Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

И. К. Злотников, С. В. Кисляков

ТЕОРЕМА ГРОТЕНДИКА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБР И МОДУЛЕЙ НАД НИМИ

Теорема Гротендика в одной из своих эквивалентных формулировок гласит, что всякий линейный непрерывный оператор из $C(K)$ в $L^1(\mu)$ является 2-суммирующим[1]. Вместо пространства $L^1(\mu)$ здесь может фигурировать любое пространство котипа 2. Вопрос о том, можно ли в этом утверждении заменить чем-то другим пространство $C(K)$, был поставлен в [2] и оказался довольно сложным. Одним из самых ярких достижений в этом направлении по-прежнему остается теорема Бургейна (см. [3]) об аналоге теоремы Гротендика для линейных непрерывных операторов из диск-алгебры C_A в пространства котипа 2. Напомним, что

$$C_A = \{f \in C(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0 \quad \text{при} \quad n < 0\},$$

где $\mathbb{T}$ – единичная окружность на комплексной плоскости, а $\widehat{f}(n)$ – n-й коэффициент Фурье функции f. Доказательство Бургейна содержало важные идеи и серию технических приемов, впоследствии нашедших независимое применение, но в целом было довольно сложным. Позже были найдены более простые подходы к этому результату, см., например, уже упоминавшийся обзор [1].

Все доказательства теоремы Бургейна давали большие основания полагать, что их можно провести для некоторых равномерных алгебр методами “абстрактной теории функций.” Одна такая адаптация оригинального подхода Бургейна содержится в диссертации Флоранс Ланзьен [4] (см. также ее статью [5]).

В этой работе мы предлагаем другой результат того же рода, основанный на приспособлении одного из доказательств из обзора [1] к несколько иной абстрактной ситуации. “Аксиоматика” этой ситуации взята из недавней статьи авторов [6]. Опишем эту аксиоматику и сформулируем результат, а потом прокомментируем аксиомы.

Ключевые слова: принцип максимума, w^*-алгебра Дирихле, интерполяция.
Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 17-01-607.

[1]По поводу терминологии и информации, необходимой для понимания введения, можно обратиться, например, к обзорам [1] и [7], см. также начало §1.

Всюду в дальнейшем μ будет конечной положительной мерой на некотором множестве S, а X – w^*-замкнутой подалгеброй алгебры $L^\infty(\mu)$. Мы считаем, что $\mathbb{1} \in X$. Далее, пусть Y – w^*-замкнутое подпространство в $L^\infty(\mu)$, образующее модуль над X относительно обычного умножения функций. Через X^p и Y^p мы будем обозначать замыкания пространств X и Y в $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < +\infty$. Наложим на X следующее условие (в нем $p \in (1, +\infty)$ – фиксированное число).

(α_p) Если $0 \leqslant \varphi \in L^p(\mu)$, то найдутся такие функции $u_j \in X$, что $\|u_j\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^p(\mu)}$, $\operatorname{Re} u_j \geqslant 0$ и $u_j \to \varphi + i\psi$ (функция ψ вещественна) в $L^p(\mu)$ и п.в.

Любую функцию вида $\varphi + i\psi$ как в этом определении мы будем называть надстройкой над φ.

Теорема 1. *При сделанных предположениях об алгебре X и модуле Y над ней, пусть E – пространство котипа 2, а $T : Y \to F$ – оператор конечного ранга. Тогда $\pi_2(T) \leqslant C\|T\|$, где C зависит лишь от Y и F.*

Здесь и далее через $\pi_r(T)$ обозначена стандартная норма оператора T в классе r-суммирующих операторов, $1 \leqslant r < +\infty$.

Сделаем несколько замечаний. Прежде всего, совсем избавиться от требования, чтобы оператор T имел конечный ранг, вряд ли удастся в такой общности ввиду возможного отсутствия подходящего условия аппроксимации в паре (Y, F). Разумеется, из теоремы 1 вытекает такое утверждение.

Следствие. *Если $V : Y \to F$ – линейный непрерывный оператор, который поточечно аппроксимируется равномерно ограниченной (обобщенной) последовательностью операторов конечного ранга, то оператор T – 2-суммирующий. В частности, так будет для всех линейных ограниченных операторов $T : Y \to L^1(\lambda)$ для любой меры λ.*

Далее, условие (α_p) возникло в работе [6], и там же были приведены комментарии по его поводу. Например, в [6] доказано, что оно верно для любой w^*-алгебры Дирихле X – тогда мера μ, разумеется, предполагается мультипликативной на X. В общей ситуации, однако, условие мультипликативности меры μ можно не накладывать. Отметим, что для алгебры H^∞ условие (α_p) выполнено по очень простой причине – достаточно взять $u_j = \varphi * K_j + i\widetilde{\varphi * K_j}$, где K_j – ядра Фейера, а волна означает гармоническое сопряжение. В сущности, условие

(α_p) постулирует одно из свойств оператора гармонического сопряжения или его аналога для w^*-алгебр Дирихле, но в принятой общности такого *оператора* может не быть – мы не требуем, чтобы надстройка над функцией $\varphi \in L^p(\mu)$, $\varphi \geqslant 0$, была единственна с точностью до постоянного слагаемого. Мы отсылаем читателя к [6] за подробностями, а также за объяснением того, что мы получили бы условие, эквивалентное условию (α_p), если бы заменили сходимость в $L^p(\mu)$ и п.в. на слабую сходимость в $L^p(\mu)$. Последнее наблюдение может быть полезно при проверке условия (α_p).

Что касается самой теоремы 1, то надо отметить (см. опять ссылки в [6]), что в стандартных ситуациях (например, для w^*-алгебр Дирихле) w^*-замкнутых модулей над X не очень много – соответственно, информация сверх аналога теоремы Гротендика для самой алгебры X не очень велика. Было бы интересно попытаться избавиться от условия w^*-замкнутости модуля Y – но пока не ясно, как это сделать, из-за того, что не видно, как обойтись без теоремы 3 при доказательстве теоремы 1.

Теперь настала пора сформулировать результаты из “абстрактной теории функций” для алгебры X и модуля Y, из которых будет выведена теорема 1. Напомним, что подпара (E_0, E_1) совместимой пары (F_0, F_1) банаховых пространств называется K-замкнутой, если каждое разложение $E_0 + E_1 \ni f = x_0 + x_1$ $(x_i \in F_i)$ можно заменить разложением $f = u_0 + u_1$, где $u_i \in E_i$ и $\|u_i\|_{E_i} \leqslant C\|x_i\|_{F_i}$, $i = 1, 2$. Постоянная C не зависит от участвующих векторов.

Если a – вес (неотрицательная суммируемая функция на S), то, естественно, мы обозначаем через $X^p(a)$ и $Y^p(a)$ замыкания пространств X и Y в $L^p(a d\mu)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (α_p). *Для любого веса a на S найдется вес $b \geqslant a$, $\int_S b d\mu \leqslant c \int_S a d\mu$, такой, что пара $(Y^r(b), Y)$ K – замкнута в паре $(L^r(b d\mu),\ L^\infty(\mu))$ при всех $r > 0$. Все участвующие постоянные не зависят от исходного веса a.*

При доказательстве теоремы 2 значительную роль будет играть следующий аналог граничного принципа максимума модуля для классических пространств Харди в круге.

Теорема 3. *Пусть для алгебры X выполнено условие (α_p), а Y – модуль над X (такой, как раньше). Тогда $Y^r \cap L^\infty(\mu) = Y$ для любого $r > 0$.*

§1. Вывод теоремы 1 из теоремы 2

Пусть E и F – банаховы пространства. Напомним, что линейный непрерывный оператор $T : E \to F$ называется r-(абсолютно) суммирующим, если для всякого конечного набора векторов $x_1, \dots, x_N \in E$ выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{N} \|Tx_j\|^r \leqslant C^r \sup\left\{ \sum_{j=1}^{N} |\varphi(x_j)|^r : \varphi \in E^*, \|\varphi\| \leqslant 1 \right\}.$$

Постоянная C здесь не должна зависеть от участвующих векторов и их числа, а наименьшее возможное ее значение обозначается через $\pi_r(T)$. Следующее утверждение можно найти в любом руководстве по r-суммирующим операторам, в частности, в обзорах [1] и [7] или в статье [2].

Теорема Пича. *Оператор T является r-суммирующим тогда и только тогда, когда найдутся такое вероятностное пространство с мерой (Ω, ν) и такой линейный оператор $A \to L^\infty(\nu)$ с $\|A\| \leqslant 1$, что*

$$\|Tx\| \leqslant D\biggl(\int\limits_\Omega |Ax|^r d\nu\biggr)^{1/r}, \quad x \in E. \tag{1}$$

Наилучшее значение постоянной D совпадает с $\pi_r(T)$.

Нам понадобится одно техническое утверждение. Пусть $E = Z^*$ для некоторого банахова пространства Z.

Лемма 1. *Рассмотрим оператор конечного ранга $T : E \to l_N^\infty$. Пусть δ, $\varepsilon > 0$, а L – конечномерное подпространство в E. Тогда найдется оператор $T_1 : E \to l_N^\infty$ такой, что $\|T_1\| \leqslant (1+\varepsilon)\|T\|$, $\|Tx - T_1x\| \leqslant \delta\|x\|$ при $x \in L$ и для некоторых векторов $z_1, \dots, z_m \in Z$, $\|z_j\| \leqslant 1$ при всех j, и некоторых чисел $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, выполняется неравенство*

$$\|T_1x\| \leqslant \pi_r(T)(1+\varepsilon)\biggl(\sum_{j=1}^{m} |\langle z_j, x\rangle|^r \lambda_j\biggr)^{1/r}. \tag{2}$$

В неравенстве (2) легко узнать неравенство (1), в котором мера ν дискретная с конечным числом нагрузок. Оператор A здесь действует в l_m^∞ по формуле $Ax = \{\langle z_j, x\rangle\}_{j=1}^m$.

Отложим ненадолго доказательство леммы 1 и выведем теорему 1 из теоремы 2. Как и в обзоре [1], достаточно проверить следующее *интерполяционное неравенство.*

Лемма 2. *Если* $T : Y \to F$ *– оператор конечного ранга, то*

$$\pi_s(T) \leqslant C\pi_r(T)^{1-\alpha}\|T\|^\alpha, \tag{3}$$

где $r < s < +\infty$ *и* $s^{-1} = (1-\alpha)r^{-1} + \alpha(\infty)^{-1}$.

Разумеется, мы находимся здесь в условиях теоремы 1. Тогда пространство Y представляется в виде $Y = (L^1(\mu)/Y_\perp)^*$. Далее, нормы $\pi_s(T)$, $\pi_r(T)$ и $\|T\|$ не изменятся, если мы сузим F до конечномерного пространства $T(Y)$. Это конечномерное пространство можно потом вложить почти изометрически в l^∞_N при некотором N. Таким образом, мы можем, очень мало изменив все участвующие нормы, считать, что $F = l^\infty_N$. Теперь зафиксируем конечномерное подпространство $L \subset Y$ (его выбор уточним позже) и применим лемму 1. В силу вида пространства, преддвойственного к Y, неравенство (2) для оператора T_1 запишется так:

$$\|T_1 x\| \leqslant \pi_r(T)(1+\varepsilon_1)\left(\sum_{j=1}^m \left|\int_S x f_j d\mu\right|^r \lambda_j\right)^{1/r},$$

где $f_j \in L^1(\mu)$ и $\|f_j\|_{L^1(\mu)} \leqslant 1$, $j = 1, \dots, m$. Из неравенства Гёльдера вытекает, что

$$\|T_1 x\| \leqslant \pi_r(T)(1+\varepsilon_1)\left(\int_S |x|^r a\, d\mu\right)^{1/r}, x \in Y, \tag{4}$$

где $a = \sum\limits_{j=1}^m \lambda_j |f_j|$.

Вес a в (4) можно заменить любым бóльшим весом. Заменим его весом b, полученным в результате применения теоремы 2 к a. Полученное неравенство будет означать, что оператор T_1 действует из $Y^r(b)$ в F с нормой не выше $(1+\varepsilon_1)\pi_r(T)$. Кроме того, T_1 действует из Y в F с нормой не выше $(1+\varepsilon)\|T\|$. Из K-замкнутости (см. теорему 2) следует, что $Y^s(b)$ интерполируется между $Y^r(b)$ и Y вещественым методом с соответствующими параметрами, так что получаем

$$\|T_1\|_{Y^s(b)\to F} \leqslant c\pi_r(T)^{1-\alpha}\|T\|^\alpha,$$

откуда $\pi_s(T_1) \leqslant c\pi_r(T)^{1-\alpha}\|T\|^\alpha$ в силу теоремы Пича.

Теперь зафиксируем функции $x_1, \dots, x_k \in Y$ и возьмем в качестве L их линейную оболочку. Будем считать, что оператор T_1 построен по этому пространству L. Последняя оценка величины $\pi_s(T_1)$ показывает, что

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} \|T_1 x_i\|^s\Big)^{1/s} \leqslant C\pi_r(T)^{1-\alpha}\|T\|^\alpha \sup\bigg\{\Big(\sum_{i=1}^{k} |\Phi(x_i)|^s\Big)^{1/s} : \Phi \in Y^*, \|\Phi\| \leqslant 1\bigg\}.$$

По лемме 1, левая часть неравенства может быть сделана сколь угодно мало отличающейся от $\big(\sum\limits_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^s\big)^{1/s}$. Это доказывает лемму 2.

Доказательство леммы 1. Применим теорему Пича и найдем вероятностную меру ν на некотором пространстве Ω, а также оператор A, для которых выполнено неравенство (1) с $D = \pi_r(T)$. Оператор T_1 мы построим в два этапа. Неравенство (1) означает существование такого оператора B, заданного на образе оператора A, рассматриваемом как подпространство в $L^r(\nu)$, что $\|B\| \leqslant \pi_r(T)$ и $T = BJA$, где J – тождественное вложение пространства $L^\infty(\nu)$ в $L^r(\nu)$, суженное на $A(E)$. Поскольку B действует в пространство l_N^∞, его можно продолжить без увеличения нормы на все пространство $L^r(\nu)$. Мы сохраним обозначение B для этого продолжения. Ясно, что B имеет вид

$$Bg = \sum_{k=1}^{N} \Big(\int\limits_\Omega g\varphi_k d\nu\Big) e_k,$$

где e_k – стандартные базисные векторы в l_N^∞, а $\varphi_k \in L^{r'}(\nu)$,

$$\|\varphi_k\|_{L^{r'}(\nu)} \leqslant \pi_r(T).$$

Мы хотим приблизить все функции φ_k, $k = 1, \dots, N$, ступенчатыми. Точнее, найдем такую конечную алгебру измеримых подмножеств множества Ω, что для оператора P условного математического ожидания отностиельно этой алгебры выполнены соотношения

$$\|P\varphi_k - \varphi_k\|_{L^{r'}(\nu)} \leqslant \eta, \quad k = 1, \dots, N,$$

где η – наперед заданное малое положительное число. После этого положим

$$\widetilde{B}g = \sum_{k=1}^{N} \Bigl(\int\limits_{\Omega} gP\varphi_k d\nu \Bigr) e_k, \quad g \in L^r(\nu);$$
$$\widetilde{T}x = \widetilde{B}JAx, \quad x \in E.$$

Ясно, что $\|Tx - \widetilde{T}x\| \leqslant \|x\| \sum\limits_{k=1}^{N} \|\varphi_k - P\varphi_k\|_{L^r(\nu)} \leqslant N\eta\|x\|$, так что величина $\|T - \widetilde{T}\|$ может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора η.

С другой стороны, усредняющий оператор P имеет норму 1 на любом пространстве $L^q(\nu)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, и формула для $\widetilde{T}$ может быть переписана так:

$$\widetilde{T}x = BP(JAx) = B\widetilde{J}PAx,$$

где $\widetilde{J}$ – оператор тождественного вложения пространства $P(L^\infty(\nu))$ в $P(L^r(\nu))$, суженный на $PA(E)$. Поскольку подпространства $P(L^\infty(\nu))$ и $P(L^r(\nu))$ порождены одним и тем же разбиением множества Ω на конечное число измеримых подмножеств, для $\widetilde{T}$ мы можем написать следующую факторизацию:

$$\widetilde{T} : E \xrightarrow{\ u\ } l_k^\infty \xrightarrow{\ \Lambda\ } l_k^r \xrightarrow{\ \beta\ } l_N^\infty,$$

где $\|u\| \leqslant 1$, Λ – диагональный оператор, $\Lambda\{\xi_j\}_{j=1}^k = \{\lambda_j^{1/r}\xi_j\}_{j=1}^k$ ($\lambda_j \geqslant 0$, $\Sigma\lambda_j = 1$), а $\|\beta\| \leqslant \pi_r(T)$.

Эта диаграмма, в сущности, говорит, что мы добились для оператора $\widetilde{T}$ оценки, похожей на (2), но только с некоторыми функционалами из пространства $E^* = Z^{**}$ вместо функционалов z_j из преддвойственного пространства Z. Действительно, напишем $u(x) = \{\Phi_j(x)\}_{j=1}^k$, где $\Phi_j \in E^*$, $\|\Phi_j\| \leqslant 1$, тогда именно эти функционалы Φ_j и играют описанную роль.

На втором этапе мы еще раз изменим оператор $\widetilde{T}$, применив принцип локальной рефлексивности (см., например, [7]). Именно, пусть U – линейная оболочка функционалов $\Phi_1, \dots, \Phi_N$, а L – конечномерное подпространство в E, фигурирующее в формулировке леммы 1. Если $0 < \rho < 1$, то, согласно упомянутому принципу, существует линейный непрерывный оператор $\sigma : U \to Z$ такой, что $(1-\rho)\|\Phi\| \leqslant \|\sigma\Phi\| \leqslant (1+\rho)\|\Phi\|$ для $\Phi \in U$ и $\langle \sigma\Phi, x\rangle = \langle x, \Phi\rangle$ для $x \in L$ и $\Phi \in U$. Положим

$vx = \{\langle \sigma\Phi_j, x\rangle\}_{j=1}^k$ (v действует из E в l_k^∞) и $T_1x = \beta\Lambda v x$, $x \in E$. Для оператора T_1 оценка (2), разумеется, верна, если ρ достаточно мало (нужно положить $z_j = \sigma\Phi_j'(1+\rho)$ и немного изменить числа λ_j). Далее, $v|_L = u|_L$, так что $T_1|_L = T|_L$, а $\widetilde{T}$ мало отличается по норме от T на всем пространстве E. Это гарантирует неравенство $\|(T_1 - T)|_L\| \leqslant \varepsilon$. Осталось доказать, что норма опепатра T_1 может лишь слегка превосходить величину $\|T\|$. Пусть h_j, $j = 1, \ldots, k$ – векторы стандартного базиса в пространстве l_k^r, тогда

$$T_1x = \sum_{j=1}^k \sigma\Phi_j(x)\lambda_j^{1/r}\beta(h_j)$$

и

$$\|T_1x\| = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^k \sigma\Phi_j(x)\lambda_j^{1/r}\langle\beta(h_j), \Gamma\rangle\right| : \Gamma \in (l_N^\infty)^* = l_N^1, \|\Gamma\| \leqslant 1\right\}.$$

Величина под знаком модуля есть

$$\left\langle \sigma\Big(\sum_{j=1}^k \lambda_j^{1/r}\langle\beta(h_j), \Gamma\rangle\Phi_j\Big), x\right\rangle,$$

так что

$$\begin{aligned}\|T_1x\| &\leqslant (1+\rho)\sup_{\|\Gamma\|\leqslant 1}\|\sum_{j=1}^k \lambda_j\langle\beta(h_j), \Gamma\rangle\Phi_j\|\|x\| \\ &= (1+\rho)\|\widetilde{T}^*\|\|x\| = (1+\rho)\|\widetilde{T}\|\|x\| \leqslant (1+\rho)\|T\|\|x\|. \qquad \square\end{aligned}$$

§2. Принцип максимума

В этом разделе мы докажем теорему 3. По дороге будет установлена серия технических результатов, необходимых также и для доказательства теоремы 2. Напомним, что определение надстройки над неотрицательной функцией $\varphi \in L^p(\mu)$ было дано сразу после формулировки условия (α_p). Всюду в дальнейшем символы X и Y имеют тот же смысл, что и во введении, а условие (α_p) предполагается выполненным.

Лемма 3. *Пусть $\delta > 0$, а функция $\varphi + i\psi$ есть надстройка над неотрицательной функцией $\varphi \in L^p(\mu)$. Тогда $(\delta + \varphi + i\psi)^{-1} \in X$ и $\|(\delta + \varphi + i\psi)^{-1}\|_X \leqslant \delta^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $u_j \in X$ – функции из условия (α_p), сходящиеся к $\varphi+i\psi$. Спектры функций $\delta+u_j$ (как элементов алгебры X) лежат в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant \delta\}$, поэтому функции $\delta + u_j$ обратимы в X и, разумеется, $\|(\delta+u_j)^{-1}\| \leqslant \delta^{-1}$. Кроме того, функции $(\delta+u_j)^{-1}$ сходятся к $(\delta+\varphi+i\psi)^{-1}$ п.в. Осталось сослаться на следующее простое наблюдение, которым мы воспользуемся еще не раз. □

Лемма 4. *Если $g_n \in Y$, $\sup\limits_n \|g_n\|_Y < +\infty$ и $g_n \to g$ п.в., то $g \in Y$.*

Доказательство. Из теоремы Лебега о мажорированной сходимости вытекает, что $g_n \to g$ в w^*-слабой топологии пространства $L^\infty(\mu)$. □

Доказательство теоремы 3. Напомним, что мы доказываем равенство $Y^r \cap L^\infty(\mu) = Y$, $0 < r < +\infty$. Пусть $f \in Y^r \cap L^\infty(\mu)$. Мы найдем равномерно ограниченную последовательность x_n функций из Y, сходящуюся к f п.в., и применим лемму 4. Отметим, что константа C в оценке $\|x_n\|_Y \leqslant C$ будет, вообще говоря, гораздо больше величины $\|f\|_{L^\infty(\mu)}$, однако так или иначе норма функции f в Y совпадет с этой величиной.

Без потери общности будем считать, что $\|f\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant 1/2$. Число r при необходимости можно уменьшить, поэтому будем считать, что $r = p/l$ при некотором $l \in \mathbb{N}$. Выберем такую последовательность $f_n \in Y$, что $\|f - f_n\|_{L^r(\mu)} \to 0$. □

Лемма 5. *Справедливо соотношение $\|\chi_{\{|f_n|>1\}} f_n\|_{L^r(\mu)} \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Поскольку $|f(x)| \leqslant 1/2$ п.в., для почти всех x, удовлетворяющих условию $|f_n(x)| > 1$, можем написать

$$|f_n(x)|^r \leqslant 2^r(|f_n(x)| - |f(x)|)^r \leqslant 2^r|f_n(x) - f(x)|^r.$$

Интегрируя по множеству $\{|f_n(x)| > 1\}$, получаем требуемое, ибо

$$\|f_n - f\|_{L^r(\mu)} \to 0. \qquad \square$$

Положим теперь $\varkappa_n = (|f_n| \vee 1)^{1/l}$. Эти функции равномерно ограничены в $L^p(\mu)$. Рассмотрим надстройки $u_n = \varphi_n + i\psi_n$ (ψ_n – вещественная функция) над функциями $\varphi_n = \varkappa_n - 1$. По лемме 3,

$$\Lambda_n \overset{def}{=} (1+u_n)^{-1} \in X \quad \text{и} \quad \|\Lambda_n\|_X \leqslant 1.$$

Функции $\Phi_n = 1 - (1 - (\Lambda_n)^l)^l$ тоже лежат в X и ограничены равномерно по n, более того, $|\Phi_n| \leqslant C|\Lambda_n|^l$. Поэтому $f_n\Phi_n \in Y$ и $|f_n\Phi_n| \leqslant C$ при всех n, поскольку, очевидно, $|\Lambda_n| \leqslant \varkappa_n^{-1}$.

Проверим, что $f_n\Phi_n \to f$ в $L^r(\mu)$, тогда некоторая подпоследовательность сойдется п.в. и можно будет сослаться на лемму 4. Имеем:

$$\|f - f_n\Phi_n\|_{L^r(\mu)} \leqslant C(\|f - f_n\|_{L^r(\mu)} + \|f_n(1-\Phi_n)\|_{L^r(\mu)}).$$

Первый член в скобках стремится к нулю, оценим второй:

$$\int\limits_S |f_n|^r|1-\Phi_n|^r d\mu \leqslant \int\limits_{|f_n|\leqslant 1} |1-\Phi_n|^r d\mu + C \int\limits_{|f_n|>1} |f_n|^r d\mu.$$

Второе слагаемое справа стремится к нулю по лемме 5. Учитывая, что $lr = p$, $|1-\Phi_n| \leqslant C|1-\Lambda_n|^l$, $1-\Lambda_n = \frac{\varphi_n + i\psi_n}{1+\varphi_n+i\psi_n}$, а $\varphi_n \geqslant 0$, видим, что первое слагаемое мажорируется величиной

$$C\int\limits_S |1-\Lambda_n|^{lr} d\mu \leqslant C' \int\limits_S \left(\frac{|\varphi_n| + |\psi_n|}{|1+\varphi_n+i\psi_n|}\right)^p d\mu$$
$$\leqslant C''\Bigl(\int\limits_S |\varphi_n|^p d\mu + \int\limits_S |\psi_n|^p\Bigr).$$

Второе слагаемое в последнем выражении мажорируется первым по построению (см. условие (α_p)), а первое не превосходит величины $\int\limits_{|f_n|>1} |f_n|^{p/l}$ (см. определение функций $\varkappa_n$ и φ_n), которая стремится к нулю в силу леммы 5.

§3. Мажоранта

Теперь приступим к доказательству теоремы 2. В этом разделе мы проведем построение некоей мажоранты b для веса a, а в следующих двух покажем, что эта мажоранта – искомая. По-прежнему предполагаем, что для алгебры X выполнено условие (α_p) с некоторым $p \in (1, +\infty)$.

Лемма 6. *Пусть* $0 \leqslant a \in L^1(\mu)$ *и* $\|a\|_{L^1(\mu)} > 0$. *Тогда найдется функция* b, $b \geqslant a$, $\int\limits_S b\,d\mu \leqslant c\int\limits_S a\,d\mu$, *такая что для некоторой надстройки* $b^{1/p} + id$ *(*d *– вещественная функция) над функцией* $b^{1/p}$ *справедливо неравенство* $|d| \leqslant Cb^{1/p}$ *п.в.*

Доказательство. Мы построим по индукции две последовательности вещественных функций $\{\beta_n\}_{n\geqslant 0}$ и $\{\gamma_n\}_{n\geqslant 0}$, применяя на каждом шаге условие (α_p). Положим $\beta_0 = a^{1/p}$. Пусть функции β_j построены для

$j \leqslant n$, а функции γ_j – для $j < n$. Найдем надстройку $\beta_n + i\gamma_n$ над β_n (тем самым мы определили вещественную функцию γ_n, $\|\gamma_n\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\|\beta_n,\|_{L^p(\mu)})$. Затем положим $\beta_{n+1} = |\gamma_n|$.

Таким образом, индукционное построение завершено. Введем функции $\beta = \sum\limits_{n\geqslant 0}(2C)^{-n}\beta_n$, $b = \beta^l$ и $d = \sum\limits_{n>0}(2C)^{-n}\gamma_n$. Легко понять, что

$$\int\limits_S bd\mu = \|\beta\|^p_{L^p(\mu)} \leqslant \Big(\sum_{n\geqslant 0}(2C)^n\|\beta_n\|_{L^p(\mu)}\Big)^p \leqslant C'\int\limits_S ad\mu.$$

Для функции d справедлива поточечная оценка

$$|d| \leqslant \sum_{n\geqslant 0}(2C)^{-n}|\gamma_n| = \sum_{n\geqslant 0}(2C)^{-n}\beta_{n+1} \leqslant C''\beta.$$

Осталось проверить, что $\beta + id$ есть надстройка над функцией β. По построению, $\beta_n + i\gamma_n$ есть надстройка над β_n при каждом n. Теперь возьмем $N \in \mathbb{N}$ и найдем такие функции v_n из X, $n = 0, \ldots, N$, что $\operatorname{Re} v_n \geqslant 0$ и $\|\beta_n + i\gamma_n - v_n\|_{L^p(\mu)} \leqslant N^{-1}$. Тогда функция $\sum\limits_{n=0}^{N}(2C)^{-n}v_n$ (лежащая в X) отличается в метрике пространства $L^p(\mu)$ от частичной суммы $\sum\limits_{n=0}^{N}(2C)^{-n}(\beta_n + i\gamma_n)$, сходящегося в $L^p(\mu)$ к $\beta + id$, не более, чем на $1/N$. Дальнейшее понятно. $\square$

§4. Срезающая функция

Пусть a – неотрицательный суммируемый отделенный от нуля вес на S. Построим по нему функцию b как в лемме 6 (стало быть, и надстройку $b^{1/p} + id$).

Лемма 7. *Для произвольной измеримой функции α такой, что $\alpha \geqslant 1$, найдется функция F из X, удовлетворяющая условиям $|F| \leqslant \alpha^{-1}$ и $\|1 - F\|_{L^p(bd\mu)} \leqslant C\|\alpha - 1\|_{L^p(bd\mu)}$.*

Доказательство. Разумеется, считаем, что правая часть последнего неравенства конечна, а тогда функция $(b^{1/p} + \delta)(\alpha - 1)$ (δ – малое положительное число) неотрицательна и лежит в $L^p(\mu)$. Пусть w – надстройка над ней. Положим

$$F = \frac{\delta + b^{1/p} + id}{w + \delta + b^{1/p} + id}.$$

Функция $(w+\delta+b^{1/p}+id)^{-1}$ лежит в X по лемме 3, поэтому $F \in X^p$. Так как $|d| \leqslant cb^{1/p}$, то

$$|F| \leqslant \frac{\delta+b^{1/p}+|d|}{\operatorname{Re} w+\delta+b^{1/p}} \leqslant \frac{C(\delta+b^{1/p})}{(b^{1/p}+\delta)(\alpha-1)+b^{1/p}+\delta} = \frac{C}{\alpha}.$$

Поскольку $\alpha \geqslant 1$, получаем отсюда, что, в частности, $F \in X$ и $\|F\|_X \leqslant C$ по теореме 3. Далее, $1-F=\frac{w}{w+\delta+b^{1/p}+id}$, так что

$$\int\limits_S |1-F|^p b\,d\mu \leqslant \int \frac{|w|^p}{(b^{1/p}+\delta)^p} b\,d\mu \leqslant \int\limits_S |w|^p d\mu$$
$$\leqslant C \int\limits_S (b^{1/p}+\delta)^p(\alpha-1)^p d\mu$$

и нужная оценка получится, если выбрать δ достаточно малым (поскольку вес b отделен от нуля вместе с a). $\square$

Для дальнейшего, определим теперь функцию $G \in X$ формулой $G=1-(1-F^k)^l$, где k и l – натуральные числа. Тогда $|G| \leqslant C|F^k| \leqslant C\alpha^{-k}$ и если $r \in (0,+\infty)$ и $lr>p$, то

$$\int\limits_S |1-G|^r d\mu \leqslant C \int\limits_S |1-F|^{lr} d\mu$$
$$\leqslant C' \int\limits_S |1-F|^p d\mu \leqslant C'' \int\limits_S (\alpha-1)^p b\,d\mu.$$

§5. Завершение доказательства: разбиение функции на две части

Пусть a – вес из теоремы 2. Без потери общности можно считать, что он отделен от руля. Построим вес b как в лемме 6 и докажем K-замкнутость пары $(Y^r(b), Y)$ в $(L^r(b\,d\mu), L^\infty(\mu))$.

Пусть $f \in Y^r(b)+Y=Y^r(b)$ и $f=\varphi+\psi$, где $\varphi \in L^r(b\,d\mu)$, $\psi \in L^\infty(\mu)$. Нам нужно заменить слагаемые функциями из $Y^r(b)$ и Y, не слишком увеличив их нормы.

Пусть $\|\psi\|_{L^\infty(\mu)}=t/2$. Посмотрим на другое разбиение функции f: $f=\chi_{\{|f|>t\}}f+\chi_{\{|f|\leqslant t\}}f \stackrel{\text{def}}{=} g+h$. Понятно, что на множестве, где функция g отлична от нуля, имеет место неравенство $|\varphi(x)| \geqslant$

$|f(x)| - t/2 \geqslant 2^{-1}|f(x)| = 2^{-1}|g(x)|$. Таким образом,

$$\|g\|_{L^r(bd\mu)} \leqslant 2\|\varphi\|_{L^r(bd\mu)} \quad \text{и} \quad \|h\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant 2\|\psi\|_{L^\infty(\mu)},$$

то есть второе разложение (пока на измеримые слагаемые) примерно столь же хорошо, как и первое. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $f \in Y^r(b)$, тогда для всякого $t > 0$ можно найти такое разбиение $f = f_1 + f_2$, где $f_2 \in Y$, $|f_2| \leqslant ct$, а*

$$\Big(\int\limits_S |f_1|^r bd\mu\Big)^{1/r} \leqslant C\Big(\int\limits_S |f|^r bd\mu\Big)^{1/r}.$$

Доказательство. Вес b отделен от нуля вместе с a, так что автоматически $f \in Y^r$.

Пусть $\alpha = \max\{1, \big(\frac{|f|}{t}\big)^{1/k}\}$, где натуральное число k таково, что $kr > p$. Построим по α функцию F как в лемме 7, а затем положим $G = 1 - (1 - F^k)^k$ (см. формулы в конце §4; мы взяли в них $l = k$). Положим $f_1 = f(1-G)$, $f_2 = fG$. Тогда $f_2 \in Y^r$ и $|f_2| \leqslant Ct$, поскольку $|G| \leqslant C\alpha^{-k}$. По теореме 3 имеем $f_2 \in Y$.

Далее, обозначим через e множество $\{|f| > t\}$. Тогда

$$\int\limits_S |(1-G)f|^r bd\mu \leqslant t^r \int\limits_{S\setminus e} |1-G|^r bd\mu + C\int\limits_e |f|^r d\mu.$$

Второе слагаемое уже имеет требуемый порядок, оценим первое, используя неравенства из конца §4:

$$\begin{aligned} t^r \int\limits_S |1-G|^r bd\mu &\leqslant Ct^r \int\limits_S (\alpha-1)^p bd\mu \\ &\leqslant Ct^r \int\limits_e \Big(\frac{|f|}{t}\Big)^{p/k} bd\mu \leqslant Ct^r \int\limits_e \Big(\frac{|f|}{t}\Big)^r bd\mu, \end{aligned}$$

поскольку $p/k < r$, а $|f|/t > 1$ на e. Это и есть требуемое неравенство.

Тем самым, теорема 2 доказана. □

Список литературы

1. С. В. Кисляков, *Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре.* — Алгебра и анализ, **3**, No. 4 (1991), 1–77.

2. J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications.* — Studia Math., **29** (1968), 275–326.
3. J. Bourgain, *New-Banach space properties of the disc algebra and H^∞.* — Acta Math., **152** (1984), 1–46.
4. F. Lancien, *Géométrie des espaces de Banach dans certains espaces de Hardy abstraits.* Thèse de doctorat en mathématiques, Université Paris 6, 1993.
5. F. Lancien, *Generalization of Bourgain's theorem about L^1/H^1 for weak*-Dirichlet algebras.* — Houston J. Math., **20**, No. 1 (1994), 47–61.
6. S. V. Kislyakov and I. K. Zlotnikov, *Interpolation for intersections of Hardy-type spaces.* — Israel J. Math., to appear; `arXiv: 1903:09959`.
7. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, *Basic concepts in the geometry of Banach spaces.* In: Handbook of the geometry of Banach spaces, vol. 1, Elsevier, 2001, p. 1–84.

Zlotnikov I. K., Kislyakov S. V. Grothendieck theorem for some uniform algebras and modules over them.

Under certain additional assumptions, it is proved that a w^*-closed subalgebra X of $L^\infty(\mu)$ (more generally, a w^*-closed module over X) verifies the Grothendieck theorem. The assumptions in question imitate a property of the classical harmonic conjugation operator but are less binding than it is usual in similar settings. Specifically, μ may fail to be multiplicative on X, etc.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
E-mail: `skis@pdmi.ras.ru`

Поступило 2 декабря 2019 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН;
Department of Mathematics and Physics
University of Stavanger
Stavanger, Norway
E-mail: `zlotnikk@rambler.ru`