(x+\frac{h}{2}\right)} + \sum_{j=m(x+h)}^{n}\right) p_{n,\,j}(x) \left(x_i - \frac{j}{n}\right) \geqslant 0.$$

Аналогично, для случаев $x_i \in \left(x + h,\, x + \frac{5}{4}h\right)$, $x_i \in \left[x + \frac{5}{4}h, x + \frac{3}{2}h\right)$ и $x_i \in \left(x + \frac{3}{2},\, 1\right]$, согласно формулам (26), (27) и (28), номер k_i равен

[1]Это равносильно условию $\frac{F(\theta_{y_{k_i} - h_1} e_1)}{F(\theta_{y_{k_i} - h_1} e_0)} \leqslant x_i$.

$m(x_i - h) - \sigma(m_1 + 1) + m_1 + 1$, $m(x + h) - \sigma(m_2) + m_2$ и $m\left(x_i - \frac{h}{2}\right) - \sigma(m_2) + m_2$ соответственно. По лемме 4 имеем

$$
\begin{aligned}
&|F(f) - F(e_0)f(x)| \\
&\leqslant \left(F(e_0) - \sum_{i=0}^{m_1} F^{(i)}\right)\omega_2(f,\, h^* + h_1) + \sum_{i=0}^{m_1} |F^{(i)}(g_i) - F^{(i)}(e_0)g_i(x_i)|,
\end{aligned}
$$

где $F^{(i)} = \sum\limits_{j=k_i}^{M} \gamma^{(i)} F_{\sigma(j)} \in \mathfrak{F}_{x_i,\,(y_{k_i},\ldots,\,n)}$, а функции g_i определены как в лемме 4. Для доказательства формулы (30) нам осталось проверить, что

$$
|F^{(i)}(g_i) - F^{(i)}(e_0)g(x_i)| \leqslant F^{(i)}(e_0)\omega_2(f,\, h^* + h_1).
$$

Так как $x_i \geqslant x + \frac{3}{4}h$, то $x_i + \frac{h^*}{2} > x + \frac{5}{4}h$. Пусть $z \geqslant x_i + \frac{h^*}{2} > x + \frac{5}{4}h$. Как уже отмечалось, согласно формулам (27) и (28) найдётся номер k такой, что $F(\theta_{y_k - h_1}(ze_0 - e_1)) > 0$, причём $y_k \geqslant z - \frac{h}{2}$, а значит, с учётом оценки (16), нам остаётся сослаться на теорему 4.

Для доказательства неравенства (31) воспользуемся оценкой (30), выразив $\overline{\Theta}$ через Θ следующим образом. Рассмотрим операторы Θ, $\overline{\Theta}$ как отображения множеств:

$$
\Theta,\, \overline{\Theta},\colon \mathcal{P}_0 \times\, \ldots \times\, \mathcal{P}_{\frac{j}{n}} \times\, \ldots \times\, \mathcal{P}_1 \times B[0,\, 1] \to \mathbb{P}
$$

и покажем, что

$$
\overline{\Theta}(F_0,\, \ldots,\, F_n,\, f)(x) = \Theta((\overline{F}_n,\, \ldots, \overline{F}_0),\, f(1 - \,\cdot\,))(1 - x). \tag{34}
$$

Для этого заметим, что

$$
\sum_{j=r}^{s} p_{n,j}(1-x)\overline{F}_{n-j}(f(1- \,\cdot\,)) = \sum_{j=r}^{s} p_{n,\,n-j}(x)F_{n-j}(f) = \sum_{j=n-s}^{n-r} p_{n,j}(x)F_j(f),
$$

$$
n - m(1-x) = l(x),\ \ n - \overline{l}\left(1 - x - \frac{h}{2}\right) = \overline{m}\left(x + \frac{h}{2}\right),
$$

$$
n - \overline{m}\left(1 - x + \frac{h}{2}\right) = \overline{l}\left(x - \frac{h}{2}\right),
$$

$$
n - l(1-x) = m(x), \quad n - l(1 - x + h) = m(x - h).
$$

Следовательно,

$$\Theta(\overline{F}_n, \dots, \overline{F}_0,\, f(1-\,\cdot\,))(1-x)$$
$$= \Big(\mu(1-x) \sum_{j=\overline{l}\left(1-x-\frac{h}{2}\right)}^{m(1-x)} + \lambda(1-x) \sum_{j=l(1-x)}^{\overline{m}\left(1-x+\frac{h}{2}\right)} + \sum_{j=l(1-x+h)}^{n} \Big) p_{n,j}(1-x)\overline{F}_j(f(1-\cdot))(1-x)$$
$$= \Big(\mu(1-x) \sum_{j=n-m(1-x)}^{n-\overline{l}\left(1-x-\frac{h}{2}\right)} + \lambda(1-x) \sum_{j=n-\overline{m}\left(1-x+\frac{h}{2}\right)}^{n-l(1-x)} + \sum_{j=0}^{n-l(1-x+h)} \Big) p_{n,\,j}(x)F_j(f)$$
$$= \overline{\Theta}(F_0,\, \dots,\, F_n,\, f)(x).$$

Докажем неравенства (32) и (33). Поскольку

$$\Theta(f,\, x) + \overline{\Theta}(f,\, x)$$
$$= \left(\sum_{j=0}^{m(x-h)} + (\mu(x) + \lambda(1-x)) \sum_{j=\overline{l}\left(x-\frac{h}{2}\right)}^{m(x)} + (\mu(1-x) \right.$$
$$\left. + \lambda(x)) \sum_{j=l(x)}^{m\left(x+\frac{h}{2}\right)} + \sum_{l(x+h)}^{n} \right) p_{n,\,j}(x)F_j(f),$$

а

$$B_n(f,\, x) = \left(\sum_{j=0}^{m(x-h)} + \sum_{j=\overline{l}(x-h)}^{m\left(x-\frac{h}{2}\right)} + \sum_{j=\overline{l}\left(x-\frac{h}{2}\right)}^{\overline{m}(x)} + \sum_{j=l(x)}^{m\left(x+\frac{h}{2}\right)} \right.$$
$$\left. + \sum_{j=l\left(x+\frac{h}{2}\right)}^{\overline{m}(x+h)} + \sum_{j=l(x+h)}^{n} \right) p_{n,\,j}(x)F_j(f),$$

получаем

$$\Omega(f,\, x) = B_n(f,\, x) - \Theta(f,\, x) - \overline{\Theta}(f,\, x)$$
$$= \left(\sum_{j=\overline{l}(x-h)}^{m\left(x-\frac{h}{2}\right)} + (1-\mu(x)-\lambda(1-x)) \sum_{j=\overline{l}\left(x-\frac{h}{2}\right)}^{\overline{m}(x)} \right) p_{n,\,j}(x)F_j(f) + p(f,\, x)$$

$$+\left((1-\mu(1-x)-\lambda(x))\sum_{j=l(x)}^{m\left(x+\frac{h}{2}\right)}+\sum_{j=l\left(x+\frac{h}{2}\right)}^{\overline{m}(x+h)}\right)p_{n,\,j}(x)F_j(f), \quad (35)$$

где $p(f,\,x)=p_{n,\,xn}F_{nx}(f)$, если $nx\in\mathbb{N}$, и нуль в противном случае.

Зафиксируем $x\in(0,\,1)$ и пусть

$$m=\overline{m}(x+h)-\bar{l}(x-h),$$

$$\widetilde{y}_j=\frac{\bar{l}(x-h)+j}{n},\quad 0\leqslant j\leqslant m,\quad Y=(\widetilde{y}_0,\ldots,\widetilde{y}_m),$$

$$\Omega(f,\,x)=\sum_{j=0}^{m}\widetilde{\gamma}_jF_{j+\bar{l}(x-h)}(f).$$

Из (29) следует, что все коэффициенты $\widetilde{\gamma}_j$ положительны и, в частности, справедливо неравенство (32). Поскольку $\widetilde{y}_m-\widetilde{y}_0\leqslant 2h$, для доказательства формулы (33) мы воспользуемся теоремой 3. Для применения теоремы 3 осталось показать, что $\Omega(e_1-xe_0,\,x)=0$. Как мы уже знаем, $\Theta(e_1-xe_0,\,x)=0$. В силу формулы (34) из этого также следует, что $\overline{\Theta}(e_1-xe_0,\,x)=0$. Поэтому

$$\Omega(e_1-xe_0,\,x)=B_n(e_1-xe_0,\,x)=0.$$

Теперь докажем точность результата. Понятно, что $F_0=\delta_0$. Рассмотрим функцию

$$\xi_\varepsilon(t)=\mathbb{1}_{[0,\varepsilon]}(t)\cdot\frac{\varepsilon-t}{\varepsilon}.$$

При $\varepsilon<\frac{1}{3n}<h$ имеем

$$\operatorname{supp}F_1\cap[0,\,\varepsilon]=\varnothing,\quad \omega_2\left(\xi_\varepsilon,\,h+\frac{7}{3}h_1\right)=1,$$
$$B_n(\xi_\varepsilon)(x)=(1-x)^nF_0(\xi_\varepsilon)=(1-x)^n,$$
$$\|B_n(\xi_\varepsilon)-\xi_\varepsilon\|=\|(1-x)^n-\xi_\varepsilon(x)\|\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}1. \qquad \square$$

Список литературы

1. R. Paltanea, *Approximation theory using positive linear operators.* Boston, Birkhauser (2004)
2. Л. В. Канторович, *О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна.* — ДАН(А) No. 22 (1930), 595–600.

Ikhsanov L. N. Estimates of approximation by Kantorovich type operators in terms of the second modulus of continuity.

Approximation of bounded measurable functions on the segment [0, 1] by Kantorovich type operators

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j (1-x)^{n-j} F_{n,\,j},$$

where the $F_{n,\,j}$ are functionals produced by probability measures with sufficiently small supports is considered. The error of approximation is estimated in terms of the second modulus of continuity. The result is sharp.

С.- Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28,
Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lv.ikhs@gmail.com

Поступило 26 августа 2019 г.