Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

Е. Г. Голузина

ОЦЕНКИ НАЧАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ОДНОМ КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть T – класс функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$, регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, т.е. вещественных на диаметре $(-1, 1)$, а в остальных точках круга U $\operatorname{Im} f(z)$ и $\operatorname{Im} z$ всегда одного знака.

Пусть D_n, $n \geqslant 2$, – множество значений системы $\{f(z), c_2, \dots, c_n\}$ ($z \in U$, z – фиксировано) в классе T. В [1] дана алгебраическая характеристика множества значений D_n, $n \geqslant 2$. При этом были использованы интегральное представление класса T (см. [2, 3]) и теоремы из теории моментов в [4].

В настоящей работе, используя теорему 2.3 и лемму 3 в [1], получим алгебраическую характеристику множеств значений D_1, D_2 и D_3 при $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Положим $w = f(z) = x_1 + iy_1$, $c_2 = x_2$, $c_3 = x_3$, $A_0 = 1$, $A_1 = \frac{c_2}{2}$, $A_2 = \frac{c_3+1}{4}$, $\zeta = z + \frac{1}{z}$.

В случае $\operatorname{Im} z \neq 0$, множество D_1 – множество значений функции $f(z)$ в классе T – определяется системой неравенств

$$\frac{\operatorname{Im}[w(\zeta^2 - 4)]}{\operatorname{Im} \zeta} \geqslant 1, \ \Big| w + \frac{i}{2 \operatorname{Im} \zeta} \Big| \leqslant \frac{1}{2|\operatorname{Im} \zeta|}. \quad \text{(см. [1, 5]).}$$

В случае $\operatorname{Im} z \neq 0$, D_2 – множество всех точек $X = (x_1, y_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$, в которых неотрицательны все главные миноры матриц C_+ и C_-, где

$$C_\pm = \begin{pmatrix} 1 \pm A_1 & \frac{1}{2}[\bar{w}(2 \pm \bar{\zeta}) \mp 1] \\ \frac{1}{2}[w(2 \pm \zeta) \mp 1] & \operatorname{Re}\left[\frac{w(2 \pm \zeta)}{\bar{\zeta} - \zeta}\right] \end{pmatrix}$$

В случае $\operatorname{Im} z \neq 0$, множество внутренних точек D_2 – $\operatorname{Int} D_2$ – определяется системой неравенств

$$|c_2| < 2, \quad (1 \pm A_1) \operatorname{Re}\Big[\frac{w(2 \pm \zeta)}{\bar{\zeta} - \zeta}\Big] > \Big|\frac{w(2 \pm \zeta) \mp 1}{2}\Big|^2; \quad \text{см. [6]}$$

Ключевые слова: типично вещественные функции, оценки коэффициентов.

Из последнего неравенства получаем следующие оценки для c_2:

$$c_m = -2 - |1 - w(\zeta+2)|^2 \frac{\operatorname{Im}\zeta}{\operatorname{Im}[w(\zeta+2)]} < c_2 < 2,$$
$$- |1 - w(\zeta-2)|^2 \frac{\operatorname{Im}\zeta}{\operatorname{Im}[w(\zeta-2)]} = c_M. \tag{1}$$

В случае $\operatorname{Im} z \neq 0$, D_3 – множество всех точек $X = (x_1, y_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, в которых неотрицательны все главные миноры матриц C_1 и C_2, где

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & A_1 & \bar{w} \\ A_1 & A_2 & (\bar{\zeta}\bar{w} - 1)/2 \\ w & (\zeta w - 1)/2 & (w - \bar{w})/(\bar{\zeta} - \zeta) \end{pmatrix},$$
$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 - A_2 & \bar{w}\bigl(1 - \frac{\bar{\zeta}^2}{4}\bigr) + \frac{\bar{\zeta}+2A_1}{4} \\ w\bigl(1 - \frac{\zeta^2}{4}\bigr) + \frac{\zeta+2A_1}{4} & -\frac{1}{4} + \operatorname{Re}\bigl[\frac{w(\zeta^2-4)}{2(\zeta-\bar{\zeta})}\bigr] \end{pmatrix}.$$

Если $\operatorname{Im} z \neq 0$, то $\operatorname{Int} D_3$ – множество внутренних точек D_3 – определяется системой неравенств

$$\det C_1 > 0, \quad \det C_2 > 0, \quad A_0 A_2 > A_1^2, \quad A_2 < 1; \quad \text{см. [1]}$$

Пусть $f(z) = w$, w и c_2 фиксированы, $(w, c_2) \in \operatorname{Int} D_2$. Неравенство $\det C_1 > 0$ запишем в виде

$$c_3 > -1 + \frac{|\zeta w - 1|^2 + c_2^2(-\operatorname{Im} w/\operatorname{Im}\zeta) - 2c_2 \operatorname{Re}(|w|^2\zeta - w)}{-|w|^2 + (-\operatorname{Im} w/\operatorname{Im}\zeta)}. \tag{2}$$

Неравенство $\det C_2 > 0$ приводится к виду

$$c_3 < 3 - \frac{|\zeta + c_2 - w(\zeta^2 - 4)|^2 \operatorname{Im}\zeta}{\operatorname{Im}[w(\zeta^2-4)] - \operatorname{Im}\zeta}. \tag{3}$$

Функции, для которых достигаются знаки равенства в (1)–(3), определены в [7].

Пусть T_1 – класс фукнций $f(z) \in T$ с фиксированным значением $w = f(z)$, $w \in \operatorname{Int} D_1$; T_2 – класс функций $f(z) \in T_1$ с фиксированным c_2, c_2 удовлетворяет строгим неравенствам в (1).

Положим

$$c_{2M} = \operatorname{Re}[w(\zeta^2 - 4)] - \operatorname{Re}\zeta, \quad c_{2m} = \frac{\operatorname{Re}\zeta|w|^2 - \operatorname{Re} w}{-\frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im}\zeta}}.$$

Используя нервенства (2) и (3), получаем

Теорема 1. *Пусть $f(z)\in T_2$. Если $\operatorname{Im} z\neq 0$, то имеют место точные оценки*

$$c_3\leqslant 3-\frac{|\operatorname{Im}[\zeta-w(\zeta^2-4)]|^2\operatorname{Im}\zeta}{\operatorname{Im}[w(\zeta^2-4)]-\operatorname{Im}\zeta}\quad \textit{при}\quad c_{2M}\in(c_m,c_M);$$

$$c_3\leqslant 3-\frac{|\zeta+c_m-w(\zeta^2-4)|^2\operatorname{Im}\zeta}{\operatorname{Im}[w(\zeta^2-4)]-\operatorname{Im}\zeta}\quad \textit{при}\quad c_{2M}\leqslant c_m;$$

$$c_3\geqslant -1+\frac{|\zeta w-1|^2-[\operatorname{Re}\zeta|w|^2-\operatorname{Re}w]^2\left(-\frac{\operatorname{Im}\zeta}{\operatorname{Im}w}\right)}{-\frac{\operatorname{Im}w}{\operatorname{Im}\zeta}-|w|^2}\ \textit{при}\ c_{2m}\in(c_m,c_M);$$

$$c_3\geqslant -1+\frac{|\zeta w-1|^2+c_M^2\left(-\frac{\operatorname{Im}w}{\operatorname{Im}\zeta}\right)-2c_M\operatorname{Re}[\zeta|w|^2-\operatorname{Re}w]}{-\frac{\operatorname{Im}w}{\operatorname{Im}\zeta}-|w|^2}\ \textit{при}\ c_{2m}\geqslant c_M.$$

Рассмотрим случай $w=z$. Из (1) имеем

$$\tilde c_m\equiv -2+\frac{(1-|z|^2)|z+2|^2}{2(\operatorname{Re}z+1)}<c_2<2-\frac{(1-|z|^2)|z-2|^2}{2(1-\operatorname{Re}z)}\equiv\tilde c_M.$$

Положим

$$\tilde c_{2m}=(1-|z|^2)\operatorname{Re}z/|z|^2,\quad \tilde c_{2M}=\operatorname{Re}z^3-3\operatorname{Re}z.$$

Следствие 1. *Пусть $f(z)\in T_2$, $f(z)=z$, $z\in U$, z фиксировано. Если $\operatorname{Im} z\neq 0$, то имеют место точные оценки*

$$c_3\leqslant 3-\frac{1-|z|^2}{|z|^2}\operatorname{Im}z(3\operatorname{Im}z-\operatorname{Im}z^3)\quad \textit{при}\quad \tilde c_{2M}\in(\tilde c_m,\tilde c_M);$$

$$c_3\leqslant 3-\frac{|\zeta+\tilde c_m-z(\zeta^2-4)|^2\operatorname{Im}\zeta}{\operatorname{Im}z^3-3\operatorname{Im}\zeta}\quad \textit{при}\quad \tilde c_{2M}\leqslant\tilde c_m;$$

$$c_3\geqslant -|z|^2-\frac{(1-|z|^2)^2}{|z|^2}(\operatorname{Re}z)^2\quad \textit{при}\quad \tilde c_{2m}\in(\tilde c_m,\tilde c_M);$$

$$c_3\geqslant -|z|^2+\tilde c_M^2\frac{1}{|z|^2}-2\tilde c_M(\operatorname{Re}z)^2(1-|z|^2)^2\quad \textit{при}\quad \tilde c_{2m}\geqslant\tilde c_M.$$

Следствие 2. *Пусть $f(z)\in T_2$ и $f(ir)=ir$, $0<r<1$. Имеют место следующие точные оценки:*

$$-r^2+\frac{c_2^2}{r^2}\leqslant c_3\leqslant r^2(r^2+2)-\frac{1-r^2}{r^2(r^2+3)}c_2^2;$$

Следствие 3. *Пусть* $f(z) \in T_1$ *и* $f(ir) = ir$, $0 < r < 1$. *Имеют место следующие точные оценки*

$$-\frac{r^2(r^2+3)}{2} \leqslant c_2 \leqslant \frac{r^2(r^2+3)}{2};$$
$$-r^2 \leqslant c_3 \leqslant r^2(r^2+2). \tag{4}$$

Знаки равенства в левом и правом неравенствах в (4) достигаются соответственно для функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$:

$$f_1(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{(1+z^2+z\sqrt{1-r^2})} + \frac{1}{2}\frac{z}{(1+z^2-z\sqrt{1-r^2})}$$
$$= \frac{z(1+z^2)}{(1+z^2)^2 - z^2(1-r^2)},$$
$$f_2(z) = \frac{(1+r^2)^2}{4}\cdot\frac{z(1+z^2)}{(1-z^2)^2} + \frac{3-r^4-2r^2}{4}\cdot\frac{z}{(1+z^2)}$$
$$= \frac{z}{1+z^2} + \frac{z^3(1+r^2)^2}{(1-z^4)(1-z^2)}.$$

Список литературы

1. Е. Г. Голузина, *О множестве значений некоторых систем функционалов в классе типично вещественных функций.* – Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех, и астр. вып. 2 (1965), 45–63.
2. M. S. Robertson, *On the coefficient of typically-real function.* — Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 565–572.
3. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях.* — Мат. сб. **27** (69) (1950), 201–218.
4. Н. Ахиезер, М. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов*, Харьков, ГОНТИ УССР, 1938.
5. W. Rogosinski, *Über positive harmonische Entwicklungen und typischreelle Potenzreihen. Math.*, Zs., **35** (1932), 93–121.
6. Ю. Е. Аленицын, *Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1962), 25–41.
7. Е. Г. Голузина, *О множестве значений начальных коэффициентов в одном классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 40–48.

Goluzina E. G. Estimates of the first coefficients on a class of typically real functions.

Let T be the class of functions $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ regular and typically real in the disk $|z| < 1$. Sharp estimates for the coefficient c_3 in terms $f(z)$ are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 2 сентября 2019 г.