Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

П. А. Андрианов

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ФРЕЙМОВОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВСПЛЕСКОВ

§1. Введение

Естественным способом определения периодических систем всплесков является периодизация всплесков из $L_2(\mathbb{R}^d)$, что возможно при достаточно быстром убывании всплеск-функций на бесконечности. Такие системы всплесков широко изучались в литературе (см. [5–9, 11–14], [10, §2.6, §3.1]). Однако, многие периодические объекты, которые "заслуживают" называться системами всплесков, не могут быть получены периодизацией, поэтому существуют и другие подходы к определению всплесков на периоде, в более общем смысле. Как и в непериодическом случае, всплески могут быть построены на базе кратномасштабных анализов. Именно, на базе одного периодического кратномасштабного анализа (далее, для краткости, ПКМА) строятся ортогональные базисы и жёсткие фреймы, а на базе двух ПКМА строятся биортогональные базисы и двойственные фреймы (см. [1–4,17]). В данной работе мы используем определение многомерного ПКМА, данное И. Максименко и М. Скопиной в [19] (см. также [18, глава 9]). В [16] Н. Атреас показал, что для того, чтобы двойственные системы всплесков являлись фреймами, достаточно, чтобы они были бесселевыми, а также удовлетворяли некоторому набору технических условий. В данной работе мы устанавливаем достаточные условия для бесселевости многомерной системы всплесков. Одномерный аналог данного результата был получен в [15]. Также, основываясь на этом результате, мы предоставляем способ построения биортогональных двойственных базисов всплесков по любой подходящей последовательности тригонометрических полиномов.

Ключевые слова: всплеск-функция, периодический кратномасштабный анализ, фрейм всплесков, бесселева система.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00055).

§2. Обозначения и вспомогательные утверждения

Мы используем стандартные обозначения: $\mathbb{N}$ – натуральные числа, $\mathbb{R}^d$ – d-мерное евклидово пространство, $x=(x_1,\dots,x_d)$, $y=(y_1,\dots,y_d)$ – его элементы (векторы), $(x,y)=x_1y_1+\dots x_dy_d$, $\mathbf{0}=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^d$, $|x|=\sqrt{(x,x)}$, $\mathbb{Z}^d$ – целочисленная решётка в $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^1$, $\mathbb{Z}_+=\{0,1,\dots\}$, $\mathbb{T}^d=(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]^d$ – d-мерный единичный тор, $\delta_{n,k}$ – символ Кронекера, $\widehat{f}(k)=\int_{\mathbb{T}^d}f(t)e^{-2\pi i(k,t)}dt$ – коэффициент Фурье функции $f\in L_2(\mathbb{T}^d)$ с номером k, $\langle f,g\rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\mathbb{T}^d)$.

Если A – матрица размера $d\times d$, то $\|A\|$ – её евклидова операторная норма из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$, A^* – матрица, эрмитово сопряженная с ней, $A^{*j}=(A^*)^j$, I_d – единичная матрица размера $d\times d$. Если A – невырожденная целочисленная матрица размера $d\times d$, будем говорить, что векторы k, n сравнимы по модулю A и писать $k\equiv n \pmod{A}$, если $k-n=Al$, где $l\in\mathbb{Z}^d$. Целочисленная решётка $\mathbb{Z}^d$ разбивается на классы смежности относительно введённого отношения сравнения. Количество этих классов смежности равно $|\det A|$ (см., например, [18, предложение 2.2.1]). Множество, содержащее в себе ровно по одному представителю каждого класса смежности, мы будем называть множеством цифр матрицы A. В тех ситуациях, когда неважно, какое именно множество цифр выбрано, мы будем считать его выбранным произвольным образом и обозначать символом $D(A)$. Также отметим, что множество $H(A):=\mathbb{Z}^d\cap A\mathbb{T}^d$ является множеством цифр (см. [18, предложение 2.2.1]). Кроме этого, известна следующая связь между множествами цифр матриц A, A^j и A^{j+1}.

Лемма 1 ([18], лемма 2.2.3)**.** *Пусть A – невырожденная целочисленная матрица размера $d\times d$, $|\det A|>1$. Тогда множество $\{r+A^jp\}$ при всевозможных $r\in D(A^j)$ и $p\in D(A)$ является множеством цифр матрицы A^{j+1}.*

Во всей работе через M мы будем обозначать матрицу из класса квадратных целочисленных матриц, у которых все собственные числа по модулю больше единицы. Также введём обозначение $m:=|\det M|$. Сразу заметим, что у матрицы M^{-1} все собственные числа по модулю меньше единицы и их конечное число, а значит спектральный радиус матрицы M^{-1} также меньше единицы. Отсюда следует, что справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\|M^{-n}\|=0. \tag{1}$$

Для любой последовательности функций $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}\subset L_2(\mathbb{T}^d)$ введём обозначение для сдвигов $f_{jk}:=f_j(\cdot+M^{-j}k)$. Под системой всплесков мы будем понимать систему сдвигов $\{f_{jk}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,k\in D(M^j)}$, ассоциированную с последовательностью функций $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}\subset L_2(\mathbb{T}^d)$, и обозначать её через $\{f_{jk}\}_{j,k}$. При наличии нескольких последовательностей $\{f_j^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, $\nu=1,\dots,n$, $n\in\mathbb{N}$, систему, представляющую собой объединение систем всплесков каждой последовательности, также будем называть системой всплесков и обозначать символом $\{f_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$. При необходимости уточнения множеств индексов мы будем писать $\{f_{jk}^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,k\in D(M^j),\nu=1,\dots,n}$.

Также нам потребуется несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2 ([18], лемма 2.2.6)**.** *Пусть A – невырожденная целочисленная матрица размера $d\times d$, $|\det A|>1$. Тогда*

$$\sum_{s\in D(A^*)} e^{2\pi i(A^{-1}r,s)}=\begin{cases}|\det A|, & \text{если } r\equiv 0 \pmod A,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{2}$$

Лемма 3. *Пусть f, g, $\varphi,\widetilde{\varphi}_j\in L_2(\mathbb{T}^d)$ для всех $j\in\mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$\sum_{k\in D(M^j)}\langle f,\varphi_{jk}\rangle\langle\widetilde{\varphi}_{jk},g\rangle=\sum_{s\in D(M^{*j})}\Bigg(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\widehat{f}(M^{*j}n+s)m^{j/2}\overline{\widehat{\varphi_j}(M^{*j}n+s)}\\ \times\overline{\sum_{n'\in\mathbb{Z}^d}\widehat{g}(M^{*j}n'+s)m^{j/2}\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(M^{*j}n'+s)}}\Bigg).$$

Доказательство. Для начала заметим, что

$$\widehat{\varphi_{jk}}(n)=\widehat{\varphi_j}(n)e^{2\pi i(M^{*-j}n,k)}. \tag{3}$$

Так как M – невырожденная целочисленная матрица, то равенство $p=Mk+s$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех $p\in\mathbb{Z}^d$ и множеством пар (k,s), $k\in\mathbb{Z}^d$, $s\in D(M)$. Используя равенство Парсеваля, и затем заменив индекс суммирования по $\mathbb{Z}^d$, имеем:

$$\sum_{k\in D(M^j)}\langle f,\varphi_{jk}\rangle\langle\widetilde{\varphi}_{jk},g\rangle\\ =\sum_{k\in D(M^j)}\Bigg(\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\widehat{f}(l)\overline{\widehat{\varphi_j}(l)e^{2\pi i(M^{*-j}l,k)}}\,\overline{\sum_{l'\in\mathbb{Z}^d}\widehat{g}(l')\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}_j(l')}e^{2\pi i(M^{*-j}l',k)}}\Bigg)$$

$$= \sum_{k\in D(M^j)} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{s\in D(M^{*j})} \widehat{f}(M^{*j}n+s)\overline{\widehat{\varphi_j}(M^{*j}n+s) e^{2\pi i(M^{*-j}s,k)}}$$

$$\times \overline{\sum_{n'\in\mathbb{Z}^d} \sum_{s'\in D(M^{*j})} \widehat{g}(M^{*j}n'+s')\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(M^{*j}n'+s')} e^{2\pi i(M^{*-j}s',k)}} \Big)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{s\in D(M^{*j})} \sum_{n'\in\mathbb{Z}^d} \sum_{s'\in D(M^{*j})} \widehat{f}(M^{*j}n+s)\overline{\widehat{\varphi_j}(M^{*j}n+s)}$$

$$\times \overline{\widehat{g}(M^{*j}n'+s')\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(M^{*j}n'+s')}} \sum_{k\in D(M^j)} \overline{e^{2\pi i(M^{*-j}s,k)}} e^{2\pi i(M^{*-j}s',k)}.$$

По лемме 2,

$$\sum_{k\in D(M^j)} e^{2\pi i(M^{*-j}(s-s'),k)} = m^j \delta_{s,s'}, \tag{4}$$

так как из определения множества $D(M^{*j})$ следует, что условие $s–s'\equiv 0 \pmod{M^{*j}}$ выполняется только если $s = s'$. Таким образом, все слагаемые при $s \neq s'$ равны нулю, что и влечёт за собой утверждение леммы. $\square$

§3. Основная теорема

Теорема 1. *Пусть коэффициенты Фурье функций $\psi_j \in L_2(\mathbb{T}^d)$, $j\in\mathbb{Z}_+$, удовлетворяют условиям*

$$\forall j \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{Z}^d \quad |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)| \leqslant C \min\Big\{ |M^{*-j}l|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)}, |M^{*-j}l|^{\alpha} \Big\} \tag{5}$$

для некоторых $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$. Тогда система всплесков $\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ является бесселевой.

Доказательство. Для начала заметим, что из условий теоремы следует выполнение условия

$$\forall j \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{Z}^d \quad |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)| \leqslant C. \tag{6}$$

Теперь выберем $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $\delta \in (0; \frac{2\varepsilon}{d+2\varepsilon})$. Используя лемму 3 и неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\sum_{k\in H(M^j)} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2$$

$$= \sum_{s\in H(M^{*j})} \Big| \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(M^{*j}n+s)\overline{m^{j/2}\widehat{\psi_j}(M^{*j}n+s)} \Big|^2$$

$$\leqslant \sum_{s\in H(M^{*j})} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(M^{*j}n+s)|^2 |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(M^{*j}n+s)|^{2\delta} \\ \times \sum_{n'\in\mathbb{Z}^d} |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(M^{*j}n'+s)|^{2(1-\delta)} \Big). \tag{7}$$

Рассмотрим сумму по $n' \in \mathbb{Z}^d$. Для $n' = \mathbf{0}$ применим оценку (6). Для $n' \neq \mathbf{0}$, применяя первую оценку из (5), имеем

$$|m^{j/2}\widehat{\psi_j}(M^{*j}n'+s)|^{2(1-\delta)} \leqslant C^{2(1-\delta)} \Big(\frac{1}{|n'+M^{*-j}s|} \Big)^{2(1-\delta)(\frac{d}{2}+\varepsilon)}.$$

Легко проверить, что при выбранном δ неравенство $2(1-\delta)(\frac{d}{2}+\varepsilon) > d$ выполнено. Используя, что $M^{*-j}s \in (-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]^d$ при $s \in H(M^{*j})$, получаем

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}_+} \Big(\sum_{n'\in\mathbb{Z}^d} |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(M^{*j}n'+s)|^{2(1-\delta)} \Big) \\ \leqslant \sup_{j\in\mathbb{Z}_+} \Big(C^{2(1-\delta)} + C^{2(1-\delta)} \sum_{\substack{n'\in\mathbb{Z}^d \\ n'\neq 0}} \Big(\frac{1}{|n'+M^{*-j}s|} \Big)^{2(1-\delta)(\frac{d}{2}+\varepsilon)} \Big) \leqslant C',$$

где C' зависит только от матрицы M.

Суммируя неравенства (7) по j, получаем

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \sum_{k\in H(M^j)} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2 \\ \leqslant C' \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \sum_{s\in D(M^{*j})} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(M^{*j}n+s)|^2 |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(M^{*j}n+s)|^{2\delta} \\ = C' \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(l)|^2 |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)|^{2\delta} \\ \leqslant C' \sup_{l\in\mathbb{Z}^d} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)|^{2\delta} \Big) \|f\|^2. \tag{8}$$

Рассмотрим выражение под знаком супремума. Выберем наименьшее $J \in \mathbb{Z}_+$, такое что $\|M^{*-J}\| < 1$ (из (1) следует, что такое J найдётся), и зафиксируем $l \in \mathbb{Z}^d$. Разделим сумму по j на J частей следующим образом:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)|^{2\delta} = \sum_{k=0}^{J-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} |m^{\frac{(sJ+k)}{2}}\widehat{\psi}_{sJ+k}(l)|^{2\delta}. \tag{9}$$

Теперь выберем максимальное число $j'\in\mathbb{Z}_+$, такое что $|M^{*-j'J}l|\geqslant 1$, зафиксируем индекс k и разобьём сумму по $s\in\mathbb{Z}_+$ по схеме

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} = \sum_{\substack{s\geqslant 0\\ s\leqslant j'}} + \sum_{s>j'} := \sigma_1+\sigma_2.$$

Для σ_2 применим вторую оценку из (5) и получим

$$\sigma_2 \leqslant C^{2\delta}\|M^{*-k}\|^{2\delta\alpha}\sum_{s>j'}|M^{*-sJ}l|^{2\delta\alpha} = C'_k\sum_{s=1}^{\infty}|M^{*-(s+j')J}l|^{2\delta\alpha}$$

$$\leqslant C'_k|M^{*-(j'+1)J}l|^{2\delta\alpha}\sum_{s=1}^{\infty}\|M^{*-J}\|^{(s-1)2\delta\alpha}\leqslant C'',$$

где C'' зависит только от матрицы M, так как при выбранных J и j' верны неравенства $|M^{*-(j'+1)J}l|^{2\delta\alpha}<1$, а количество констант C'_k конечно и также зависит только от матрицы M.

Для σ_1 применим первую оценку из (5):

$$\sigma_1\leqslant C^{2\delta}\|M^{*-k}\|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta}\sum_{\substack{s\geqslant 0\\ s\leqslant j'}}|M^{*-sJ}l|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta}.$$

Введём обозначение: $r=M^{*-j'J}l$. Заметим, что $|r|\geqslant 1$ в силу выбора j'. Далее,

$$\sum_{\substack{s\geqslant 0\\ s\leqslant j'}}|M^{*-(s+j'-j')J}l|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta} = \sum_{\substack{s\geqslant 0\\ s\leqslant j'}}|M^{*-(s-j')J}r|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta}$$

$$=\sum_{i=0}^{j'}|M^{*iJ}r|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta} = \sum_{i=0}^{j'}\Big(\frac{|M^{*iJ}r|}{|r|}|r|\Big)^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta}$$

$$=\sum_{i=0}^{j'}\Big(\frac{|M^{*-iJ}M^{*iJ}r|}{|M^{*iJ}r|}\frac{1}{|r|}\Big)^{(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta}\leqslant\sum_{i=0}^{j'}\|M^{*-iJ}\|^{(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta}$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\|M^{*-J}\|^{i(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta}\leqslant C''',$$

где C''' зависит только от M.

Итак, мы показали, что суммы σ_1 и σ_2, а следовательно и выражение в правой части формулы (9), равномерно ограничены по l. В конечном итоге, возвращаясь к неравенству (8), имеем

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k\in H(M^j)}|\langle f,\psi_{jk}\rangle|^2\leqslant\widetilde{C}\|f\|^2,$$

где $\widetilde{C}$ зависит только от M. $\square$

§4. Построение полиномиальных базисов всплесков

Определение 1 ([18], определение 9.1.1). *Пусть $V_j\subset L_2(\mathbb{T}^d)$, $j\in\mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что совокупность $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ является* периодическим кратномасштабным анализом (далее ПКМА), *если выполнены следующие свойства* (*аксиомы*):

MR1. $V_j\subset V_{j+1}$;

MR2. $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty}V_j}=L_2(\mathbb{T}^d)$;

MR3. $\dim V_j=m^j$;

MR4. $\dim\{f\in V_j: f(\cdot+M^{-j}n)=\lambda_n f\,\forall n\in\mathbb{Z}^d\}\leqslant 1,\ \forall\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d},\lambda_n\in\mathbb{C}$;

MR5. $f\in V_j\Leftrightarrow f(\cdot+M^{-j}n)\in V_j\ \forall n\in\mathbb{Z}^d$;

MR6. $f\in V_j\Rightarrow f(M\cdot)\in V_{j+1}$; $f\in V_{j+1}\Rightarrow\sum_{s\in D(M)}f(M^{-1}\cdot+M^{-1}s)\in V_j$.

Определение 2 ([18], определение 9.1.3). *Пусть $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$* – ПКМА *в $L_2(\mathbb{T}^d)$. Последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, $\varphi_j\in V_j$, называется* масштабирующей, *если функции φ_{jk}, $k\in D(M^j)$, образуют базис пространства V_j.*

Теорема 2 ([18], теорема 9.1.4). *Функции $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}\subset L_2(\mathbb{T}^d)$ образуют масштабирующую последовательность для некоторого* ПКМА *тогда и только тогда, когда*:

S1. $\widehat{\varphi_0}(k)=0$, *для всех* $k\neq 0$;

S2. *для любого $j\in\mathbb{Z}_+$ и для любого $n\in\mathbb{Z}^d$ существует $k\equiv n$* $(\mathrm{mod}\ M^{*j})$, *такое что* $\widehat{\varphi_j}(k)\neq 0$;

S3. *для любого $k\in\mathbb{Z}^d$ существует $j\in\mathbb{Z}_+$, такое что* $\widehat{\varphi_j}(k)\neq 0$;

S4. *для любых $j\in\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{Z}^d$, существует число $\gamma_n^j\neq 0$, такое что $\gamma_n^j\widehat{\varphi_j}(k)=\widehat{\varphi_{j+1}}(M^*k)$ для всех $k\equiv n$* $(\mathrm{mod}\ M^{*j})$;

S5. *для любых $j\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}^d$, существует μ_n^j, такое что $\widehat{\varphi_{j-1}}(k)=\mu_n^j\widehat{\varphi_j}(k)$ для всех $k\equiv n$* $(\mathrm{mod}\ M^{*j})$.

Заметим, что в теореме 2 последовательности чисел $\{\gamma_k^j\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $\{\mu_k^j\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ являются M^{*j}-периодичными по k для любого $j\in\mathbb{Z}_+$.

Пусть $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$ – масштабирующие последовательности, s_k – перенумерованные произвольным образом цифры матрицы M^*, а матрицы $A^{(r)}=\{a_{nk}^{(r)}\}_{n,k=0}^{m-1}$, $\widetilde{A}^{(r)}=\{\widetilde{a}_{nk}^{(r)}\}_{n,k=0}^{m-1}$ такие, что

$$a_{0k}^{(r)}=\mu_{r+M^{*j}s_k}^{j+1},\quad \widetilde{a}_{0k}^{(r)}=\widetilde{\mu}_{r+M^{*j}s_k}^{j+1} \tag{10}$$

и для любого $r\in D(M^{*j})$ выполняется $A^{(r)}\widetilde{A}^{(r)*}=mI_m$. Для $\nu=1,\dots,m-1$, положим

$$\alpha_{r+M^{*j}s_k}^{\nu,j}=a_{\nu k}^{(r)},\quad \widetilde{\alpha}_{r+M^{*j}s_k}^{\nu,j}=\widetilde{a}_{\nu k}^{(r)}. \tag{11}$$

По лемме 1, векторы $r+M^{*j}s_k$ пробегают всё множество $D(M^{*j+1})$, т. е. мы можем M^{*j+1}-периодически распространить эти последовательности на $\mathbb{Z}^d$. Определим функции $\psi_j^{(\nu)}$, $\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}$, задав их коэффициенты Фурье по формулам

$$\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l)=\alpha_l^{\nu,j}\widehat{\varphi_{j+1}}(l),\quad \widehat{\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}}(l)=\widetilde{\alpha}_l^{\nu,j}\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(l). \tag{12}$$

Системы $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,k\in D(M^j),\nu=1,\dots,m-1}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ будем называть *двойственными системами всплесков, порождёнными масштабирующими последовательностями* $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$. Теперь приведём теорему, которая устанавливает условия фреймовости для таких систем. Отметим, что в данной теореме большую роль играет условие бесселевости, проверка которого описана в предыдущем разделе.

Теорема 3 (см. [16]). *Пусть $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$ – масштабирующие последовательности, удовлетворяющие условию*

$$\lim_{j\to+\infty} m^j\widehat{\varphi_j}(k)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(k)}=1\quad \forall k\in\mathbb{Z}^d, \tag{13}$$

а $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ – порождённые ими бесселевы двойственные системы всплесков. Тогда эти системы являются двойственными фреймами.

Введём обозначение $\chi_S=\sum_{k\in S}e^{ik\cdot}$, где $S\subset\mathbb{Z}^d$.

Теорема 4. *Пусть матрица M такая, что выполнено условие $\mathbb{T}^d\subset M^*\mathbb{T}^d$, и последовательность тригонометрических полиномов*

$\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям:*

$$\begin{cases} A \leqslant |m^{j/2}\widehat{\varphi_j}(k)| \leqslant B & \text{при } k \in H(M^{*j}), \\ \widehat{\varphi_j}(k) = 0 & \text{при } k \notin H(M^{*j}), \end{cases} \tag{14}$$

где $A, B > 0$. *Тогда*

1. $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ *образуют масштабирующую последовательность.*

2. *Для каждого* $j \in \mathbb{Z}_+$ *существует разбиение множества* $H(M^{*j+1})\setminus H(M^{*j})$ *на подмножества* $N_j^{(\nu)}$, *такое что система всплесков* $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k\in D(M^j),\, \nu=1,\dots m-1}$, *где*

$$\psi_j^{(\nu)} = \sqrt{m}(\chi_{N_j^{(\nu)}} * \varphi_{j+1}),$$

является базисом Рисса в $L_2(\mathbb{T}^d)$.

3. *Существует базис всплесков* $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, *биортогональный с базисом* $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, *который также состоит из тригонометрических полиномов.*

Доказательство. Для проверки первого утверждения напомним, что $H(M^{*j})$ – множество цифр матрицы M^{*j}. Условия S1 и S2 сразу следуют из (14). Ввиду (1), для любого $k \in \mathbb{Z}^d$ существует такое $j \in \mathbb{Z}_+$, что $M^{*-j}k \in \mathbb{T}^d$, а значит $k \in H(M^{*j})$ и $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$, что влечёт S3. Положив

$$\mu_k^j = \frac{\widehat{\varphi_{j-1}}(k)}{\widehat{\varphi_j}(k)}, \qquad \gamma_k^j = \frac{\widehat{\varphi_{j+1}}(M^*k)}{\widehat{\varphi_j}(k)} \tag{15}$$

для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ и $k \in H(M^{*j})$ и распространив эти последовательности M^{*j}-периодически на $\mathbb{Z}^d$ по нижнему индексу, мы легко видим, что свойства S4, S5 также выполнены.

Теперь перейдём к доказательству второго и третьего утверждений.

Для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(k) = \begin{cases} \frac{m^{-j}}{\overline{\widehat{\varphi_j}(k)}}, & k \in H(M^{*j}), \\ 0, & k \notin H(M^{*j}). \end{cases} \tag{16}$$

Легко проверить, что последовательность $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы с константами $\widetilde{A} = \frac{1}{B}$, $\widetilde{B} = \frac{1}{A}$, а следовательно она также является масштабирующей. Также очевидно выполнение условия

$$\lim_{j\to+\infty} m^j \widehat{\varphi_j}(k)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(k)} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d. \tag{17}$$

Теперь перейдём к построению двойственных систем всплесков, порождённых этими масштабирующими последовательностями. Нам будет удобно использовать представление множеств цифр матриц M^{*j}, которое даёт лемма 1, а именно

$$D(M^{*j}) = \bigcup_{\substack{r\in D(M^{*j-1}) \\ p\in D(M^*)}} \{r + M^{*j-1}p\}. \tag{18}$$

Но стоит заметить, что это множество не обязательно совпадает с $H(M^{*j})$. Тем не менее, когда речь будет идти о коэффициентах μ_n^j, в силу их M^{*j}-периодичности мы можем считать их заданными на любом множестве цифр (в том числе на $H(M^{*j})$), как только они будут заданы хотя бы на одном множестве цифр.

Из (15) следует, что

$$\begin{aligned} &\mu_k^{j+1} \neq 0 \quad \text{при}\, k \in H(M^{*j}), \\ &\mu_k^{j+1} = 0 \quad \text{при}\, k \in H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j}). \end{aligned} \tag{19}$$

С помощью леммы 1, положив в ней $D(M^{*j}) = H(M^{*j})$, $D(M^*) = H(M^*)$, перепишем (19) в виде

$$\forall r \in H(M^{*j}) \qquad \mu^{j+1}_{r+M^{*j}p} \begin{cases} \neq 0 & \text{при}\, p = \mathbf{0}, \\ = 0 & \text{при}\, p \neq \mathbf{0},\ p \in H(M^*). \end{cases} \tag{20}$$

Теперь построим матрицы $A^{(r)}$ и $\widetilde{A}^{(r)}$. Перенумеруем цифры $p \in H(M^*)$ таким образом, что $p_0 = \mathbf{0}$. Зададим первую строку так:

$$a^{(r)}_{0k} = \mu^{j+1}_{r+M^{*j}p_k}, \quad \widetilde{a}^{(r)}_{0k} = \widetilde{\mu}^{j+1}_{r+M^{*j}p_k}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{21}$$

Продолжим матрицы до квадратных, положив диагональные элементы равными $\sqrt{m}$, начиная со второй строки, а остальные элементы равными нулю. В силу (20), эти матрицы являются диагональными, а именно

$$A^{(r)} = \begin{bmatrix} \mu_r^{j+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{m} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{m} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A}^{(r)} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mu}_r^{j+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{m} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{m} \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что $A^{(r)}\widetilde{A}^{(r)*} = mI_m$. Положим

$$\alpha^{\nu,j}_{r+M^{*j}p_k} = a^{(r)}_{\nu k}, \quad \widetilde{\alpha}^{\nu,j}_{r+M^{*j}p_k} = \widetilde{a}^{(r)}_{\nu k}.$$

При этом, так как $r \in H(M^{*j})$, $p_k \in H(M^{*j})$, то векторы $r + M^{*j}p_k$, $k = 1, \ldots, m-1$, пробегают множество цифр $D(M^{*j+1})$. Таким образом, мы можем M^{*j+1}-периодически распространить коэффициенты $\alpha^{\nu,j}_l$, $\widetilde{\alpha}^{\nu,j}_l$ на $\mathbb{Z}^d$.

Теперь, для $\nu = 1, \ldots, m-1$, положим

$$\widehat{\psi^{(\nu)}_j}(l) = \alpha^{\nu,j}_l \widehat{\varphi_{j+1}}(l), \quad \widehat{\widetilde{\psi}^{(\nu)}_j}(l) = \alpha^{\nu,j}_l \widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(l).$$

В силу условий теоремы,

$$\widehat{\psi^{(\nu)}_j}(l) = \begin{cases} \sqrt{m}\widehat{\varphi_{j+1}}(l) & \text{при } l \in H(M^{*j+1}), l \equiv r + M^{*j}p_\nu \\ & \ (\mathrm{mod}\ M^{*j+1}), \\ & r \in H(M^{*j}), p_\nu \in H(M^*); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{22}$$

Отсюда видно, что справедлива оценка сверху

$$|m^{j/2}\widehat{\psi^{(\nu)}_j}(l)| \leqslant |m^{j/2}\sqrt{m}\widehat{\varphi_{j+1}}(l)| \leqslant \sqrt{m}B. \tag{23}$$

Положим

$$N^{(\nu)}_j = \{l \in H(M^{*j+1}) : l \equiv r + M^{*j}p_\nu \ (\mathrm{mod}\ M^{*j+1}), \\ r \in H(M^{*j}), p_\nu \in H(M^*)\}.$$

Покажем, что для любых $j \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = 1, \ldots, m-1$ множество $N^{(\nu)}_j$ целиком лежит в $H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$. Из определения множества $N^{(\nu)}_j$ следует, что достаточно показать, что $N^{(\nu)}_j \not\subset H(M^{*j})$. Действительно, если $r + M^{*j}p_\nu \in H(M^{*j+1})$ для всех $\nu = 1, \ldots, m-1$, то требуемое очевидно, так как p_ν – ненулевые цифры. Если же $r + M^{*j}p_\nu \notin H(M^{*j+1})$, то нужно показать, что не существует такого $r' \in H(M^{*j})$, что $r' = r + M^{*j}p_\nu + M^{*j+1}k$, при $p_\nu, k \neq \mathbf{0}$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Такое действительно невозможно, так как имело бы место представление $r' - r = M^{*j}(M^*k + p_\nu)$, что при $r, r' \in H(M^{*j})$ может быть выполнено, только если $M^*k + p_\nu = \mathbf{0}$. Но выполнение этого равенства также невозможно, так как $p_\nu \in H(M^*)$. Также отметим следующее. По лемме 1,

$$\{r + M^{*j}p_\nu\}_{r \in H(M^{*j}), \nu = 1, \ldots, m-1} = D(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j}), \tag{24}$$

а множества $N_j^{(\nu)}$ составляются из векторов, принадлежащих $H(M^{*j+1})$ и сравнимых по модулю M^{*j+1} с векторами из (24), в котором векторы не сравнимы между собой по модулю M^{*j+1} по определению множества цифр. То есть вектор из $N_j^{(\nu)}$ не может быть сравним по модулю M^{*j+1} с двумя разными векторами из (24), а значит объединение всех множеств $N_j^{(\nu)}$ при фиксированном j содержит столько же элементов, сколько и множество (24). Из вышесказанного и из того, что множество $H(M^{*j+1})\setminus H(M^{*j})$ содержит $m^j(m-1)$ элементов, следуют дизъюнктность множеств $N_j^{(\nu)}$ и то, что их объединение равно $H(M^{*j+1})\setminus H(M^{*j})$. То есть, множества $N_j^{(\nu)}$ действительно образуют разбиение множества $H(M^{*j+1})\setminus H(M^{*j})$.

Таким образом, все ненулевые коэффициенты $\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l)$ содержатся в множестве $H(M^{*j+1})\setminus H(M^{*j})$. Для векторов l из этого множества имеет место включение

$$M^{*-j}l \in H(M^*)\setminus \mathbb{T}^d$$

и, соответственно, неравенство

$$\frac{1}{2} \leqslant |M^{*-j}l| \leqslant \|M^*\|\sqrt{d}. \tag{25}$$

Очевидно, что требуется проверить условие (5) только для ненулевых коэффициентов. Если $l \in H(M^{*j+1})\setminus H(M^{*j})$, то из (23) и (25) следует, что

$$|m^{j/2}\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l)| \leqslant \sqrt{m}B \leqslant 2\sqrt{m}B|M^{*-j}l|,$$
$$|m^{j/2}\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l)| \leqslant \sqrt{m}B \leqslant \|M^*\|^d d^{d/2}\sqrt{m}B|M^{*-j}l|^{-d},$$

то есть (5) выполнено при $\varepsilon = d/2$, $\alpha = 1$.

Теперь отметим, что система $\{\widetilde{\varphi}_0\} \cup \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ также является бесселевой, так как она фактически обладает теми же свойствами, что и $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$. Также, по построению эти системы являются двойственными системами всплесков, порождёнными парой масштабирующих последовательностей. Учитывая этот факт и равенство (17), мы видим, что все условия теоремы 3 выполнены, то есть эти системы всплесков являются двойственными фреймами.

Проверим биортонормированность систем $\{\varphi_{jn}\}_{n\in D(M^j)}$ и $\{\widetilde{\varphi}_{jk}\}_{k\in D(M^j)}$ при всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Учитывая формулу (3) и равенство нулю коэффициентов Фурье этих функций за пределами множества $H(M^{*j})$, имеем

$$\langle\varphi_{jk},\widetilde{\varphi}_{jl}\rangle=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\widehat{\varphi_{jk}}(n)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_{jl}}(n)}=\sum_{s\in H(M^{*j})}\widehat{\varphi_j}(s)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(s)}e^{2\pi i(M^{*-j}s,k-l)},$$

и из леммы 2 и формулы (16) получаем требуемое. Биортогональность всплесков теперь следует из теоремы 9.2.4 в [18, §9.2], а из биортогональности двойственных фреймов следует, что оба фрейма являются базисами Рисса (см. [10, §1.2]). □

Замечание 1. Условие $\mathbb{T}^d\subset M^*\mathbb{T}^d$ в теореме 4 существенно, так как без его выполнения у последовательности $\{\varphi_j\}_j$ может отсутствовать свойство **S5** из теоремы 2. Приведём конкретный пример. Положим

$$M=\begin{bmatrix}2&0\\9&3\end{bmatrix},\quad k=(3,1).$$

Очевидно, что у данной матрицы собственные числа по модулю больше единицы, и легко проверить, что $\mathbb{T}^d\not\subset M\mathbb{T}^d$. Также, $k\in H(M^*)$, но $k\notin H(M^{*2})$. Из этого следует, что $\widehat{\varphi_1}(k)\neq 0$, но $\widehat{\varphi_2}(k)=0$, и отсюда очевидно, что не существует μ_k^2, такого что $\widehat{\varphi_1}(k)=\mu_k^2\widehat{\varphi_2}(k)$.

Замечание 2. Условие $\mathbb{T}^d\subset M^*\mathbb{T}^d$ заведомо выполняется при $\|M^{*-1}\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{d}}$.

Список литературы

1. C. K. Chui, J. Z. Wang, *A general framework of compact supported splines and wavelets.* — J. Approx. Theory **71** (1992), 263–304.
2. S. S. Gon, S. Z. Lee, Z. Shen, W. S. Tang, *Construction of Schauder decomposition on Banach spaces of periodic functions.* — Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, **41**, No. 1 (1998), pp. 61–91.
3. A. P. Petukhov, *Periodic wavelets.* — Mat. Sb. **188**, No. 10 (1997), 69–94.
4. V. A. Zheludev, *Periodic splines and wavelets.* — Proc. of the Conference “Math. Analysis and Signal Processing,” Cairo, Jan. 2–9 (1994).
5. B. Han, *On dual wavelet tight frames.* — ACHA **4** (1997), 380–413.
6. I. Daubechies, B. Han, A. Ron, Z. Shen, *Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames.* — ACHA, **14**, No. 1 (2003), p. 1–46.
7. B. Han, *Compactly supported tight wavelet frames and orthonormal wavelets of exponential decay with a general dilation matrix.* — J. Comput. Appl. Math., **155** (2003), 43–67.
8. M. Skopina, *Wavelet approximation of periodic functions.* — J. Approx. Theory **104**, No. 2 (2000), 302–329.
9. M. A. Skopina, *Local convergence of Fourier series with respect to periodized wavelets.* – J. Approx. Theory **94**, No. 2 (1998), 191–202.

10. A. Krivoshein, V. Protasov, M. Skopina, *Multivariate Wavelet Frames*. Springer Singapore, 2016. p. 182.
11. A. Ron, Z. Shen, *Gramian analysis of affine bases and affine frames*. — Approximation Theory VIII, V. 2: Wavelets (C.K. Chui and L. Schumaker, eds) World Scientific Publishing Co. Inc (Singapore). 1995, p. 375–382.
12. A. Ron, Z. Shen, *Frame and stable bases for shift-invariant subspaces of* $L_2(\mathbb{R}^d)$. — Canad. J. Math. **47**, No. 5 (1995), 1051–1094.
13. A. Ron, Z. Shen, *Affine systems in* $L_2(\mathbb{R}^d)$*: the analysis of the analysis operator*. — J. Funct. Anal. **148** (1997), 408–447.
14. A. Ron, Z. Shen, *Affine systems in* $L_2(\mathbb{R}^d)$*: dual systems*. — J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), 617–637.
15. P. Andrianov, *On sufficient frame conditions for periodic wavelet systems*. — Intern. J. Wavelets, Multiresolution and Information Processing **16**, No. 1 (2018) 1850002.
16. N. D. Atreas, *Characterization of dual multiwavelet frames of periodic functions*. — Intern. J. Wavelets, Multiresolution and Information Processing **14**, No. 03 (2016), 1650012.
17. M. Skopina, *Multiresolution analysis of periodic functions*. — East J. On Approximations, **3**, No. 2 (1997), 203–224.
18. I. Y. Novikov, V. Y. Protasov, M. A. Skopina, *Wavelet Theory*. American Mathematical Society (2011).
19. I. Maksimenko, M. Skopina, *Multivariate periodic wavelets*. — St. Petersburg Math. J. **15** (2004), 165–190.

Andrianov P. A. Sufficient conditions for a multidimensional system of periodic wavelets to be a frame.

Multidimensional periodic wavelet systems with matrix dilations are studied. Sufficient conditions under which such a system is Bessel are established. The conditions are given in terms of Fourier coefficients. A way of constructing a wavelet Riesz basis that starts with a suitable sequence of trigonometric polynomials is provided.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетская наб. 7/9
199304 С.-Петербург
E-mail: p.andrianov@spbu.ru

Поступило 9 октября 2019 г.