Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

Е. В. Боровик, К. Ю. Федоровский

О $\mathrm{Lip}(\omega)$-НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА ГАРМОНИЧЕСКОГО ОТРАЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРАНИЦ ПРОСТЫХ ОБЛАСТЕЙ КАРАТЕОДОРИ

§1. Введение

В данной работе, являющейся непосредственным продолжением и развитием работ [1] и [2], изучается задача о $\mathrm{Lip}(\omega)$-непрерывности операторов гармонического отражения функций относительно границ простых областей Каратеодори в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3, \ldots$, где $\mathrm{Lip}(\omega)$ – это пространства функций типа Липшица–Гёльдера, определяемые модулями непрерывности ω общего вида.

Всюду в дальнейшем символы E°, $\overline{E}$ и ∂E будут обозначать внутренность, замыкание и границу множества $E \subset \mathbb{R}^d$ соответственно. Введем необходимые нам в дальнейшем пространства функций. Через $\mathcal{H}(\Omega)$ мы будем обозначать пространство всех вещественных функций, *гармонических* на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Пусть теперь Y – это замкнутое множество в $\mathbb{R}^d$. Обозначим через $C(Y)$ пространство всех вещественных *непрерывных и ограниченных* функций на Y со стандартной нормой $\|h\|_Y = \sup\{|h(x)|\colon x \in Y\}$. Определим теперь пространство $C_{\mathcal{H}}(Y)$ следующим образом. Если множество Y не содержит никакой проколотой окрестности точки ∞ (в стандартной одноточечной компактификации пространства $\mathbb{R}^d$), то положим

$$C_{\mathcal{H}}(Y) := C(Y) \cap \mathcal{H}(Y^\circ),$$

а в противном случае положим

$$C_{\mathcal{H}}(Y) := \big\{h \in C(Y) \cap \mathcal{H}(Y^\circ)\colon h(x) = O_{|x|\to+\infty}(|x|^{-(d-2)})\big\}.$$

Пусть $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}\colon t \geqslant 0\}$. Напомним, что *модулем непрерывности* называется неотрицательная, непрерывная и неубывающая функция

Ключевые слова: простая область Каратеодори, оператор Пуассона, оператор гармонического отражения, пространство $\mathrm{Lip}(\omega)$.

Второй автор поддержан Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проектов 1.517.2016/1.4 и 1.3843.2017/4.6, а также фондом Саймонса (Simons-IUM fellowship).

$\omega\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, обладающая свойством $\omega(0) = 0$ и являющаяся полуаддитивной, т.е. $\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$ при всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$.

Определим теперь пространства $\mathrm{Lip}(Y, \omega)$ – пространства функций типа Липшица–Гёльдера с модулем непрерывности ω. Считая, что множество Y содержит не менее двух точек, положим:

$$\mathrm{Lip}(Y, \omega) = \left\{ h \in C(Y)\colon \|h\|'_{Y,\omega} := \sup \frac{|h(x) - h(y)|}{\omega(|x - y|)} < +\infty \right\},$$

где верхняя грань берется по всем парам точек x и y из Y с условием $x \neq y$. Норма функции h в пространстве $\mathrm{Lip}(Y, \omega)$ имеет вид

$$\|h\|_{Y,\omega} = \max\{\|h\|'_{Y,\omega}, \|h\|_Y\}.$$

В частности, при $m \in (0, 1]$ пространства $\mathrm{Lip}^m(Y) := \mathrm{Lip}(Y, t^m)$ – это стандартные пространства Липшица–Гёльдера порядка m.

Перейдем непосредственно к постановке интересующих нас задач. Напомним, что ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^d$ называется *простой областью Каратеодори*, если выполнены следующие условия:

а) множество $\Omega := \mathbb{R}^d \setminus \overline{D}$ связно,

б) $\partial D = \partial \Omega$ и

в) при $d \geqslant 3$ обе области D и Ω являются регулярными относительно (классической) задачи Дирихле для гармонических функций.

Напомним, что регулярность области D (соответственно, регулярность области Ω) означает, что для любой функции $\varphi \in C(\partial D)$ существует функция $f \in C_{\mathcal{H}}(\overline{D})$ (соответственно, функция f класса $C_{\mathcal{H}}(\overline{\Omega})$) такая, что $f|_{\partial D} = \varphi$ (напомним, что $\partial D = \partial \Omega$ в рассматриваемом случае).

Требование регулярности областей D (и Ω) относительно задачи Дирихле накладывается только в случае $d \geqslant 3$. В случае $d = 2$ оно выполняется для любой области, удовлетворяющей условиям а) и б) из определения простых областей Каратеодори. В самом деле, всякая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющая этим условиям, является односвязной, а всякая ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^2$ регулярна относительно задачи Дирихле в силу классической теоремы Лебега, см. [3].

Пусть D – это простая область Каратеодори. Определим для нее оператор гармонического отражения R_D. Пусть f – некоторая функция класса $C_{\mathcal{H}}(\overline{D})$. Тогда существует единственная функция $g = g_f$

класса $C_{\mathcal{H}}(\overline{\Omega})$ такая, что $g|_{\partial\Omega} = f|_{\partial D}$ (напомним, что $\partial D = \partial\Omega$). Функция g (решение задачи Дирихле в области Ω с граничными данными $f|_{\partial D}$) называется *гармоническим отражением* функции f относительно ∂D, а оператор

$$R = R_D\colon f \mapsto g, \qquad R\colon C_{\mathcal{H}}(\overline{D}) \to C_{\mathcal{H}}(\overline{\Omega})$$

называется *оператором гармонического отражения.*

В литературе известны различные способы определения отражения гармонических функций относительно границ областей, отличные от оператора R_D. Так, в работах [4–8] рассматривались конструкции поточечного отражения, представляющие из себя различные вариации на тему принципа симметрии для гармонических функций. Конструкция продолжения, основанная на решении задачи Дирихле, была использована (помимо цитированных выше работ [1] и [2]) в недавней работе Парамонова [9].

Пусть ω_1 и ω_2 – два модуля непрерывности. Нас интересует следующий вопрос: *при каких условиях на простую область Каратеодори D оператор R_D будет непрерывным оператором из пространства* $\mathrm{Lip}(\overline{D},\omega_1)\cap C_{\mathcal{H}}(\overline{D})$ *в пространство* $\mathrm{Lip}(\overline{\Omega},\omega_2)\cap C_{\mathcal{H}}(\overline{\Omega})$? Разумеется, мы рассматриваем только "естественный" случай, когда $\omega_1(t)/\omega_2(t) \leqslant A$, где $A > 0$ – некоторая абсолютная константа. Данная задача является естественным обобщением задачи 1 в [2], в которой соответствующий вопрос поставлен для стандартных пространств Липшица–Гёльдера (т.е. для модулей непрерывности вида $\omega_{1,2}(t) = t^{m_{1,2}}$ при $0 < m_2 \leqslant m_1 \leqslant 1$). Ряд замечаний, относящихся к истории рассматриваемого вопроса, и соответствующую библиографию можно найти в работах [1] и [2].

В случае, когда оператор R_D является непрерывным оператором из пространства $\mathrm{Lip}(\overline{D},\omega_1) \cap C_{\mathcal{H}}(\overline{D})$ в пространство $\mathrm{Lip}(\overline{\Omega},\omega_2) \cap C_{\mathcal{H}}(\overline{\Omega})$, мы будем говорить, что этот оператор является (ω_1,ω_2)-непрерывным. Если $\omega_{1,2}(t) = t^{m_{1,2}}$, то вместо (ω_1,ω_2)-непрерывности будем говорить о (m_1,m_2)-непрерывности (см. раздел 1 в [2]).

Вопрос о (ω_1,ω_2)-непрерывности оператора гармонического отражения во многих случаях оказывается естественно связан с вопросом о (ω_1,ω_2)-непрерывности операторов Пуассона P_D и P_Ω. Напомним, что оператор Пуассона P_D – это оператор, который ставит в соответствие данной функции $\varphi \in C(\partial D)$ функцию $f \in C_{\mathcal{H}}(\overline{D})$ такую, что $f|_{\partial D} = \varphi$ – т.е. решение задачи Дирихле в области D с граничной функцией φ.

Этот оператор называется (ω_1, ω_2)-непрерывным, если он непрерывен как оператор, действующий из пространства $\mathrm{Lip}(\partial D, \omega_1)$ в пространство $\mathrm{Lip}(\overline{D}, \omega_2) \cap C_{\mathcal{H}}(\overline{D})$.

Вопрос о (ω_1, ω_2)-непрерывности оператора Пуассона можно совершенно аналогично поставить и в случае неограниченной области. Напомним конструкцию преобразования Кельвина. Пусть G – это простая область Каратеодори, содержащая точку 0. Тогда преобразование $h \mapsto h_*$, где $h_*(x) = |x|^{-(d-2)} h(x_*)$ при $x_* := x/|x|^2 \in \overline{G}$, отображает пространство $C_{\mathcal{H}}(\overline{G})$ в пространство $C_{\mathcal{H}}(\overline{G_*})$, где $G* = \{x \in \mathbb{R}^d : x_* \in G\}$. Более того, это отображение является изоморфизмом пространств $\mathrm{Lip}(\overline{G}, \omega) \cap \mathcal{H}(G)$ и $\mathrm{Lip}(\overline{G_*}, \omega) \cap C_{\mathcal{H}}(G_*)$ для любого рассматриваемого модуля непрерывности ω. С помощью преобразования Кельвина, вопрос о (ω_1, ω_2)-непрерывности оператора Пуассона P_{G_*} для неограниченной области G_* сводится к вопросу о (ω_1, ω_2)-непрерывности оператора Пуассона P_G для ограниченной области G.

Основным результатом данной работы является критерий (ω_1, ω_2)-непрерывности оператора Пуассона P_D для произвольной простой области Каратеодори D (см. теорему 1). Этот критерий является непосредственным обобщением критерия (m_1, m_2)-непрерывности этого оператора, полученного в теореме 2 работы [2]. С использованием данного критерия мы уточним поведение оператора Пуассона вблизи так называемого "критического" значения показателя Гёльдера m_D (т.е. такого показателя, что оператор P_D является (m, m)-непрерывным при всех $m < m_D$ и не является (m', m')-непрерывным при всех $m' > m_D$, см. §3 ниже).

§2. Критерий (ω_1, ω_2)-непрерывности оператора Пуассона

Критерий непрерывности оператора P_D формулируется в терминах гармонической меры. Для открытого множества $G \subset \mathbb{R}^d$ и для точки $a \in G$ обозначим через $\mu(a, E, G)$ гармоническую меру множества $E \subset \partial G$, вычисленную относительно G и a. Напомним, что мера $\mu(a, \cdot, G)$ – это представляющая мера функционала $\varphi \mapsto f_\varphi(a)$, где $\varphi \in C(\partial G)$, а функция f_φ определяется соотношением $f_\varphi(x) = \sup\{\psi(x) \colon \psi \in \mathfrak{S}_\varphi\}$, где класс $\mathfrak{S}_\varphi$ состоит из вещественнозначных непрерывных функций ψ на $\overline{G}$, субгармонических в G и таких, что $\psi \leqslant \varphi$ на ∂G (подробности см. в [12, гл. 11]).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть D – простая область Каратеодори в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, и пусть ω_1, ω_2 – такие модули непрерывности, что*

$$\frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \leqslant A$$

при $t \in \mathbb{R}_+$, где A – некоторая положительная постоянная. Следующие условия эквивалентны:

(1) *оператор P_D является (ω_1, ω_2)-непрерывным;*

(2) *найдется постоянная $C > 0$ такая, что для всех точек $b \in \partial D$ и для функции $\varphi(x) = \omega_1(|x - b|)$ выполнено*

$$P_D(\varphi) \in \mathrm{Lip}(\overline{D}, \omega_2), \qquad \text{и} \quad \|P_D(\varphi)\|_{\overline{D}, \omega_2} \leqslant C;$$

(3) *найдется постоянная $C > 0$ такая, что для любой точки $a \in D$ и любой точки $a' \in \partial D$ с условием $\delta = |a - a'| = \mathrm{dist}(a, \partial D)$ верна оценка:*

$$\sum_{n=0}^{N} \omega_1(n\delta)\, \mu(a, E_n, D) \leqslant C\omega_2(\delta),$$

где

$$E_0 = \{y \in \partial D \colon |y - a'| \leqslant \delta\},$$
$$E_n = \{y \in \partial D \colon n\delta < |y - a'| \leqslant (n+1)\delta\}, \quad n \geqslant 1,$$

а N – максимально возможное число такое, что $E_N \neq \varnothing$.

Всюду в дальнейшем без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{diam}(D) \leqslant 1$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) выполнена, так как

$$\|\varphi\|_{\partial D, \omega_1} \leqslant 1.$$

Докажем справедливость импликации (2) $\Rightarrow$ (3). Нам потребуется следующая техническая лемма.

Лемма 1. *Пусть ω – модуль непрерывности рассматриваемого вида, и пусть $f \in C_{\mathcal{H}}(\overline{D}) \cap \mathrm{Lip}(\partial D, \omega)$. Тогда $f \in \mathrm{Lip}(\overline{D}, \omega)$ если и только если найдется такая константа $C_1 > 0$, что для всех точек $x \in D$ и $x' \in \partial D$ с условием $|x - x'| = \mathrm{dist}(x, \partial D)$ выполнено*

$$|f(x) - f(x')| \leqslant C_1 \omega(|x - x'|).$$

Доказательство. Для доказательства этой леммы нам надо проверить, что для любых точек $x \in \overline{D}$ и $y \in \overline{D}$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C_2\omega(|x-y|),$$

где $C_2 > 0$ – некоторая константа. Из принципа максимума модуля для гармонических функций вытекает, что данное неравенство достаточно проверить только для точек $x \in D$ и $y \in \partial D$ (см. соотношение (4) в работе [10], а также лемму 2.1 работы [11]). Так как

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x')| + |f(x') - f(y)|,$$

а $|x - x'| \leqslant |x - y|$ и $|x' - y| \leqslant 2|x - y|$, то требуемое неравенство установлено. □

Используя эту лемму и обозначения из условий утверждений (2) и (3), а также полагая $b = a'$, имеем:

$$C\omega_2(\delta) \geqslant P_D(\varphi)(a) = \int\limits_{\partial D} \varphi(x)\, \mu(a, dx, D)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \int\limits_{\partial D \cap E_n} \varphi(x)\, \mu(a, dx, D) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \omega_1(n\delta)\, \mu(a, E_n, D).$$

Нам остается доказать последнюю импликацию, а именно (3) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $f \in C_{\mathcal{H}}(\overline{D}) \cap \mathrm{Lip}(\partial D, \omega_1)$ и $\|f\|_{\partial D, \omega_1} \leqslant 1$. Применяя лемму 1, используя обозначения утверждения (3) и принимая во внимание тот факт, что $\delta \leqslant \mathrm{diam}(D) \leqslant 1$, получаем:

$$|f(a) - f(a')| = \left| \int_{\partial D} \big(f(x) - f(a')\big)\, \mu(a, dx, D) \right|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{N} \int\limits_{\partial D \cap E_n} |f(x) - f(a')|\, \mu(a, dx, D)$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{N} \omega_1((n+1)\delta)\, \mu(a, E_n, D)$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{N} \big(\omega_1(n\delta) + \omega_1(\delta)\big)\, \mu(a, E_n, D) \leqslant (C + A)\omega_2(\delta).$$

Таким образом, теорема полностью доказана. □

Пусть $\mathcal{T}$ – некоторое множество индексов, т.е. линейно упорядоченное множество (отношение порядка на котором обозначается стандартным символом $\leqslant$), и пусть $\{\omega_\tau,\ \tau \in \mathcal{T}\}$ – такое семейство модулей непрерывности, что $\omega_\tau(t) \leqslant \omega_{\tau'}(t)$ при всех $t \in [0,1]$ и

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\omega_\tau(t)}{\omega_{\tau'}(t)} = 0$$

при всех $\tau, \tau' \in \mathcal{T}$ с условием $\tau' < \tau$ (т.е. $\tau' \leqslant \tau$ и $\tau' \neq \tau$). Семейства модулей непрерывности, для которых выполнены указанные свойства, мы будем называть *допустимыми*. В частности, семейство гёльдеровских модулей непрерывности $\{t^m, m \in (0,1]\}$ является допустимым.

С использованием третьего условия теоремы 1 непосредственно проверяется следующее простое утверждение.

Следствие 1.

1) *Пусть D – это простая область Каратеодори, а ω – такой модуль непрерывности, что оператор P_D является (ω,ω)-непрерывным. Тогда для любого модуля непрерывности $\widetilde{\omega}$ с условиями $\omega(t) \leqslant \widetilde{\omega}(t)$ при всех $t \in [0,1]$ и*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\omega(t)}{\widetilde{\omega}(t)} = 0$$

оператор P_D также является $(\widetilde{\omega},\widetilde{\omega})$-непрерывным.

2) *Пусть $\{\omega_\tau,\ \tau \in \mathcal{T}\}$ – допустимое семейство модулей непрерывности. Тогда для любой простой области Каратеодори D существует такой индекс $\tau_D \in \mathcal{T}$, что оператор P_D является $(\omega_\tau,\omega_\tau)$-непрерывным при всех $\tau < \tau_D$, но этот оператор не является $(\omega_\tau,\omega_\tau)$-непрерывным при всех $\tau > \tau_D$.*

В частном случае, когда рассматривается семейство модулей непрерывности $\{t^m,\ m \in (0,1]\}$, получаем утверждение следствия 1 работы [2].

Следствие 2. *Пусть D – простая область Каратеодори в $\mathbb{R}^d$. Найдется число $m_D \in [0,1]$ со следующими свойствами: оператор P_D является (m,m)-непрерывным при всех $m \in (0,m_D)$ и это не так при всех $m \in (m_D,1]$. Кроме того, оператор P_D является (m,m')-непрерывным при всех (m,m') с условиями $0 < m' < m_D$ и $m' \leqslant m \leqslant 1$.*

Напомним, что под (m,m')-непрерывностью оператора P_D мы понимаем свойство $(t^m, t^{m'})$-непрерывности этого оператора.

Заметим, что в условиях рассматриваемой задачи для области Ω аналогично вводится параметр τ_Ω такой, что справедлив аналог следствия 1 для области Ω. В частности, в условиях следствия 2 возникает параметр $m_\Omega \in (0,1]$ и имеет место следующее утверждение, распространяющее следствия 2 и 3 работы [2] на допустимые семейства модулей непрерывности.

Предложение 1. *Пусть D – простая область Каратеодори в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, и пусть $\{\omega_\tau,\ \tau \in \mathcal{T}\}$ – допустимое семейство модулей непрерывности.*

1) *Оператор R_D является $(\omega_\tau, \omega_{\tau'})$-непрерывным при всех $\tau, \tau' \in \mathcal{T}$ с условиями $\tau' < \tau_\Omega$ и $\tau' \leqslant \tau$.*

2) *Оператор R_D не является $(\omega_\tau, \omega_\tau)$-непрерывным при всех $\tau \in \mathcal{T}$ таких, что $\tau_\Omega < \tau < \tau_D$.*

§3. О критическом значении параметра m_D в двумерном случае

Всюду в этом параграфе мы будем считать, что $d = 2$. Пусть D – простая (ограниченная) область Каратеодори в $\mathbb{R}^2$. В предыдущем параграфе для (допустимого) семейства модулей непрерывности $\{t^m,\ 0 < m \leqslant 1\}$ был определен критический параметр m_D такой, что оператор Пуассона P_D непрерывен из пространства $\mathrm{Lip}^m(\partial D)$ в $\mathrm{Lip}^m(\overline{D}) \cap \mathcal{H}(D)$ при всех $m < m_D$, но это не так при всех $m > m_D$. Как было показано в следствии 4 работы [2], в двумерном случае имеет место оценка

$$m_D \geqslant \frac{1}{2},$$

которая является следствием известного неравенства Бёрлинга для гармонической меры (см. теорему III в [13]). Эта оценка также является прямым следствием основных результатов работы Джонстона [10].

Более того, для жордановых областей D с кусочно-гладкой границей в следствии 7 работы [2] получено следующее утверждение. Пусть $\alpha \in (0,1]$ такое число, что $\pi\alpha$ – это величина минимального внешнего угла области D (т.е. минимального угла, образованного парами лучей, касательных к границе области D в ее граничных точках). Тогда

$$m_D = m_\alpha := \frac{1}{2-\alpha}.$$

Мы рассмотрим поведение оператора P_D в пространствах $\mathrm{Lip}(\omega)$, определяемых модулями непрерывности ω, в каком-то смысле близкими к t^{m_D}. При $m \in (0,1]$ и $p \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ будем рассматривать модули непрерывности $\omega_{m,p}$, которые в подходящей окрестности нуля (своей для каждой функции $\omega_{m,p}$) равны $t^m\big(\log(1/t)\big)^p$ и образуют допустимое семейство модулей непрерывности.

При $\alpha \in [0,1]$ определим области $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ как образы единичного круга $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ при отображении $z \mapsto (z+1)^{2-\alpha}$. Здесь мы рассматриваем однозначную ветвь функции $w^{2-\alpha}$, определенную во внешности отрицательной вещественной полуоси и равную 1 в точке $w = 1$. В этом случае минимальный внешний угол области D_α равен $\pi\alpha$ и, следовательно, $m_{D_\alpha} = m_\alpha = (2-\alpha)^{-1}$.

В обозначениях теоремы 1 для $D = D_\alpha$ при целых $n \geqslant 0$ определим множества $\widetilde{E}_n := \bigcup_{j \geqslant n} E_j$. При этом

$$\mu(a, E_n, D_\alpha) = \mu(a, \widetilde{E}_n, D_\alpha) - \mu(a, \widetilde{E}_{n+1}, D_\alpha).$$

Непосредственное вычисление гармонической меры множества $\widetilde{E}_n$ показывает, что $\mu(a, \widetilde{E}_n, D_\alpha) \asymp (n+1)^{-m_\alpha}$. Отсюда вытекает, что условие (3) теоремы 1 для области D_α эквивалентно следующему условию:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\omega_1(n\delta)}{n^{1+m_\alpha}} \leqslant A\omega_2(\delta), \tag{3.1}$$

где $A > 0$ – некоторая константа.

Из этой оценки непосредственно проверяется (напомним, что суммирование ведется до величины $N \approx 1/\delta$), что при $\omega_1 = \omega_{m_\alpha,p}$ и $\omega_2 = \omega_{m_\alpha,p+1}$ для любого $p \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\omega_{m_\alpha,p}(n\delta)}{n^{1+m_\alpha}} \leqslant \delta^{m_\alpha} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\Big(\log\frac{1}{n} + \log\frac{1}{\delta}\Big)^p \leqslant A\omega_{m_\alpha,p+1}(\delta),$$

откуда следует, что оператор P_{D_α} является $(\omega_{m_\alpha,p}, \omega_{m_\alpha,p+1})$-непрерывным при всех $p \in \mathbb{N}$.

Аналогично проверяется, что неравенство (3.1) не выполняется (ни с какой константой $A > 0$) в случае, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{m_\alpha,p}$ для любого $p \in \mathbb{N}$. Таким образом, оператор P_{D_α} не обладает свойством $(\omega_{m_\alpha,p}, \omega_{m_\alpha,p})$-непрерывности ни для какого p.

В связи с приведенными конструкциями отметим, что при $\alpha = 1$ область D_1 – это круг, m_α в этом случае равно 1, и оператор P_{D_1}

не является $(1,1)$-непрерывным (см., например, теорему 1 в [2]). При $\alpha = 0$ значение показателя m_α равно $1/2$, однако авторам неизвестно, обладает ли оператор P_{D_0} свойством $(1/2, 1/2)$-непрерывности.

Список литературы

1. П. В. Парамонов, *О* Lip^m*- и* C^m*-отражении гармонических функций относительно границ областей Каратеодори в* $\mathbb{R}^2$. — Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки, No. 4 (2018), 36–45.
2. K. Fedorovskiy, P. Paramonov, *On* Lip^m*-reflection of harmonic functions over boundaries of simple Caratheodory domains.* — Anal. Math. Phys. (2019); doi: 10.1007/s13324-019-00296-9.
3. H. Lebesgue, *Sur le problème de Dirichlet.* — Rend. Circ. Mat. di Palermo **29** (1907), 371–402.
4. D. H. Armitage, *Reflection principles for harmonic and polyharmonic functions.* — J. Math. Anal. Appl. **65** (1978), 44–55.
5. D. Khavinson, H. S. Shapiro, *Remarks on the reflection principle for harmonic functions.* — J. Anal. Math. **54** (1990), 60–76.
6. D. Khavinson, *On reflection of harmonic functions in surfaces of revolution.* — Complex Var. Theory Appl. **17** (1991), 7–14.
7. P. Ebenfelt, D. Khavinson, *On point-to-point reflection of harmonic functions across real-analytic hypersurfaces in* $\mathbb{R}^n$. — J. Anal. Math. **68** (1996), 145–182.
8. S. J. Gardiner, H. Render, *A reflection result for harmonic functions which vanish on a cylindrical surface.* — J. Math. Anal. Appl. **443**, No. 1 (2016), 81–91.
9. П. В. Парамонов, *О* C^1*-продолжении и* C^1*-отражении субгармонических функций с областей Ляпунова–Дини на* $\mathbb{R}^N$. — Матем сб. **199**, No. 12 (2008), 79–116.
10. E. H. Johnston, *The boundary modulus of continuity of harmonic functions.* — Pacific J. Math. **90**, No. 1 (1980), 87–98.
11. L. A. Rubel, A. L. Shields, B. A. Taylor, *Mergelyan sets and the modulus of continuity of analytic functions.* — J. Approx. Theor. **15** (1975), 23–40.
12. S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic function theory*, Second Edition, Springer-Verlag, New York (2000).
13. A. Beurling, *Études sur un Problème de Majoration*, Almquist and Wiksell, Upsala (1933).

Borovik E. V., Fedorovskiy K. Yu. On the Lip(ω)-continuity of the operator of harmonic reflection over boundaries of simple Carathéodory domains.

We study continuity conditions for the operator of harmonic reflection of functions over boundaries of simple Carathéodory domains. This operator is viewed as one acting from a space of functions of Lipschitz–Hölder type, defined by a general modulus of continuity, into another space of such kind. The results obtained are based on the continuity criterion for the Poisson operator (acting in the same spaces of functions) in the domains in

question, which are also obtained in the paper; they generalize and refine the results of the recent work by the second author and P. Paramonov (Analysis and Mathematical Physics, 2019).

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН;
С.-Петербургский государственный университет
E-mail: katrina_borovik@mail.ru

Поступило 26 августа 2019 г.

МГТУ им. Н. Э. Баумана;
С.-Петербургский государственный университет
E-mail: kfedorovs@yandex.ru