Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

О. Л. Виноградов

АНАЛОГИ ТОЖДЕСТВА РИССА И ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ И РАЗНОСТЕЙ СПЛАЙНОВ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКЕ

§1. Введение

Далее $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ – множества натуральных, неотрицательных целых, целых, вещественных чисел соответственно. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными. Пространства функций обозначаются: L_∞ – пространство существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций f с $\operatorname{vrai\,sup}$-нормой $\|f\| = \|f\|_\infty$; L – пространство суммируемых на $\mathbb{R}$ функций f с интегральной нормой, M – пространство ограниченных борелевских зарядов на $\mathbb{R}$ с нормой (вариацией) $\|\mu\|_M$. Если f – функция ограниченной вариации, то через μ_f обозначается соответствующий ей заряд; таким образом, вариации у f и μ_f равны. Через $\widetilde{L}[T]$ и $\widetilde{M}[T]$ обозначаются соответствующие пространства функций и зарядов с периодом $2T$. Символ $\|f\|_1$ означает $\int\limits_{\mathbb{R}} |f|$, если $f \in L$, и $\int\limits_{-T}^{T} |f|$, если $f \in \widetilde{L}[T]$. Аналогично, символ $\bigvee f$ означает вариацию функции f на оси или на периоде. Это не приведет к недоразумению. Далее, $W^{(r)}_{V,\mathrm{loc}}$ – пространство функций f, заданных на $\mathbb{R}$, таких что $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а вариация производной $f^{(r)}$ конечна на любом отрезке; $\widetilde{W}^{(r)}_V[T]$ – подпространство $2T$-периодических функций из $W^{(r)}_{V,\mathrm{loc}}$.

При $\sigma > 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathbf{S}_{\sigma,r}$ обозначается пространство сплайнов порядка r минимального дефекта с узлами $\frac{j\pi}{\sigma}$ $(j \in \mathbb{Z})$; при $\sigma = 1$ пишем просто $\mathbf{S}_r$. Значения сплайнов нулевого порядка в точках разрыва несущественны.

Ключевые слова: сплайны, тождество Рисса, неравенства типа Бернштейна и Рисса.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00055).

Пусть еще δ_h^m – оператор центральной разности порядка m с шагом h, то есть $\delta_h f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)$, δ_h^m – m-я степень оператора δ_h.

Самым прямым способом доказательства неравенства Бернштейна в различных пространствах L_p, а именно, неравенства

$$\|f^{(m)}\| \leqslant \sigma^m \|f\|$$

для целых функций конечной степени, не превосходящей σ, и, в частности, для тригонометрических многочленов служит тождество М. Рисса

$$f'(x) = \frac{4\sigma}{\pi^2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^l}{(2l+1)^2} f\left(x + \left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\sigma}\right).$$

Аналогичные тождества (см., например, [1, п.84] и [2]) позволяют вывести и другие неравенства для производных и разностей целых функций конечной степени, самое известное из которых – неравенство

$$\|f^{(m)}\| \leqslant \left(\frac{\sigma}{2\sin\frac{\sigma h}{2}}\right)^m \|\delta_h^m f\|, \quad 0 < h < \frac{2\pi}{\sigma}.$$

Для тригонометрических многочленов оно было установлено М. Риссом. При $h \leqslant \frac{\pi}{\sigma}$ оно усиливает неравенство Бернштейна.

Аналоги неравенств Рисса и Бернштейна справедливы и для сплайнов $s \in \mathbf{S}_{\sigma,r}$. Для интегральной нормы эти неравенства таковы:

$$\|s^{(m)}\|_1 \leqslant \frac{\mathcal{K}_{r+1-m}}{2^m \mathcal{K}_{r+1}} \sigma^m \|\delta_{\frac{\pi}{\sigma}}^m s\|_1, \quad 1 \leqslant m \leqslant r, \tag{1.1}$$

$$\|s^{(m)}\|_1 \leqslant \frac{\mathcal{K}_{r+1-m}}{\mathcal{K}_{r+1}} \sigma^m \|s\|_1, \quad 1 \leqslant m \leqslant r, \tag{1.2}$$

$$\bigvee s^{(r)} \leqslant \frac{1}{2^{r+1}\mathcal{K}_{r+1}} \sigma^{r+1} \|\delta_{\frac{\pi}{\sigma}}^{r+1} s\|_1, \tag{1.3}$$

$$\bigvee s^{(r)} \leqslant \frac{1}{\mathcal{K}_{r+1}} \sigma^{r+1} \|s\|_1. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathcal{K}_\rho$ – константы Фавара:

$$\mathcal{K}_\rho = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(\rho+1)}}{(2\nu+1)^{\rho+1}}.$$

Субботин ([3]; см. также [4]) установил интерполяционные формулы, выражающие значения кусочно-постоянной функции $s^{(r)}$ через значения функции $\delta^r_{\frac{\pi}{\sigma}} s$ на равномерной сетке, и вывел из этих формул неравенства типа (1.1) и (1.2) в равномерной метрике при $m = r$. Затем он же [4, 5] получил неравенство (1.4) из неравенства в равномерной метрике с помощью метода Стейна. В периодическом случае неравенства (1.1)–(1.4) содержатся в [6, теоремы 6.3.1 и 6.3.2]; неравенства (1.1) и (1.3) доказали Бабенко и Лигун. В непериодическом случае эти неравенства могут быть доказаны тем же способом.

В настоящей работе устанавливается тождество типа формулы Рисса, позволяющее доказать неравенство

$$\|s'\|_1 \leqslant K\|\delta_h s\|_1, \quad 0 < h < \frac{2\pi}{\sigma}, \tag{1.5}$$

с точной константой K. Для периодических сплайнов точное неравенство (1.5) в равномерной метрике доказали Литвинец и Фильштинский [7]; для меньшего диапазона h см. также [8, лемма 3.4.6] и [6, теорема 6.2.5]. В [9] автор установил тождество типа формулы Рисса, позволившее доказать аналог неравенства (1.5) в равномерной метрике как в периодическом, так и в непериодическом случае. Более того, построенное тождество позволило усилить оценку (1.5), заменив правую часть на линейную комбинацию разностей функции s, включающую разности высших порядков. В настоящей работе получается аналогичное усиление в интегральной метрике.

При $h = \frac{\pi}{\sigma}$ итерации этого тождества приводят к аналогам формулы Рисса для старших производных и разностей, что, в свою очередь, позволяет вывести неравенства (1.1)–(1.4) также в усиленном виде.

Далее, в дополнение к уже введенным обозначениям, $x_\alpha = \frac{\alpha\pi}{\sigma}$. Параметр σ фиксирован и в обозначениях не указывается. В неравенствах для сплайнов часто используется сеточная норма (полунорма) функции f: $\|f|\alpha\|_\infty = \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} |f(x_{j+\alpha})|$. Введем интегральные аналоги сеточной нормы равенствами

$$\|f|\alpha\|_1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \int\limits_{x_{j+\alpha-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\alpha+\frac{1}{2}}} f \right|, \qquad \|f|\alpha\|_1 = \sum_{j=0}^{2N-1} \left| \int\limits_{x_{j+\alpha-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\alpha+\frac{1}{2}}} f \right|$$

для функций f из L и $\widetilde{L}[x_N]$ соответственно. Ясно, что в обоих случаях $\|f|\alpha\|_1 \leqslant \|f\|_1$.

Через $f^{(-1)}$ обозначается произвольная первообразная функции f. Преобразование Фурье и свертка определяются равенствами

$$c(f,z) = c_f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-izt}\,dt, \qquad f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt.$$

При такой нормировке $c(f*g) = c(f)c(g)$. Свертка функции с зарядом нормируется так же.

Эйлеровы идеальные сплайны задаются равенством

$$\varphi_{\sigma,r}(t) = \frac{4}{\pi\sigma^r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2\nu+1)\sigma t - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2\nu+1)^{r+1}}, \quad \sigma > 0,\ r \in \mathbb{Z}_+.$$

Напомним, что $\varphi'_{\sigma,r} = \varphi_{\sigma,r-1}$, $\varphi_{\sigma,0}(t) = \operatorname{sign}\sin\sigma t$, $\|\varphi_{\sigma,r}\| = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}$. При $\sigma = 1$ пишем просто φ_r. На периоде $[-\pi,\pi]$ имеем $\|\varphi_r\|_1 = 4\|\varphi_{r+1}\|_\infty = 4\mathcal{K}_{r+1}$, $\bigvee\varphi_0 = 4$, $\|\delta_h\varphi_r\|_1 = 4\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty$.

Скажем несколько слов о записи констант в неравенствах. В периодическом случае экстремалями будут функции $\varphi_{\sigma,r}$, а константы выражаются через их нормы. Например, константа в неравенстве (1.5) для пространств $\widetilde{L}[x_N]$ равна $\frac{\|\varphi'_{\sigma,r}\|_1}{\|\delta_h\varphi_{\sigma,r}\|_1}$. Это отношение не зависит от N. Неравенство с той же константой будет верно и в пространстве L. Поскольку функция φ_r не принадлежит пространству L, такая запись константы теряет смысл. Чтобы единым образом сформулировать неравенство и для периодического, и для непериодического случая, мы будем записывать константу в виде $\frac{\|\varphi'_{\sigma,r+1}\|_\infty}{\|\delta_h\varphi_{\sigma,r+1}\|_\infty}$. Аналогично поступим и для других неравенств.

Будем говорить, что последовательность $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ знакочередующаяся, если для некоторого ε, по модулю равного 1, будет $\varepsilon(-1)^j\gamma_j \geqslant 0$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности. Сумма по $\mathbb{Z}$ понимается в смысле главного значения: $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=-N}^{N}$.

§2. Неравенства для старшей производной сплайна

Далее мы будем для краткости формулировать результаты при $\sigma=1$; общий случай получается сжатием аргумента. Таким образом, $x_\alpha = \alpha\pi$.

В [9] доказана следующая теорема. При цитировании этого результата нам удобно заменить r на $r+1$.

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 2\pi)$, *а функция* f *удовлетворяет одному из двух условий: или* $f \in W^{(r)}_{V,\mathrm{loc}}$, $\bigvee f^{(r)} < +\infty$, $\delta_h f \in L$, *или* $f \in \widetilde{W}^{(r)}_V[x_N]$ $(N \in \mathbb{N})$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если* $r \geqslant 2$, *то при всех, а если* $r = 1$, *то при почти всех* $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \mu_{f^{(r)}} * Q(x) + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma_l \delta_h f(x - x_l), \tag{2.1}$$

где $Q \in L$,

$$c_Q(y) = \frac{1}{(iy)^r} - R(y) \frac{2i \sin \frac{hy}{2}}{(iy)^{r+1}};$$

$$R(y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma_j e^{-ij\pi y} = \frac{\sum\limits_{\nu \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(i(y+2\nu))^r}}{\sum\limits_{\mu \in \mathbb{Z}} \frac{2i \sin \frac{h(y+2\mu)}{2}}{(i(y+2\mu))^{r+1}}},$$

если r *нечетно*;

$$R(y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma_j e^{-ij\pi y} = \frac{\sum\limits_{\nu \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^\nu}{(i(y+2\nu))^r}}{\sum\limits_{\mu \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^\mu 2i \sin \frac{h(y+2\mu)}{2}}{(i(y+2\mu))^{r+1}}},$$

если r *четно.*

2. *Функции* $Q \cdot \sin$ (r *нечетно*) *и* $Q \cdot \cos$ (r *четно*) *не меняют знака на* $\mathbb{R}$, *а последовательность* $\{\gamma_l\}$ *знакочередующаяся.*

3. *Справедливо неравенство*

$$\|f'\|_1 \leqslant \frac{1}{2\pi} \|Q\|_1 \bigvee f^{(r)} + \Bigl(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\gamma_l|\Bigr) \|\delta_h f\|_1.$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\|Q\|_1 &= \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(x) \operatorname{sign} \sin x \, dx \right| = \left| \frac{2}{\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{c_Q(2l+1)}{2l+1} \right| \\ &= \frac{2}{\pi} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2l+1)^{r+1}} - R(1) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{2 \sin \frac{h(2l+1)}{2}}{(2l+1)^{r+2}} \right|, \end{aligned}$$

если r нечетно;

$$\frac{1}{2\pi}\|Q\|_1 = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(x)\,\mathrm{sign}\cos x\,dx\right| = \left|\frac{2}{\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-1)^l\frac{c_Q(2l+1)}{2l+1}\right|$$
$$= \frac{2}{\pi}\left|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^l}{(2l+1)^{r+1}} - R(1)\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-1)^l\frac{2\sin\frac{h(2l+1)}{2}}{(2l+1)^{r+2}}\right|,$$

если r четно;

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\gamma_j| = \left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j\gamma_j\right| = |R(1)|. \tag{2.2}$$

Зависимость величин Q, γ и R от h и r отражать в обозначениях не будем.

Доказательство теоремы 1 основано на теореме Домара [10, теорема 2].

Замечание 1. Из второго и третьего утверждений теоремы следует, что

$$\frac{\|Q\|_1}{2\pi} = \|\varphi_{r+1}'\|_\infty - |R(1)|\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty. \tag{2.3}$$

Далее мы будем применять теорему 1 и вести рассуждения уже не для произвольной функции f, а для сплайна $s\in\mathbf{S}_r$. Начнем со следующего наблюдения. Неравенство (1.5) с точной константой сразу следует из теоремы 1 и неравенства типа Бернштейна $\bigvee s^{(r)} \leqslant \frac{1}{\|\varphi_{r+1}'\|_\infty}\|s'\|_1$.

Лемма 1. *Пусть $r\in\mathbb{N}$, $h\in(0,2\pi)$, $s\in\mathbf{S}_r$, $\delta_h s\in L$ или $\delta_h s\in\widetilde{L}[x_N]$ ($N\in\mathbb{N}$). Тогда*

$$\|s'\|_1 \leqslant \frac{\|\varphi_{r+1}'\|_\infty}{\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty}\|\delta_h s\|_1. \tag{2.4}$$

Неравенство точно. В периодическом случае оно обращается в равенство на функции $s=\varphi_r$.

Доказательство. 1. Действительно,

$$\|s'\|_1 \leqslant \left(\|\varphi_{r+1}'\|_\infty - |R(1)|\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty\right)\bigvee s^{(r)} + |R(1)|\|\delta_h s\|_1$$
$$\leqslant \frac{\|\varphi_{r+1}'\|_\infty - |R(1)|\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty}{\|\varphi_{r+1}'\|_\infty}\|s'\|_1 + |R(1)|\|\delta_h s\|_1,$$

откуда и следует (2.4).

2. В периодическом случае точность очевидна. Для доказательства точности на оси построим при каждом $N \in \mathbb{N}$ сплайн $s_N \in \mathbf{S}_r$ со свойствами: $s_N = \varphi_r$ на $[-x_N, x_N]$, $\operatorname{supp} s_N \subset [-x_N - a, x_N + a]$; при этом положительное число a и продолжения $s_N(x_N + t)$ и $s_N(-x_N - t)$ при $t \in (0, a]$ можно выбрать не зависящими от N. Существование такого продолжения следует из разложения сплайна по базисным сплайнам на отрезке. При $N \to \infty$ имеем

$$\|s_N'\|_1 = \int\limits_{-x_N}^{x_N} |\varphi_r'| + O(1), \qquad \|\delta_h s_N\|_1 = \int\limits_{-x_N}^{x_N} |\delta_h \varphi_r| + O(1),$$

откуда и вытекает доказываемая точность. □

Замечание 2. Этим же приемом само неравенство (2.4) для периодических функций может быть выведено из неравенства на оси. Из точности оценки (2.4) следует точность всех неравенств, из которых (2.4) выводится (см. далее следствие 1 и теоремы 2 и 3). Поэтому мы не будем специально отмечать точность неравенств в формулировках.

Тем не менее мы хотим установить не только неравенство (2.4), но и предшествующее ему тождество, и оценить правую часть формулы (2.1) через $\|\delta_h s\|_1$ непосредственно, даже в усиленном виде. Для этого построим интерполяционную формулу, выражающую $\mu_{s^{(r)}}$ через обынтегрированные разности функции s.

Лемма 2. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, 2\pi)$, $s \in \mathbf{S}_r$, $\delta_\pi^r \delta_h s \in L$ или $\delta_\pi^r \delta_h s \in \widetilde{L}[x_N]$ ($N \in \mathbb{N}$). Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Справедливо тождество*

$$\mu_{s^{(r)}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\int\limits_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \delta_\pi^r \delta_h s \right) \lambda_{h,r}(\cdot - x_j), \tag{2.5}$$

где $\lambda_{h,r}$ – заряд, сосредоточенный в узлах x_q, $q \in \mathbb{Z}$.

2. *Заряд $\lambda_{h,r}$ выражается формулой*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_{h,r}\{x_k\} e^{-ik\pi y} = \frac{\sum\limits_{q \in \mathbb{Z}} B_{r+1}^{(r+1)}(x_{q+1/2}) e^{-iq\pi y}}{\sum\limits_{j \in \mathbb{Z}} \delta_\pi^r \delta_h B_{r+1}(x_{j+1/2}) e^{-ij\pi y}}$$

$$= \frac{\pi}{\sum\limits_{\mu\in\mathbb{Z}} \frac{\left(2\sin\frac{\pi(y+2\mu)}{2}\right)^{r+1} 2\sin\frac{h(y+2\mu)}{2}}{(y+2\mu)^{r+2}}}, \tag{2.6}$$

где $B_{r+1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{i\pi y}-1}{i\pi y}\right)^{r+2} e^{ixy}\,dy$ *есть B-сплайн.*

3. *Последовательность* $\{\lambda_{h,r}\{x_\nu\}\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ *– знакочередующаяся.*

Доказательство. В [9] была установлена интерполяционная формула для сплайна $S \in \mathbf{S}_p$ $(p \in \mathbb{N})$, такого что $\delta_\pi^{p-1}\delta_h S \in L_\infty$:

$$S^{(p)}(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_\pi^{p-1}\delta_h S(x_{j+1/2})\ell_{h,p}(t-x_j), \quad \ell_{h,p} \in \mathbf{S}_0. \tag{2.7}$$

Там же были доказаны знакочередование и суммируемость последовательности $\left\{\ell_{h,p}(x_{\nu+1/2})\right\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$.

Применив равенство (2.7) к номеру $p = r+1$ и сплайну $S = s^{(-1)} \in \mathbf{S}_{r+1}$, получим

$$\begin{aligned}
\mu_{s^{(r)}}\{x_\nu\} &= \delta_\pi s^{(r)}(x_\nu) = \delta_\pi (s^{(-1)})^{(r+1)}(x_\nu) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_\pi^r \delta_h s^{(-1)}(x_{j+1/2})\delta_\pi \ell_{h,r+1}(x_{\nu-j}) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_\pi^{r+1}\delta_h s^{(-1)}(x_j)\ell_{h,r+1}(x_{\nu-j+1/2}) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \delta_\pi^r \delta_h s\right) \ell_{h,r+1}(x_{\nu-j+1/2}).
\end{aligned}$$

Тем самым в (2.5) можно взять

$$\lambda_{h,r}\{x_\nu\} = \ell_{h,r+1}(x_{\nu+1/2}).$$

Формула (2.6) для $\ell_{h,r+1}(x_{\nu+1/2})$ получена в [9]. $\square$

При $h = \pi$ формулу (2.7) и знакочередование коэффициентов установил Субботин [3].

Следствие 1. *В условиях леммы* 2

$$\bigvee s^{(r)} \leqslant \frac{1}{2^r\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty}\|\delta_\pi^r\delta_h s|0\|_1 \leqslant \frac{1}{2^r\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty}\|\delta_\pi^r\delta_h s\|_1. \tag{2.8}$$

Доказательство. Из формулы (2.5) получается оценка вариации $\bigvee s^{(r)}$ через интегральную сеточную норму функции $\delta_\pi^r \delta_h s$:

$$\bigvee s^{(r)} \leqslant \|\lambda_{h,r}\|_M \|\delta_\pi^r \delta_h s|0\|_1. \tag{2.9}$$

Ввиду знакочередования последовательности $\{\lambda_{h,r}\{x_\nu\}\}$, неравенство (2.9) обращается в равенство на функции φ_r, откуда следует равенство

$$\|\lambda_{h,r}\|_M = \frac{1}{2^r \|\delta_h \varphi_{r+1}\|_\infty}. \tag{2.10}$$

□

§3. Усиление неравенств

Сопоставление теоремы 1 и леммы 2 приводит к усилению неравенства (2.4). Однако перед этим мы еще усилим оценку (2.8), для чего построим интерполяционную формулу типа (2.5), в которой правая часть выражается через разности функции s различных порядков.

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Запишем формулу (2.5) для числа $r-1$, функции $s' \in \mathbf{S}_{r-1}$ и шага $h = \pi$:

$$\mu_{s^{(r)}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \delta_\pi^r s' \right) \lambda_{\pi,r-1}(\cdot - x_j). \tag{3.1}$$

Обозначим

$$g(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_l \delta_h s(x - x_l)$$

и определим оператор $V\colon L \to M$ или $V\colon \widetilde{L}[x_N] \to \widetilde{M}[x_N]$ равенством

$$Vf = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \delta_\pi^r f \right) \lambda_{\pi,r-1}(\cdot - x_j).$$

Пусть еще $\mathcal{Q}\colon M \to L$ (или $\mathcal{Q}\colon \widetilde{M}[x_N] \to \widetilde{L}[x_N]$) – оператор свертки с ядром Q, $W = V\mathcal{Q}$ (надо иметь в виду, что операторы V и $\mathcal{Q}$ не перестановочны).

Формулы (3.1) и (2.1) в новых обозначениях записываются так:

$$\mu_{s^{(r)}} = Vs', \qquad s' = \mathcal{Q}\mu_{s^{(r)}} + g.$$

Отсюда

$$Vg = \mu_{s^{(r)}} - V(s' - g) = \mu_{s^{(r)}} - W\mu_{s^{(r)}} = (I - W)\mu_{s^{(r)}}.$$

Так как $\|V\| = \frac{1}{\|\varphi'_{r+1}\|_\infty}$, а по замечанию 1

$$\|\mathcal{Q}\| = \|\varphi'_{r+1}\|_\infty - |R(1)|\|\delta_h \varphi_{r+1}\|_\infty,$$

то $\|W\| \leqslant \|V\|\,\|\mathcal{Q}\| < 1$. По теореме Банаха оператор $I - W$ обратим, и обратный к нему раскладывается в ряд

$$(I - W)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} W^k,$$

абсолютно сходящийся по операторной норме. Таким образом,

$$\mu_{s^{(r)}} = (I - W)^{-1} V g = \sum_{k=0}^{\infty} W^k V g.$$

Выразим итерации оператора W.

Лемма 3. *Если $r, k \in \mathbb{N}$, $\eta \in M$ или $\eta \in \widetilde{M}[x_N]$ $(N \in \mathbb{N})$, то*

$$W^k \eta = \sum_{j \in \mathbb{Z}^k} \left(\int\limits_{x_{j_k + \frac{(k-1)r-1}{2}}}^{x_{j_k + \frac{(k-1)r+1}{2}}} \delta_\pi^{kr} (\eta * Q) \right) \times \left(\prod_{q=1}^{k-1} \int\limits_{x_{j_q - j_{q+1} - \frac{r+1}{2}}}^{x_{j_q - j_{q+1} - \frac{r-1}{2}}} (\lambda_{\pi, r-1} * Q) \right) \lambda_{\pi, r-1}(\cdot - x_{j_1}).$$

Доказательство. Докажем лемму по индукции. При $k = 1$ равенство верно по определению оператора W:

$$W\eta = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\int\limits_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \delta_\pi^r \eta * Q \right) \lambda_{\pi, r-1}(\,\cdot\, - x_j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_\pi^{r+1} (\eta * Q)^{(-1)}(x_j) \lambda_{\pi, r-1}(\,\cdot\, - x_j).$$

Пусть оно верно для номера k, докажем, что оно верно и для номера $k+1$. Имеем

$$W^{k+1}\eta = W^k W\eta = \sum_{j\in\mathbb{Z}^k} \left(\int\limits_{x_{j_k+\frac{(k-1)r-1}{2}}}^{x_{j_k+\frac{(k-1)r+1}{2}}} \delta_\pi^{kr}(W\eta * Q) \right)$$
$$\times \left(\prod_{q=1}^{k-1} \int\limits_{x_{j_q-j_{q+1}-\frac{r+1}{2}}}^{x_{j_q-j_{q+1}-\frac{r-1}{2}}} (\lambda_{\pi,r-1} * Q) \right) \lambda_{\pi,r-1}(\cdot - x_{j_1}). \tag{3.2}$$

По определению оператора W имеем

$$\int\limits_{x_{j_k+\frac{(k-1)r-1}{2}}}^{x_{j_k+\frac{(k-1)r+1}{2}}} \delta_\pi^{kr}(W\eta * Q) = \delta_\pi^{kr+1}(W\eta * Q)^{(-1)} \left(x_{j_k+\frac{(k-1)r}{2}} \right)$$
$$= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_\pi^{r+1}(\eta * Q)^{(-1)}(x_p)\, \delta_\pi^{kr+1}(\lambda_{\pi,r-1} * Q)^{(-1)} \left(x_{j_k+\frac{(k-1)r}{2}-p} \right).$$

Применим кратное преобразование Абеля

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} F(x_{p+\alpha}) \delta_\pi^m G(x_{\beta-p}) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_\pi^m F(x_{p+\frac{m}{2}+\alpha}) G(x_{\beta-\frac{m}{2}-p}),$$

в котором положим $F = \delta_\pi^{r+1}(\eta * Q)^{(-1)}$, $G = \delta_\pi(\lambda_{\pi,r-1} * Q)^{(-1)}$, $m = kr$, $\alpha = 0$, $\beta = j_k + \frac{(k-1)r}{2}$. Получим

$$\int\limits_{x_{j_k+\frac{(k-1)r-1}{2}}}^{x_{j_k+\frac{(k-1)r+1}{2}}} \delta_\pi^{kr}(W\eta * Q)$$
$$= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_\pi^{(k+1)r+1}(\eta * Q)^{(-1)} \left(x_{p+\frac{kr}{2}} \right) \delta_\pi(\lambda_{\pi,r-1} * Q)^{(-1)} \left(x_{j_k-p-\frac{r}{2}} \right)$$
$$= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{x_{p+\frac{kr-1}{2}}}^{x_{p+\frac{kr+1}{2}}} \delta_\pi^{(k+1)r}(\eta * Q) \right) \left(\int\limits_{x_{j_k-p-\frac{r+1}{2}}}^{x_{j_k-p-\frac{r-1}{2}}} (\lambda_{\pi,r-1} * Q) \right).$$

Обозначая индекс суммирования в последней сумме через j_{k+1} и подставляя ее в (3.2), получаем требуемое. $\square$

Для установления искомой формулы остается применить операторы W^{k-1} к функции $f = Vg$ и просуммировать по k. Сформулируем в виде теоремы получающееся тождество и вытекающие из него неравенства.

Теорема 2. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 2\pi)$, $s \in \mathbf{S}_r$, $\delta_\pi^r \delta_h s \in L$ *или* $\delta_\pi^r \delta_h s \in \widetilde{L}[x_N]$ $(N \in \mathbb{N})$, *величины* γ_l, Q *и* R *определены в теореме* 1. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Справедливо тождество*

$$\mu_{s^{(r)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\int\limits_{x_{l+\frac{(k-1)r-1}{2}}}^{x_{l+\frac{(k-1)r+1}{2}}} \delta_\pi^{kr} \delta_h s \right) \times \sum_{j \in \mathbb{Z}^k} \gamma_{j_k - l} \left(\prod_{q=1}^{k-1} \int\limits_{x_{j_q - j_{q+1} - \frac{r+1}{2}}}^{x_{j_q - j_{q+1} - \frac{r-1}{2}}} (\lambda_{\pi, r-1} * Q) \right) \lambda_{\pi, r-1}(\cdot - x_{j_1}). \tag{3.3}$$

2. *Справедливы неравенства*

$$\bigvee s^{(r)} \leqslant |R(1)| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\|\varphi'_{r+1}\|_\infty - |R(1)| \|\delta_h \varphi_{r+1}\|_\infty}{2^r \|\varphi'_{r+1}\|_\infty} \right)^{k-1} \frac{\left\| \delta_\pi^{kr} \delta_h s \left| \frac{(k-1)r}{2} \right\|_1}{2^r \|\varphi'_{r+1}\|_\infty}, \tag{3.4}$$

$$\bigvee s^{(r)} \leqslant \frac{\|\delta_\pi^r \delta_h s|0\|_1}{2^r \|\delta_h \varphi_{r+1}\|_\infty}, \tag{3.5}$$

$$\bigvee s^{(r)} \leqslant \frac{1}{\|\delta_h \varphi_{r+1}\|_\infty} \|\delta_h s| \tfrac{r}{2}\|_1 \leqslant \frac{1}{\|\delta_h \varphi_{r+1}\|_\infty} \|\delta_h s\|_1. \tag{3.6}$$

Доказательство. 1. Из определений опертора V и функции g находим

$$
\begin{aligned}
Vg &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_l \left(\int\limits_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \delta_\pi^r \delta_h s(x - x_l)\, dx \right) \lambda_{\pi,r-1}(\cdot - x_j) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \delta_\pi^r \delta_h s \right) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_{j-l} \lambda_{\pi,r-1}(\cdot - x_j).
\end{aligned}
$$

При $k-1 \in \mathbb{N}$ запишем $W^{k-1}\eta$ по лемме 3, положим $\eta = Vg$ и применим преобразование Абеля. Получим

$$
\begin{aligned}
W^{k-1}Vg = \sum_{l\in\mathbb{Z}} &\left(\int\limits_{x_{l+\frac{(k-1)r-1}{2}}}^{x_{l+\frac{(k-1)r+1}{2}}} \delta_\pi^{kr} \delta_h s \right) \\
&\times \sum_{j\in\mathbb{Z}^k} \gamma_{j_k - l} \left(\prod_{q=1}^{k-1} \int\limits_{x_{j_q - j_{q+1} - \frac{r+1}{2}}}^{x_{j_q - j_{q+1} - \frac{r-1}{2}}} (\lambda_{\pi,r-1} * Q) \right) \lambda_{\pi,r-1}(\cdot - x_{j_1}).
\end{aligned}
$$

Остается просуммировать эти равенства по k.

2. Из (3.3) получаем

$$
\bigvee s^{(r)} \leqslant \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\gamma_l| \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\lambda_{\pi,r-1} * Q\|_1^{k-1} \left\| \delta_\pi^{kr} \delta_h s \Big| \tfrac{(k-1)r}{2} \right\|_1 \right) \|\lambda_{\pi,r-1}\|_M.
$$

Применяя еще формулы (2.2), (2.3) и (2.10), получаем (3.4).

Выведем (3.5) из (3.4). Применяя неравенство

$$
\left\| \delta_\pi^m f | \alpha \right\|_1 \leqslant 2^m \left\| f | \alpha - \frac{m}{2} \right\|_1
$$

(оно легко доказывается по индукции) и суммируя геометрическую прогрессию, находим

$$
\begin{aligned}
\bigvee s^{(r)} &\leqslant |R(1)| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\|\varphi'_{r+1}\|_\infty - |R(1)| \|\delta_h \varphi_{r+1}\|_\infty}{\|\varphi'_{r+1}\|_\infty} \right)^{k-1} \frac{\|\delta_\pi^r \delta_h s|0\|_1}{2^r \|\varphi'_{r+1}\|_\infty} \\
&= |R(1)| \frac{\|\varphi'_{r+1}\|_\infty}{|R(1)| \|\delta_h \varphi_{r+1}\|_\infty} \frac{\|\delta_\pi^r \delta_h s|0\|_1}{2^r \|\varphi'_{r+1}\|_\infty} = \frac{\|\delta_\pi^r \delta_h s|0\|_1}{2^r \|\delta_h \varphi_{r+1}\|_\infty}.
\end{aligned}
$$

Неравенство (3.6) следует из (3.5). Точность неравенств очевидна. □

Замечание 3. Если выразить δ_π^{kr} через δ_π^r и привести подобные члены (то есть сгруппировать значения получившихся разностей в одинаковых точках), то (3.3) приведется к виду (2.5). Можно показать, что заряды $\lambda_{h,r}$ в представлении (2.5) определяются единственным образом. Поэтому в результате получается то же самое тождество (2.5).

Замечание 4. При $h = \pi$ неравенство (3.4) представляет собой усиление оценки (1.3) в виде разложения правой части по разностям, включающего разности высших порядков.

§4. Неравенства для первой производной сплайна

Сворачивая $\mu_{s^{(r)}}$ и Q, мы приходим к выражению производной s' через $\delta_h s$ и следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 2\pi)$, $s \in \mathbf{S}_r$, $\delta_h s \in L$ или $\delta_h s \in \widetilde{L}[x_N]$ $(N \in \mathbb{N})$, величины γ_l, Q и R определены в теореме 1. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если $r \geqslant 2$, то при всех $x \in \mathbb{R}$, а если $r = 1$, то при всех $x \neq x_\nu$ $(\nu \in \mathbb{Z})$ имеем*

$$s'(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_l \delta_h s(x - x_l) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{x_{l+\frac{(k-1)r-1}{2}}}^{x_{l+\frac{(k-1)r+1}{2}}} \delta_\pi^{kr} \delta_h s \right)$$
$$\times \sum_{j\in\mathbb{Z}^k} \gamma_{j_k - l} \left(\prod_{q=1}^{k-1} \int\limits_{x_{j_q - j_{q+1} - \frac{r+1}{2}}}^{x_{j_q - j_{q+1} - \frac{r-1}{2}}} (\lambda_{\pi,r-1} * Q) \right) (\lambda_{\pi,r-1} * Q)(x - x_{j_1}). \tag{4.1}$$

2. *Справедливы неравенства*

$$\|s'\|_1 \leqslant |R(1)|$$
$$\times \left(\|\delta_h s\|_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\|\varphi'_{r+1}\|_\infty - |R(1)| \|\delta_h \varphi_{r+1}\|_\infty}{2^r \|\varphi'_{r+1}\|_\infty} \right)^k \left\| \delta_\pi^{kr} \delta_h s \Big| \frac{(k-1)r}{2} \right\|_1 \right), \tag{4.2}$$

$$\|s'\|_1 \leqslant |R(1)|\left(\|\delta_h s\|_1 + \frac{\|\varphi'_{r+1}\|_\infty - |R(1)|\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty}{|R(1)|\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty}\,\frac{\|\delta_\pi^r\delta_h s|0\|_1}{2^r}\right), \quad (4.3)$$

$$\|s'\|_1 \leqslant \frac{\|\varphi'_{r+1}\|_\infty}{\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty}\|\delta_h s\|_1.$$

Доказательство. Тождество (4.1) сразу следует из (2.1) и (3.3). Неравенства легко выводятся из (4.1), как в доказательстве теоремы 2, причем каждое следующее усиливает предыдущее. □

Замечание 5. Можно установить (4.1) и непосредственно, минуя теорему 2. Для этого надо записать (2.1) в виде $s' = Us' + g$, где оператор $U\colon L \to L$ или $U\colon \widetilde{L}[x_N] \to \widetilde{L}[x_N]$ задается равенством

$$Uf(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\int\limits_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \delta_\pi^r f\right)(\lambda_{\pi,r-1} * Q)(x - x_j).$$

Легко убедиться, что $\|U\| < 1$, а тогда по теореме Банаха $s' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} U^k g$. Выражение для итераций оператора U получается аналогично лемме 3.

Замечание 6. Как уже отмечалось, перейти от $\mathbf{S}_r$ к $\mathbf{S}_{\sigma,r}$ можно с помощью замены переменной. Для примера запишем аналог равенства (4.1) для сплайна $s \in \mathbf{S}_{\sigma,r}$. Тогда $s(x) = s_1(\sigma x)$, где $s_1 \in \mathbf{S}_r$. Поэтому

$$s'(x) = \sigma\sum_{l\in\mathbb{Z}}\gamma_l\delta_h s(x - x_l) + \sigma\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left(\int\limits_{x_{l+\frac{(k-1)r-1}{2}}}^{x_{l+\frac{(k-1)r+1}{2}}} \delta_{\frac{\pi}{\sigma}}^{kr}\delta_h s\right)$$
$$\times\sum_{j\in\mathbb{Z}^k}\gamma_{j_k - l}\left(\prod_{q=1}^{k-1}\int\limits_{\sigma x_{j_q - j_{q+1} - \frac{r+1}{2}}}^{\sigma x_{j_q - j_{q+1} - \frac{r-1}{2}}}(\lambda_{\pi,r-1} * Q)\right)\sigma(\lambda_{\pi,r-1} * Q)(\sigma(x - x_{j_1})).$$

Здесь $x_\alpha = \frac{\alpha\pi}{\sigma}$, $h \in \left(0, \frac{2\pi}{\sigma}\right)$.

Замечание 7. Неравенства (4.2) и (4.3) усиливают (2.4) в двух направлениях. Во-первых, правые части формул (4.2) и (4.3) содержат разности высоких порядков. Во-вторых, одно из слагаемых оценивается через сеточную норму функции $\delta_h s$.

Как известно, неравенства типа Бернштейна и Рисса (1.1) и (1.2) для старших производных получаются последовательным применением неравенства для первой производной [6, теорема 6.3.2].

Итерации формулы (4.1) при $h = \pi$ приводят к интерполяционным формулам для старших производных, причем сохраняется знакорегулярность соответствующих ядер. Поэтому из этих формул выводится усиление неравенств (1.1) и (1.2). Аналогичного эффекта можно добиться, итерируя формулу (2.1). Такого рода итерационные процессы (без явной записи тождеств типа (2.1)) использовались в [11, глава IV] для усиления классического неравенства Колмогорова. Получающиеся формулы требуют дополнительного исследования, которое выходит за рамки данной работы.

Комбинирование формул типа Домара (2.1) с интерполяционными формулами типа (2.5) приводит к тождествам, из которых можно рассчитывать вывести и другие точные неравенства для производных и разностей.

Список литературы

1. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* Наука, Москва, 1965.
2. О. Л. Виноградов, *Точные оценки погрешностей формул типа численного дифференцирования на классах целых функций конечной степени.* — Сибирский математический журнал, **48**, No. 3 (2007), 538–555.
3. Ю. Н. Субботин, *О связи между конечными разностями и соответствующими производными.* — Труды МИАН СССР, **78** (1965), 24–42.
4. Ю. Н. Субботин, *Приближение “сплайн”-функциями и оценки поперечников.* — Труды МИАН СССР, **109** (1971), 35–60.
5. Ю. Н. Субботин, *Поперечник класса W^rL в $L(0, 2\pi)$ и приближение сплайн-функциями.* — Математические заметки, **7**, No. 1 (1970), 43–52.
6. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов.* Наукова думка, Киев, 1992.
7. П. Д. Литвинец, В. А. Фильштинский, *Об одной теореме сравнения и ее применениях.* — В сб. Теория приближения функций и ее приложения. Ин-т математики АН УССР, Киев (1984), 97–107.
8. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения.* Наука, Москва, 1987.
9. О. Л. Виноградов, *Аналоги тождества Рисса и точные неравенства для производных и разностей сплайнов в равномерной метрике.* — Проблемы математического анализа, **97** (2019), 31–42.
10. Y. Domar, *An extremal problem related to Kolmogoroff's inequality for bounded functions.* — Arkiv för matematik, **7**, No. 30 (1968), 433–441.
11. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Изд. ЛГУ, Ленинград, 1982.

Vinogradov O. L. Analogs of the Riesz identity, and sharp inequalities for derivatives and differences of splines in the integral metric.

An analog of the Riesz interpolation formula is established. It allows us to obtain a sharp estimate for the first order derivative of a spline of minimal defect with equidistant knots $\frac{j\pi}{\sigma}$, $j \in \mathbb{Z}$, in terms of the first order difference in the integral metric. Moreover, the constructed identity makes it possible to strengthen the inequality by replacing its right-hand side with a linear combination of differences, including higher order differences, of the spline. In the case of the difference step $\frac{\pi}{\sigma}$, iterations of this identity lead to formulas analogous to the Riesz formula for higher order derivatives and differences, which allows us to obtain Riesz and Bernstein type inequalities for them, also in a stronger form.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетский просп. 28,
198504, С.-Петербург, Россия
E-mail: `olvin@math.spbu.ru`

Поступило 4 августа 2019 г.