Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

А. Б. Александров

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОБ ОПЕРАТОРНО ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЯХ

§0. Введение

Пусть $\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ обозначает множество всех липшицевых функций f на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. $\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ – это множество всех функций f на $\mathfrak{F}$ таких, что

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant C|z_2 - z_1| \tag{0.1}$$

для всех $z_1, z_2 \in \mathfrak{F}$. Наименьшую из констант $C \geqslant 0$, удовлетворяющих условию (0.1), обозначим через $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$.

Непрерывная функция на множестве $\mathfrak{F}$ называется *операторно липшицевой*, если существует константа C такая, что[1]

$$\|f(N_2) - f(N_1)\| \leqslant C\|N_2 - N_1\| \tag{0.2}$$

для любых нормальных операторов N_1 и N_2 в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со спектрами, лежащими в $\mathfrak{F}$. Множество всех операторно липшицевых функций на $\mathfrak{F}$ обозначим через $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$. Пусть $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$ обозначает наименьшую из констант $C \geqslant 0$, удовлетворяющих условию (0.2).

Если функция f задана на более широком множестве, чем $\mathfrak{F}$, то для краткости мы будем писать $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$ вместо $f|_{\mathfrak{F}} \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и $\|f|_{\mathfrak{F}}\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$. Мы будем писать $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = +\infty$, если $f \notin \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$. Эти же соглашения будет действовать и для других функциональных пространств.

Ясно, что $\mathrm{OL}(\mathfrak{F}) \subset \mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ и $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \leqslant \|\cdot\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$. Известно, что равенство $\mathrm{OL}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ выполняется только для конечных множеств $\mathfrak{F}$.

Ключевые слова: операторно липшицевы функции.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00053).

[1]В этой статье мы рассматриваем только операторные нормы. Таким образом, если T – оператор, то $\|T\|$ обозначает его операторную норму.

Нас будут интересовать функции $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$, для которых выполняется равенство $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$. В основном мы будем рассматривать случай, когда $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$ (в этом случае нормальные операторы N_1 и N_2 в формуле (0.2) являются самосопряжёнными). Будет рассмотрен также случай $\mathfrak{F} = \mathbb{T}$ (тогда соответствующие нормальные операторы N_1 и N_2 являются унитарными).

Непрерывная функция на замкнутом множестве $\mathfrak{F}$ называется *коммутаторно липшицевой*, если существует константа C такая, что

$$\|f(N)R - Rf(N)\| \leqslant C\|NR - RN\| \tag{0.3}$$

для любого нормального оператора N в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со спектром в $\mathfrak{F}$ и любого ограниченного оператора R в том же пространстве $\mathcal{H}$. Множество всех коммутаторно липшицевых функций на $\mathfrak{F}$ обозначим через $\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$. Наименьшую из констант $C \geqslant 0$, удовлетворяющих условию (0.3), обозначим через $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$.

Здесь мы приводим несколько известных свойств операторно липшицевых и коммутаторно липшицевых функций. Более подробную информация о классах $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и $\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ можно найти, например, в обзоре [3].

Хорошо известно, что $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) \subset \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$.

Любая функция $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ дифференцируема в каждой неизолированной точке ζ_0 множества $\mathfrak{F}$, см. [4] и [3]. Другими словами, существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{\mathrm{def}}{=} f'(z_0)$. Кроме того, если множество $\mathfrak{F}$ неограничено, то существует конечный предел $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \dfrac{f(z)}{z} \stackrel{\mathrm{def}}{=} f'(\infty)$ для любой функции $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$.

Следует отметить, что производная f' коммутаторно липшицевой функции f не обязана быть непрерывной. Например, хорошо известно, что функция $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ принадлежит классу $\mathrm{OL}(\mathbb{R}) = \mathrm{CL}(\mathbb{R})$, но её производная разрывна в нуле.

Из свойства дифференцируемости функций класса $\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ следует, что $\overline{z} \notin \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$, если $\mathfrak{F}$ содержит внутреннюю точку. Таким образом, в этом случае $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) \neq \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$.

Известно, что равенство $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ выполняется в том и только в том случае, когда $\overline{z} \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$, см. [6].

Хорошо известно, что если множество $\mathfrak{F}$ содержится в окружности или прямой, то имеет место равенство $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ вместе с равенством соответствующих полунорм. Из результатов Камовица [5] следует, что верно и обратное утверждение. Таким образом, равенство $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ вместе с равенством соответствующих полунорм имеет место в том и только в том случае, когда множество $\mathfrak{F}$ лежит на окружности или на прямой.

Мы будем использовать обозначения $\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ и $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ также и для незамкнутых подмножеств $\mathfrak{F}$ комлексной плоскости $\mathbb{C}$, положив

$$\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{CL}(\operatorname{clos}\mathfrak{F}) \ \text{ и } \ \mathrm{OL}(\mathfrak{F}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{OL}(\operatorname{clos}\mathfrak{F}),$$

где $\operatorname{clos}\mathfrak{F}$ обозначает замыкание множества $\mathfrak{F}$.

В частности, мы будем рассматривать пространства $\mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)$ и $\mathrm{CL}(\mathbb{D})$, где $\mathbb{C}_+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\mathbb{D} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ – произвольные множества. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$ пространтсво всех матриц $A = \{a(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$, задающих ограниченный оператор из $\ell^2(\mathcal{T})$ в $\ell^2(\mathcal{S})$. Пусть $\|\{a(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}\|$ обозначает норму соответствующего оператора из $\ell^2(\mathcal{T})$ в $\ell^2(\mathcal{S})$. С каждой парой матриц A и B вида $A = \{a(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$ и $B = \{b(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$ можно связать их произведение Шура $A\star B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{a(s,t)b(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$. Матрица $M = \{m(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$ называется *мультипликатором Шура пространства* $\mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$, если $M\star A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$ для любой матрицы $A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$. Пусть $\mathfrak{M}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$ обозначает пространство всех мультипликаторов Шура пространства $\mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$. Положим

$$\|M\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\{\|M\star A\| : A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T}), \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})} \leqslant 1\}.$$

Обычно мы будем писать $\|M\|_{\mathfrak{M}}$ вместо $\|M\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})}$, когда понятно о каких множествах $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ идёт речь.

С каждой матрицей $M = \{m(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$ мы связываем также следующую величину:

$$\|M\|_{\mathfrak{M}_0(\mathcal{S}\times\mathcal{T})} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\{\|M\star A\| : A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T}), \|A\| \leqslant 1,\ a(t,t) = 0 \\ \text{при всех } t \in \mathcal{S}\cap\mathcal{T}\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}_0(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$ – множество всех матриц $M = \{m(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$ таких, что $\|M\|_{\mathfrak{M}_0(\mathcal{S}\times\mathcal{T})} < +\infty$.

Хорошо известно и несложно доказывается следующее утверждение, см., например, теорему 2.2.1 в обзоре [3].

Теорема 0.1. *Пусть $M = \{m(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$ – произвольная матрица с комплексными элементами и C – константа, $C \geqslant 0$. Предположим, что существуют два семейства $\{u_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ и $\{v_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ векторов* *в не обязательно сепарабельном гильбертовом пространстве такие, что* $m(s,t) = (u_s, v_t)$ *и* $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}}\|u_s\|\sup\limits_{t\in\mathcal{T}}\|v_t\| \leqslant C$*. Тогда* $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$ *и* $\|M\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})} \leqslant C$*.*

Интересно отметить, что верно и обратное утверждение, т. е. если $\|M\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})} \leqslant C$, то выполнены условия теоремы 0.1 с той же константой C. Этот глубокий результат изложен в монографии Пизье [8], см. теорему 5.1.

С каждой функцией f, заданной на замкнутом множестве $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}\subset\mathbb{C}$, мы связываем *разделённую разность* $\mathfrak{D}f$

$$(\mathfrak{D}f)(z,w) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w}, & \text{если} \quad z\neq w,\\ f'(z), & \text{если} \quad z = w. \end{cases}$$

Таким образом, разделённая разность $\mathfrak{D}f$ определена на некотором подмножестве множества $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$. Она всегда определена в точках $(z,w)\in\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$ таких, что $z\neq w$. Разделённая разность $\mathfrak{D}f$ определена в точке (z,z), когда z неизолированная точка множества $\mathfrak{F}$ и функция f имеет конечную производную в точке z.

Заметим, что если $f\in\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ и множество $\mathfrak{F}$ совершенно, то разделённая разность $\mathfrak{D}f$ определена всюду на $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$.

С каждой функцией f, заданной на замкнутом множестве $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}\subset\mathbb{C}$, мы связываем также функцию $\mathfrak{D}_0 f : \mathfrak{F}\times\mathfrak{F}\to\mathbb{C}$,

$$(\mathfrak{D}_0 f)(z,w) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w}, & \text{если} \quad z\neq w,\\ 0, & \text{если} \quad z = w. \end{cases}$$

Нам понадобится следующее описание коммутаторно липшицевых функций, см., например, теоремы 3.3.1 и 3.3.6 в обзоре [3].

Теорема 0.2. *Пусть f – непрерывная функция на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда* $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|\mathfrak{D}_0 f\|_{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})}$. *Если множество $\mathfrak{F}$ не содержит изолированных точек, то* $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|\mathfrak{D}_0 f\|_{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})} = \|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})}$.

Нам понадобится также достаточное условие коммутаторной липшицевости, полученное автором в [1]. В §1 мы приводим подробную формулировку этого условия с чисто формальными изменениями.

В §2 рассматриваются коммутаторно липшицевы функции такие, что $|(\mathfrak{D}f)(a,b)| = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$ для некоторых $a,b\in\mathfrak{F}$. Заметим, что любая такая функция обладает следующим свойством: $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$. В частности, при $a = b$ это означает, что $|f'(a)| = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$. В этом случае доказано, что функция f' непрерывна в точке a, если a – неизолированная точка множества $\mathfrak{F}$. Кроме того, мы приводим пример операторно липшицевой функции, заданной на объединении двух лучей, при любом продолжении которой увеличивается её операторно липшицева полунорма.

В §3 рассматриваются функции $f\in\mathrm{OL}(\mathbb{R})$ такие, что $f'(0)=\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$. Легко видеть, что если f' – положительно определена, то $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$, см. следствие 1.1.2 в [3]. В это параграфе построены другие примеры функций $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$. Среди этих примеров также есть функции, допускающие аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$ до функции класса $\mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)$. Для таких функций выполняется следующее условие: $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)}$. Следует отметить, что равенство $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)}$ выполняется для любой функции $f \in \mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)$, см. [2]. В конце параграфа показано, что аналогичные примеры можно построить и в случае единичной окружности.

В §4 рассматриваются примеры функций f на вещественной прямой таких, что $\|f\|_{\mathrm{OL}(J)} = \|f\|_{\mathrm{Lip}(J)}$ для любого замкнутого (ограниченного) промежутка J, $J \subset \mathbb{R}$. Доказано также, что равенство $|f'(t)| = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ выполняется для всех $t \in \mathbb{R}$ в том и только в том случае, когда функция f' представима в виде $f'(x) = ce^{\mathrm{i}\alpha x}$, где $c \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

§1. Об одном достаточном условии коммутаторной липшицевости в терминах интегралов Коши

Автором в статье [1] было получено достаточное условие коммутаторной липшицевости в терминах интегралов Коши, см. также [3].

Здесь мы переформулируем это достаточное условие в чуть более удобном виде.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустое замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}$ множество всех комплексных мер Радона на $\mathbb{C}$ таких, что

$$\|\mu\|_{\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{z\in\mathfrak{F}} \int_{\mathbb{C}} \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta - z|^2} < +\infty.$$

В [1] рассматривалось формально несколько другое пространство[2] $\mathscr{M}(\mathfrak{F})$, состоящее из всех мер Радона μ на $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}$ таких, что

$$\|\mu\|_{\mathscr{M}(\mathfrak{F})} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{z\in\mathfrak{F}} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}} \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta-z|^2} < +\infty.$$

Каждую меру Радона μ на $\mathbb{C}$ можно рассматривать как функционал на пространстве $C_0(\mathbb{C})$ всех непрерывных на $\mathbb{C}$ функций с компактным носителем. Соответственно, каждую меру Радона на $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}$ можно рассматривать как функционал на пространстве $C_0(\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F})$ всех непрерывных на $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}$ функций с компактным носителем. Пространство $C_0(\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F})$ естественным образом вкладывается в пространство $C_0(\mathbb{C})$. Это обстоятельство позволяет определить сужение меры Радона μ на $\mathbb{C}$ до меры Радона на $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}$. Обозначим это сужение через $\mu|_{\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}}$.

Замечание. Операция сужения $\mu\mapsto\mu|_{\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}}$ определяет биекцию пространства $\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}$ на пространство $\mathscr{M}(\mathfrak{F})$, причём $\|\mu\|_{\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}} = \|\mu|_{\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}}\|_{\mathscr{M}(\mathfrak{F})}$. В частности, $|\mu|(\mathfrak{F})=0$ для любой меры $\mu\in\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Пусть $\mu\in\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}$. Ясно, что

$$\mu|_{\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}}\in\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \quad \text{и} \quad \|\mu|_{\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}}\|_{\mathscr{M}(\mathfrak{F})} \leqslant \|\mu\|_{\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}}.$$

Докажем, что $|\mu|(\mathfrak{F})=0$. Рассмотрим меру σ такую, что $d\sigma = \mathbb{1}_{\mathfrak{F}} d|\mu|$, где $\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}$ обозначает характеристическую функцию множества $\mathfrak{F}$. Тогда

$$\sup_{z\in\mathfrak{F}} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta-z|^2} < +\infty.$$

Отсюда следует, что плотность меры σ равна нулю в каждой точке $z\in\mathfrak{F}$. Таким образом, плотность меры σ равна нулю в каждой точке $z\in\mathbb{C}$, поскольку $\operatorname{supp}\sigma\subset\mathfrak{F}$. Следовательно, $\sigma=0$, т. е. $|\mu|(\mathfrak{F})=0$. Теперь ясно, что $\|\mu\|_{\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}} = \|\mu|_{\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}}\|_{\mathscr{M}(\mathfrak{F})}$.

Пусть теперь $\nu\in\mathscr{M}(\mathfrak{F})$. Докажем, что существует единственная мера $\mu\in\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}$ такая, что $\nu=\mu|_{\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}}$. Единственность следует из того, что $|\mu|(\mathfrak{F})=0$ для любой меры $\mu\in\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}$. Продолжим положительную меру $|\nu|$ до положительной меры τ на $\mathbb{C}$. Для этого достаточно положить $\tau(E)\stackrel{\mathrm{def}}{=}|\nu|(E\setminus\mathfrak{F})$ для любого борелевского подмножества E комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В частности, $\tau(\mathfrak{F})=0$. Чтобы убедиться в том, что

[2]Это же пространство $\mathscr{M}(\mathfrak{F})$ рассматривалось и в обзоре [3], но в других обозначениях.

меру τ можно рассматривать как меру Радона на $\mathbb{C}$, достаточно проверить, что для любой точки $z \in \mathbb{C}$ существует её окрестность U такая, что $\tau(U) < +\infty$. Это мгновенно вытекает из включения $\nu \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$. Ясно, что $\tau|_{\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}} = |\nu|$. Возьмём унимодулярную борелевскую функцию ξ на $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{F}$ такую, что $d\nu = \xi d\nu$. Заметим, что функция ξ определена τ-почти всюду на $\mathbb{C}$. Остаётся определить меру μ равенством $d\mu = \xi d\tau$. □

Пусть $\mu \in \mathscr{M}_{\mathfrak{F}}$. Интеграл Коши

$$\widehat{\mu}(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z},$$

вообще говоря, может быть не определён для $z \in \mathfrak{F}$. Другими словами, функция $\zeta \mapsto (\zeta - z)^{-1}$ не обязана быть суммируемой при всех $z \in \mathfrak{F}$, поэтому мы рассмотрим несколько модифицированный интеграл Коши.

Для этого зафиксируем точку $z_0 \in \mathfrak{F}$. Положим

$$\widehat{\mu}_{z_0}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\mathfrak{F}} \Big(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\Big)\, d\mu(\zeta).$$

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что величина $\widehat{\mu}_{z_0}(z)$ корректно определена для всех $z \in \mathfrak{F}$ и $|\widehat{\mu}_{z_0}(z)| \leqslant \|\mu\|_{\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}} |z - z_0|$.

Ясно, если z_1 – ещё одна точка множества $\mathfrak{F}$, то разность $\widehat{\mu}_{z_0} - \widehat{\mu}_{z_1}$ постоянна на $\mathfrak{F}$.

Заметим, что отображение $z \mapsto (\zeta - z)^{-1}$ действует непрерывно из множества $\mathfrak{F}$ в гильбертово пространство $L^2(|\mu|)$, наделённое слабой топологией. Используя это замечание, нетрудно проверить, что функция $\widehat{\mu}_{z_0}(z)$ дифференцируема как функция комплексной переменной в каждой неизолированной точке z множества $\mathfrak{F}$ и

$$\widehat{\mu}'_{z_0}(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{d\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^2}.$$

В частности, функция $\widehat{\mu}_{z_0}$ аналитична на внутренности множества $\mathfrak{F}$.

Следующее достаточное условие коммутаторной липшицевости по существу совпадает с теоремой 3.2 статьи [1], см. также теорему 3.8.1 в [3].

Теорема 1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустое замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что $\mu \in \mathscr{M}_{\mathfrak{F}}$ и функция f представима в виде $f(z) = c + \widehat{\mu}_{z_0}(z)$ при всех $z \in \mathfrak{F}$, где c – константа, а z_0 – точка множества $\mathfrak{F}$. Тогда $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \leqslant \|\mu\|_{\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}}$.*

§2. Коммутаторно липшицевы функции, удовлетворяющие условию $|(\mathfrak{D}f)(a,b)| = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$

Мы начнём с двух элементарных лемм, которые, конечно, хорошо известны. Мы их приводим без доказательств. Разумеется, эти леммы мгновенно вытекают из теоремы 5.1 монографии [8], о которой говорилось во введении, но можно обойтись и абсолютно элементарными методами.

Лемма 2.1. *Пусть $T = \{a_{jk}\}_{1\leqslant j,k\leqslant 2}$, где $a_{jk} \in \mathbb{C}$. Предположим, что $|a_{11}| = |a_{21}| = 1$ и $\max(|a_{12}|, |a_{22}|) \leqslant 1$. Тогда $\|T\|_{\mathfrak{M}} = 1$ в том и только в том случае, когда $\det T = 0$.*

Лемма 2.2. *Пусть $T = \{a_{jk}\}_{1\leqslant j,k\leqslant 2}$, где $a_{jk} \in \mathbb{C}$. Предположим, что $|a_{11}| = |a_{22}| = 1$ и $\max(|a_{12}|, |a_{21}|) \leqslant 1$. Тогда $\|T\|_{\mathfrak{M}} = 1$ в том и только в том случае, когда $a_{12} = \overline{a}_{21}a_{11}a_{22}$.*

Следующее утверждение показывает, в частности, что линейная функция $f(x) = ax + b$, заданная на невырожденном замкнутом промежутке J вещественной прямой, допускает *единственное* продолжение с сохранением операторно липшицевой полунормы на любое множество вида $J \cup \{c\}$, где $c \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.3. *Пусть $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое множество, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$. Предположим, что $|(\mathfrak{D}f)(a,b)| = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$ для некоторых точек $a, b \in \mathfrak{F}$, $a \neq b$. Предположим ещё, что существует точка $c \in \mathfrak{F}$, лежащая внутри отрезка, соединяющего точки a и b. Тогда функция f линейна.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $f(a) = a = 0$ и $(\mathfrak{D}f)(a,b) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = 1$. Нам нужно доказать, что $f(z) = z$ для всех $z \in \mathfrak{F}$. Легко видеть, что $f(z) = z$ для всех $z \in \{a, b, c\}$. Таким образом, можно считать, что $z \notin \{a, b, c\}$. Положим $s_1 = a = 0$, $s_2 = b$,

$t_1 = c$, $t_2 = z$. Из теоремы 0.2 следует, что

$$\|\{(\mathfrak{D}f)(s_j, t_k)\}_{1\leqslant j,k\leqslant 2}\|_{\mathfrak{M}} \\ \leqslant \|\{(\mathfrak{D}_0 f)(s,t)\}_{(s,t)\in\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}}\|_{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = 1.$$

Отсюда и из леммы 2.1 вытекает, что $(\mathfrak{D}f)(0,z) = (\mathfrak{D}f)(b,z)$. Следовательно, $f(z) = z$. $\square$

Следствие 2.4. *Пусть* $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F} \subset \mathbb{R}$ *и* $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$. *Предположим, что* $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F}_0)} = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$, *функция* f *линейна на* $\mathfrak{F}_0$ *и множество* $\mathfrak{F}_0$ *состоит по крайней мере из трёх элементов. Тогда* f *линейна на* $\mathfrak{F}$.

Приведём примеры, показывающие, что следствие 2.4 может быть неверным в случае двухэлементного множества $\mathfrak{F}_0$.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathbb{R}\setminus(-1,1)$, $\mathfrak{F}_0 = \{-1,1\}$ и $f(x) = x^{-1}$. Функция f линейна на $\mathfrak{F}_0$ (как и любая функция, заданная на двухэлементном множестве) и не линейна на $\mathfrak{F}$. Остаётся проверить, что $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F}} = 1$. Для этого достаточно заметить, что

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| = \|A^{-1}(B-A)B^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\|\cdot\|B^{-1}\|\cdot\|A-B\| \leqslant \|A-B\|.$$

Пример 2. Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x$. Тогда $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = 1$, где $\mathfrak{F} = \mathbb{R}\setminus(-1,1)$. Нужно проверить, что $\|\{(\mathfrak{D}f)(x,y)\}_{x,y\in\mathfrak{F}}\|_{\mathfrak{M}} \leqslant 1$. Заметим, что $(\mathfrak{D}f)(x,y) = 0$, если $xy > 0$ и

$$\|\{(\mathfrak{D}f)(x,y)\}_{x\geqslant 1, y\leqslant -1}\|_{\mathfrak{M}([1,+\infty)\times(-\infty,-1])} \\ = \|\{(\mathfrak{D}f)(x,y)\}_{x\leqslant -1, y\geqslant 1}\|_{\mathfrak{M}((-\infty,-1]\times[1,+\infty))}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\|\{(\mathfrak{D}f)(x,y)\}_{x,y\in\mathfrak{F}}\|_{\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})} \\ &\quad= \|\{(\mathfrak{D}f)(x,y)\}_{x\geqslant 1, y\leqslant -1}\|_{\mathfrak{M}([1,+\infty)\times(-\infty,-1])} \\ &\quad= \|\{2(x-y)^{-1}\}_{x\geqslant 1, y\leqslant -1}\|_{\mathfrak{M}([1,+\infty)\times(-\infty,-1])} \\ &\quad= \|\{2(x+y)^{-1}\}_{x,y\geqslant 1}\|_{\mathfrak{M}([1,+\infty)\times[1,+\infty)}.\end{aligned}$$

Докажем теперь, что $\|\{2(x+y)^{-1}\}_{x,y\geqslant 1}\|_{\mathfrak{M}([1,+\infty)\times[1,+\infty)} \leqslant 1$. Для этого заметим, что $2(x+y)^{-1} = (u_x, v_y)_{L^2(0,+\infty)}$, где $u_x(t) = \sqrt{2}e^{-xt}$ и $\|u_x\|^2_{L^2(0,+\infty)} = x^{-1} \leqslant 1$ при $x \geqslant 1$. Остаётся воспользоваться теоремой 0.1. $\square$

Замечание. Эти примеры ещё интересны и тем, что при любом продолжении функции f с множества $\mathfrak{F}$ на более широкое подмножество вещественной прямой операторно липшицева полунорма увеличивается. Для этого заметим, что если g – продолжение функции f такое, что $\|g\|_{\mathrm{OL}} = 1$ и функция g определена в некоторой точке $a \in (-1, 1)$, то $g(a) = a$. Это вытекает из того, что $\|g\|_{\mathrm{Lip}(\{-1,a,1\})} \leqslant 1$. Взяв теперь в качестве $\mathfrak{F}_0$ трёхэлементное множество $\{-1, a, 1\}$, мы получаем противоречие со следствием 2.4.

Кроме того, существует константа $\delta > 0$ такая, что $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} > 1 + \delta$ для любого продолжения функции f на всю вещественную прямую.

Пример 2 позволяет получить ещё серию функций, у которых операторно липшицевая полунорма совпадает с липшицевой полунормой.

Теорема 2.5. *Пусть f – непрерывная монотонная функция, заданная на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ вещественной прямой $\mathbb{R}$. Предположим, что функция f принимает не более двух значений. Тогда $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$.*

Доказательство. Можно считать, что функция f возрастает. Кроме того, достаточно ограничиться случаем, когда $f(\mathfrak{F}) = \{-1, 1\}$. Пусть $a = \max f^{-1}(-1)$ и $b = \min f^{-1}(1)$. Ясно что $a < b$. Продолжим функцию f до функции f_0 на множество $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$, положив $f_0(t) = -1$ при $t \leqslant a$ и $f_0(t) = 1$ при $t \geqslant a$. Заметим, что функция $f_0(\frac{(b-a)t+b+a}{2})$ совпадает с функцией, построенной в примере 2. Следовательно, $\|f_0\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R}\setminus(a,b)} = \frac{2}{b-a}$. Остаётся заметить, что

$$\frac{2}{b-a} = \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \leqslant \|f_0\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = \frac{2}{b-a}. \qquad \square$$

Рассмотрим ещё одно приложение леммы 2.1.

Обозначим через $\mathfrak{F}'$ множество всех неизолированных точек множества $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$.

Теорема 2.6. *Пусть $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – замкнутое множество, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$. Предположим, что $|f'(z_0)| = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$ в некоторой точке $z_0 \in \mathfrak{F}'$. Тогда функция $f' : \mathfrak{F}' \to \mathbb{C}$ непрерывна в точке z_0.*

Доказательство. Можно считать, что $z_0 = 0$ и $f'(0) = 1$. Нам достаточно проверить, что для любой последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек множества $\mathfrak{F}' \setminus \{0\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} f'(z_n)$ существует, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f'(z_n) = 1$. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} f'(z_n) = a$. Докажем, что $a = 1$. Из теоремы 0.2 следует, что

$$\left\| \begin{pmatrix} (\mathfrak{D}f)(0,\sigma) & (\mathfrak{D}f)(0,w) \\ (\mathfrak{D}f)(z_n,\sigma) & (\mathfrak{D}f)(z_n,w) \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{M}} \\ \leqslant \left\| \big\{(\mathfrak{D}_0 f)(z,w)\big\}_{(z,w)\in\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}} \right\|_{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = 1$$

для любых $\sigma, w \in \mathfrak{F} \setminus \{0, z_n\}$ таких, что $\sigma \neq w$. Переходя теперь к пределу сначала при $w \to z_n$, а затем при $\sigma \to 0$, получаем

$$\left\| \begin{pmatrix} (\mathfrak{D}f)(0,0) & (\mathfrak{D}f)(0,z_n) \\ (\mathfrak{D}f)(z_n,0) & (\mathfrak{D}f)(z_n,z_n) \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{M}} \leqslant 1$$

при всех $n \geqslant 1$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{M}} \leqslant 1.$$

Следовательно, $a = 1$ в силу леммы 2.1. □

Интересно отметить, что случаю $z_0 = \infty$ соответствует гораздо более сильное утверждение.

Теорема 2.7. *Пусть $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – неограниченное замкнутое множество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что $|f'(\infty)| = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$. Тогда функция $f(z) - f'(\infty)z$ постоянна.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $f'(\infty) = 1$. Пусть $\{\lambda, b, \mu, a\}$ – четырёхэлементное подмножество множества $\mathfrak{F}$. Тогда

$$\left\| \begin{pmatrix} (\mathfrak{D}f)(\lambda,\mu) & (\mathfrak{D}f)(\lambda,a) \\ (\mathfrak{D}f)(b,\mu) & (\mathfrak{D}f)(b,a) \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{M}} \\ \leqslant \left\| \big\{(\mathfrak{D}_0 f)(z,w)\big\}_{(z,w)\in\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}} \right\|_{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = 1$$

в силу теоремы 0.2. Устремляя μ к бесконечности, получаем:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & (\mathfrak{D}f)(\lambda,a) \\ 1 & (\mathfrak{D}f)(b,a) \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{M}} \leqslant 1.$$

Следовательно, $(\mathfrak{D}f)(\lambda,a) = (\mathfrak{D}f)(b,a)$ в силу леммы 2.1. Таким образом, мы доказали, что $f(z) = (\mathfrak{D}f)(a,b)(z-a) + f(a)$. Остаётся заметить, что $(\mathfrak{D}f)(a,b) = 1$, поскольку $(\mathfrak{D}f)(a,b) = f'(\infty) = 1$. □

§3. Операторно липшицевы функции f на вещественной прямой, удовлетворяющие условию $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$

В этом параграфе мы рассматриваем функции $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$ такие, что $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$. Ясно, что множество всех таких функций является выпуклым конусом в пространстве $\mathrm{OL}(\mathbb{R})$. Легко видеть, что любая такая функция обладает следующим свойством: $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R})} = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$. Отметим ещё, что если $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$, то этим же свойством будут обладать функции $\overline{f}$, $-f(-x)$ и $\operatorname{Re} f$.

Хорошо известно и легко доказывается, см., например, следствие 1.1.2 обзора [3], что если $f \in C^1(\mathbb{R})$ и функция f' является положительно определённой, то $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$. В частности, если f' – характеристическая функция случайной величины, то $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = 1$.

Отметим ещё, что если функция f' положительно определена, то функцию f можно представить в виде $f = g + h$ таким образом, чтобы $g \in \mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)$, $h \in \mathrm{CL}(\mathbb{C}_-)$, $g'(0) = \|g\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ и $h'(0) = \|h\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$. Здесь $\mathbb{C}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\mathbb{C}_- \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Действительно, если $f'(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx}\, d\mu(t)$, где μ – конечная положительная мера на $\mathbb{R}$, то соответствующие функции g и h можно определить таким образом, чтобы

$$g'(x) = \int\limits_{[0,+\infty)} e^{\mathrm{i}tx}\, d\mu(t) \quad \text{и} \quad h'(x) = \int\limits_{(-\infty,0)} e^{\mathrm{i}tx}\, d\mu(t).$$

Мы построим примеры функций $f \in C^1(\mathbb{R})$ таких, что $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$, но функция f' не является положительно определённой.

Конструкции этих примеров основаны на теореме 1.1.

В этом параграфе мы будем применять эту теорему в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$, а тогда пространство $\mathrm{CL}(\mathbb{R})$ совпадает с пространством $\mathrm{OL}(\mathbb{R})$ и $\|\cdot\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{R})} = \|\cdot\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$.

Из теоремы 1.1 легко вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть μ – конечная положительная мера в $\mathbb{C}$. Предположим, что $\mu(\{0\}) = 0$ и*

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|\zeta|^2 d\mu(\zeta)}{|\zeta - t|^2} \leqslant \mu(\mathbb{C})$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. *Тогда функция, заданная формулой*

$$f(t) = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{t\zeta\, d\mu(\zeta)}{\zeta - t},$$

принадлежит пространству $\mathrm{OL}(\mathbb{R})$ *и* $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = \mu(\mathbb{C})$.

Доказательство. Ясно, что $\mu(\mathbb{C}) = f'(0) \leqslant \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$. Остаётся применить теорему 1.1 к мере Радона $\zeta^2 d\mu(\zeta)$ и $c = z_0 = 0$. $\square$

Следующее утверждение – это по существу частный случай теоремы 3.1, в котором μ – вероятностная мера на единичной окружности $\mathbb{T}$.

Теорема 3.2. *Пусть* μ *– вероятностная мера на единичной окружности* $\mathbb{T}$. *Обозначим через* u *интеграл Пуассона этой меры. Предположим, что* $u(t) \leqslant 1 - t^2$ *при всех* $t \in (-1, 1)$. *Положим* $f(t) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta^2\, d\mu(\zeta)}{\zeta - t}$ *при* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда* $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = 1$.

Доказательство. Чтобы применить теорему 3.1, достаточно доказать, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - t|^2} \leqslant 1$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. Если $|t| < 1$, то требуемая оценка вытекает из условия $u(t) \leqslant 1 - t^2$. Случай $|t| > 1$ сводится к случаю $|t| < 1$ следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - t|^2} = t^{-2} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|t^{-1} - \zeta|^2} \leqslant t^{-2} < 1. \qquad \square$$

Следствие 3.3. *Пусть* μ *– вероятностная мера на единичной окружности* $\mathbb{T}$, *инвариантная относительно преобразования* $z \mapsto -\overline{z}$ (*симметрия относительно мнимой оси*). *Предположим что носитель этой меры содержится в множестве* $\{z \in \mathbb{T} : |\operatorname{Re}\zeta| \leqslant \frac{1}{2}\}$. *Положим* $f(t) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta^2\, d\mu(\zeta)}{\zeta - t}$ *при* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда* $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = 1$.

Доказательство. В силу теоремы 3.2 достаточно доказать, что $u(t) \leqslant 1 - t^2$ для всех $t \in (-1, 1)$, где u – интеграл Пуассона меры μ. Для этого заметим, что

$$\frac{1}{2|\zeta-t|^2}+\frac{1}{2|\overline{\zeta}+t|^2}=\frac{1+t^2}{1-2t^2+t^4+4t^2(\operatorname{Im}\zeta)^2}$$
$$=\frac{1+t^2}{1+2t^2+t^4-4t^2(\operatorname{Re}\zeta)^2}\leqslant\frac{1+t^2}{1+t^2+t^4}\leqslant 1$$

при всех $t\in(-1,1)$ и всех $\zeta\in\operatorname{supp}\mu$. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-t|^2}=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-t|^2}+\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-t|^2}\right)$$
$$=\int\limits_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{2|\zeta-t|^2}+\frac{1}{2|\overline{\zeta}+t|^2}\right)d\mu(\zeta)\leqslant\mu(\mathbb{T})=1.\qquad\square$$

Замечание 1. Пусть функция f представима в виде

$$f(t)\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\zeta^2\,d\mu(\zeta)}{\zeta-t}$$

с мерой μ, удовлетворяющей условиям теоремы 3.2. Тогда функции $\overline{f}$, $-f(x)$ и $\operatorname{Re} f$ также допускают аналогичные представления.

Замечание 2. Пусть функция f представима в виде

$$f(t)\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\zeta^2\,d\mu(\zeta)}{\zeta-t}\tag{3.1}$$

с мерой μ, удовлетворяющей условиям теоремы 3.2. Предположим, что носитель меры μ содержится в нижней полуплоскости. Тогда формула (3.1) позволяет продолжить функцию f в верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$ и $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)}=1$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в силу принципа максимума

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-z|^2}\leqslant\sup_{t\leqslant 1}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-t|^2},$$

и воспользоваться теоремой 1.1. Отметим ещё, что равенство $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}=\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)}$ выполняется и в гораздо более общем случае, см. теорему 1.1 статьи [2].

Замечание 3. Пусть функция f и мера μ удовлетворяют условиям теоремы 3.2. Тогда

$$f(t) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{\mu}(n-1)t^n, & \text{если } |t| < 1, \\ -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{\mu}(-n-1)t^{-n}, & \text{если } |t| > 1, \end{cases}$$

где $\{\widehat{\mu}(n)\}$ – коэффициенты Фурье меры μ.

Перейдём теперь к примерам.

Пример 1. Рассмотрим в единичном круге $\mathbb{D}$ гармоническую функцию $u(z) = 1 - \operatorname{Re} z^2$. Эта функция является интегралом Пуассона вероятностной меры $(d\mu)(\zeta) = (1 - \operatorname{Re}\zeta^2)d\mathbf{m}(\zeta)$, где $\mathbf{m}$ – нормированная мера Лебега на единичной окружности $\mathbb{T}$. Мера μ и функция u удовлетворяют условиям теоремы 3.2. Положим

$$f(t) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta^2\, d\mu(\zeta)}{\zeta - t}.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta^2\, d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = \begin{cases} z - \frac{1}{2}z^3, & \text{если } |z| < 1, \\ \frac{1}{2}z^{-1}, & \text{если } |z| > 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2}t^3, & \text{если } |t| \leqslant 1, \\ \frac{1}{2}t^{-1}, & \text{если } |t| > 1. \end{cases}$$

Из теоремы 3.2 следует, что $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = 1$. Докажем теперь, что функция f' не является положительно определённой. Для этого достаточно найти конечную последовательность $\{t_k\}_{k=1}^n$ вещественных чисел такую, что $\det\{f'(t_j - t_k)\}_{1\leqslant j,k\leqslant n} < 0$. Положим $n = 3$ и $t_k = ak$, где $a \in (0, \frac{1}{2})$. Тогда

$$\det\{f(t_j - t_k)\}_{1\leqslant j,k\leqslant 3} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{3}{2}a^2 & 1-6a^2 \\ 1-\frac{3}{2}a^2 & 1 & 1-\frac{3}{2}a^2 \\ 1-6a^2 & 1-\frac{3}{2}a^2 & 1 \end{pmatrix} = -27a^6 < 0.$$

Пример 2. Пусть $\lambda \in \mathbb{T}$, причём $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant \frac{1}{2}$. Рассмотрим меру $\mu = \frac{1}{2}\delta_\lambda + \frac{1}{2}\delta_{-\overline{\lambda}}$, где δ_ζ обозначает дельта-меру в точке ζ. Пусть

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta^2\,d\mu(\zeta)}{\zeta - t} = \frac{\lambda^2}{2(\lambda - t)} - \frac{\overline{\lambda}^2}{2(\overline{\lambda} + t)}.$$

Из следствия 3.3 вытекает, что $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = 1$.

Прямые вычисления показывают, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f'(t)e^{\mathrm{i}tx}\,dt = -\pi x(\lambda^2 e^{\mathrm{i}x\lambda} + \overline{\lambda}^2 e^{-\mathrm{i}x\overline{\lambda}}),$$

если $x\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$. Ясно, что функция $\operatorname{Re}(\lambda^2 e^{\mathrm{i}x\lambda})$ на любом луче принимает значения разных знаков, если $\mathrm{i}\lambda \notin \mathbb{R}$. Таким образом, функция f' положительно определена, только если $\operatorname{Re}\lambda = 0$.

Из замечания 2 следует, что если $\operatorname{Im}\lambda < 0$, то $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)} = 1$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Существует функция $f \in \mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)$ такая, что функция f' непрерывна вплоть до границы, $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)}$ и функция $f'|\mathbb{R}$ не является положительно определённой.*

Рассмотрим теперь случай единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Пусть $\mathbb{T}$ обозначает единичную окружность $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Хорошо известно и нетрудно проверить, что $\|z^n\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})} = |n|$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, если $\{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – коэффициенты Фурье непрерывной функции f на окружности $\mathbb{T}$, то $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})} \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |n|\cdot|\widehat{f}(n)|$. Если правая часть конечна, то $f' = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} na_n z^{n-1} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (n+1)a_{n+1}z^n$. Таким образом, если $na_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} na_n = f'(1) \leqslant \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{T})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})},$$

т. е. $f'(1) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})} = \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{T})}$.

Таким образом, мы доказали, что если $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{T})$ и $\widehat{f'}(n) \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, то $f'(1) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{T})}$.

Аналогично доказывается, что если f – липшицева функция из диск-алгебры такая, что $\widehat{f'}(n) \geqslant 0$ для всех $n \geqslant 1$, то $f'(1) = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{D})}$.

Чтобы вывести из теоремы 3.4 её аналог для круга, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.5. *Пусть f – ограниченная аналитическая в $\mathbb{C}_+$ функция, непрерывная вплоть до границы. Предположим, что функция $f|_{\mathbb{R}}$ не является положительно определённой. Тогда при достаточно больших $a > 0$ существует $n \geqslant 0$ такое, что $(-\mathrm{i})^n f^{(n)}(a\mathrm{i}) \notin [0, +\infty)$.*

Доказательство. Заметим, что из тождества

$$f^{(n)}(b\mathrm{i}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+n)}(a\mathrm{i})}{k!}(b\mathrm{i} - a\mathrm{i})^k$$

вытекает, что если при некотором $a > 0$ неравенство $(-\mathrm{i})^n f^{(n)}(a\mathrm{i}) \geqslant 0$ имеет место при всех $n \geqslant 0$, то $(-\mathrm{i})^n f^{(n)}(b\mathrm{i}) \geqslant 0$ при всех $n \geqslant 0$ и всех $b \in (0, a)$.

Таким образом, предположив противное, мы получим, что неравенство $(-\mathrm{i})^n f^{(n)}(a\mathrm{i}) \geqslant 0$ выполняется при всех $n \geqslant 0$ и всех $a > 0$. Следовательно, $f(y\mathrm{i})$ – ограниченная вполне монотонная функция. Поэтому в силу теоремы Бернштейна (см., например, [7]) существует конечная положительная мера μ на $[0, +\infty)$ такая, что

$$f(\mathrm{i}y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ty}\, d\mu(t)$$

для всех $y > 0$. Следовательно,

$$f(z) = \int\limits_0^{+\infty} e^{itz}\, d\mu(t)$$

для всех $z \in \mathbb{C}$ таких, что $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Таким образом, функция $f|_{\mathbb{R}}$ положительно определена и мы приходим к противоречию. $\square$

Теперь всё готово, чтобы получить аналог теоремы 3.4 для круга.

Теорема 3.6. *Существует функция $f \in \mathrm{CL}(\mathbb{D})$ такая, что f' принадлежит диск-алгебре, $f'(1) = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)}$ и $\widehat{f'}(n) \notin [0, +\infty)$ при некотором $n \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть f – функция, существование которой утверждается в теореме 3.4. Применяя лемму 3.5 к функции f', мы видим, что существуют номер $n \geqslant 0$ и число $a > 0$ такие, что $(-\mathrm{i})^n f^{(n+1)}(a\mathrm{i}) \notin [0, +\infty)$.

Положим

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{i}a^{-1}f(\mathrm{i}a - \mathrm{i}az) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a\mathrm{i})^{n-1} f^{(n)}(a\mathrm{i})}{n!} z^n.$$

Ясно, что

$$\|g\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{D})} = \|f\|_{\mathrm{CL}(K_a)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{C}_+)} = f'(0) = g'(1) \leqslant \|g\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{D})},$$

где K_a обозначает замкнутый круг радиуса a с центром в точке $a\mathrm{i}$. Следовательно, $g'(1) = \|g\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{D})}$. Остаётся заметить, что

$$\widehat{g'}(n) = \frac{(-a\mathrm{i})^n f^{(n+1)}(a\mathrm{i})}{n!}.$$

Следовательно, $\widehat{g'}(n) \notin [0, +\infty)$ при некотором $n \geqslant 0$. □

§4. Функции, у которых операторно липшицева полунорма совпадает с липшицевой полунормой на любом промежутке

В предыдущем параграфе мы рассматривали функции $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$ такие, что $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$. Каждая такая функция очевидно обладает следующим свойством: $\|f\|_{\mathrm{OL}(J)} = \|f\|_{\mathrm{Lip}(J)}$ для любого замкнутого промежутка J, содержащего точку 0.

В этом параграфе мы рассмотрим примеры функции f таких, что $\|f\|_{\mathrm{OL}(J)} = \|f\|_{\mathrm{Lip}(J)}$ для всех замкнутых промежутков J.

Рассмотрим сначала примеры функций f таких, что $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$ для широкого класса замкнутых подмножеств $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Простейшим примером такой функции является линейная функция $f(z) = az + b$. Ясно, что в этом случае $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = |a| = \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$ для любого замкнутого множества $\mathfrak{F}$, содержащего по крайней мере две точки.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – совершенное компактное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда $\|(z-\lambda)^n\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|(z-\lambda)^n\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и всех $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\lambda = 0$. Можно считать, что $n \geqslant 2$. Положим $a = \max\{|z| : z \in \mathfrak{F}\}$. Имеем:

$$N^n R - R N^n = \sum_{k=1}^{n} N^{n-k}(NR - RN)N^{k-1}$$

для любого нормального оператора N со спектром в множестве $\mathfrak{F}$ и любого ограниченного оператора R. Следовательно,

$$\|N^nR - RN^n\| \leqslant n\|N\|^{n-1}\|NR - RN\| \leqslant na^{n-1}\|NR - RN\|.$$

Таким образом,

$$\|z^n\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \leqslant na^{n-1} \leqslant \|z^n\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \leqslant \|z^n\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}. \qquad \square$$

Следствие 4.2. *Пусть f – многочлен степени не выше 2. Тогда $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$ для любого совершенного компактного множества $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$.*

Следующий пример показывает, что от условия совершенности множества $\mathfrak{F}$ отказаться нельзя.

Пример. Пусть $f(z) = z^2$ и $\mathfrak{F} = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$. Ясно, что $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} = \sqrt{2}$. Заметим, что $\mathfrak{F} \subset \mathbb{T}$, поэтому $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$. Докажем, что $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = 2$. Неравенство $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \leqslant 2$ вытекает, например, из теоремы 4.1. Докажем противоположное неравенство. Используя теорему 0.2, получаем

$$\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \left\|\left\{i^m + \mathrm{i}^n\right\}_{1\leqslant m,n\leqslant 4}\right\|_{\mathfrak{M}_0} \geqslant \left\|\left\{\mathrm{i}^{2m} + \mathrm{i}^{2n+1}\right\}_{1\leqslant m,n\leqslant 2}\right\|_{\mathfrak{M}}.$$

Рассмотрим матрицу

$$T \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1+\mathrm{i})^{-1}\left\{\mathrm{i}^{2m} + \mathrm{i}^{2n+1}\right\}_{1\leqslant m,n\leqslant 2} = \begin{pmatrix} -1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

Остаётся проверить, что $\|T\|_{\mathfrak{M}} \geqslant \sqrt{2}$. Для этого заметим, что $\|T\| = \sqrt{2}$ и $\|T \star T\| = 2$. Теперь из неравенства $\|T \star T\| \leqslant \|T\|_{\mathfrak{M}}\|T\|$ получаем, что $\|T\|_{\mathfrak{M}} \geqslant \sqrt{2}$.

Нетрудно доказать, что $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$ для любой функции f, заданной на $\mathfrak{F}$, если множество $\mathfrak{F}$ состоит из трёх элементов.

Аналогично теореме 4.1 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – совершенное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда $\|(z-\lambda)^{-n}\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|(z-\lambda)^{-n}\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$ при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{F}$ и всех $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\lambda = 0$. Тождество

$$N^{-n}R - RN^{-n} = \sum_{k=1}^{n} N^{k-n-1}(RN - NR)N^{-k}.$$

позволяет доказать эту теорему точно так же, как была доказана теорема 4.1. □

Теорема 4.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – совершенное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда $\|e^{\lambda z}\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|e^{\lambda z}\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем $\lambda = 1$. Положим $a = \sup\{\operatorname{Re} z : z \in \mathfrak{F}\}$. Тогда $\|e^z\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} = e^a$. Остается проверить, что $\|e^z\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \leqslant e^a$. Пусть N – нормальный оператор со спектром в $\mathfrak{F}$, а R – ограниченный оператор, причем оба оператора действуют в одном и том же гильбертовом пространстве. Рассмотрим операторнозначную функцию $\varphi(t) = e^{tN} R e^{(1-t)N}$ на отрезке $[0,1]$. Тогда имеем:

$$\|e^N R - Re^N\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leqslant \sup \|\varphi'(t)\| = \sup \|e^{tN}(NR - RN)e^{(1-t)N}\|$$
$$\leqslant \sup(\|e^{tN}\| \cdot \|e^{(1-t)N}\| \cdot \|NR - RN\|) \leqslant e^a \|NR - RN\|. \qquad \square$$

Отметим следующий частный случай теоремы 4.1.

Теорема 4.5. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$. Тогда $\|(x-\lambda)^n\|_{\mathrm{OL}(J)} = \|(x-\lambda)^n\|_{\mathrm{Lip}(J)}$ для любого закнутого ограниченного промежутка J, $J \subset \mathbb{R}$.*

В частности, если f – многочлен степени не выше 2, то равенство $\|f\|_{\mathrm{OL}(J)} = \|f\|_{\mathrm{Lip}(J)}$ выполняется для любого закнутого ограниченного промежутка J, $J \subset \mathbb{R}$.

Для многочленов степени 3 это уже не так. Нетрудно убедиться в том, что если $f(x) = 3x - 2x^3$, то

$$\|f\|_{\mathrm{OL}([0,1])} \geqslant \left\| \begin{pmatrix} (\mathfrak{D}f)(0,0) & (\mathfrak{D}f)(0,1) \\ (\mathfrak{D}f)(1,0) & (\mathfrak{D}f)(1,1) \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{M}}$$
$$= \left\| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{M}} > 3 = \|f\|_{\mathrm{Lip}([0,1])}.$$

Приведём частный случай теоремы 4.3.

Теорема 4.6. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Тогда $\|(x-\lambda)^{-n}\|_{\mathrm{OL}(J)} = \|(x-\lambda)^{-n}\|_{\mathrm{Lip}(J)}$ для любого замкнутого промежутка J, $J \subset \mathbb{R}$, такого, что $\lambda \notin J$.*

Рассмотрим теперь функции $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$ такие, что $|f'(t)| = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Кроме линейных функций этим свойством обладают функции вида $f(x) = c_0 + c_1 e^{\mathrm{i}\alpha x}$, где $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Следующая теорема показывает, что этими примерами исчерпываются все функции f, для которых равенство $|f'(t)| = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ выполняется при всех $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.7. *Пусть $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$. Предположим, что $|f'(t)| = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда функция f' представима в виде $f'(x) = ce^{\mathrm{i}\alpha x}$, где $c \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда

$$|f'(t)| = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = 1$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Из теоремы 0.2 следует, что

$$\left\| \begin{pmatrix} (\mathfrak{D}f)(x,x) & (\mathfrak{D}f)(x,y) \\ (\mathfrak{D}f)(y,x) & (\mathfrak{D}f)(y,y) \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{M}} \leqslant \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})} = 1.$$

Применяя лемму 2.2, получаем

$$(\mathfrak{D}f)(x,y) = \overline{(\mathfrak{D}f)(y,x)}(\mathfrak{D}f)(x,x)(\mathfrak{D}f)(y,y),$$

т. е.

$$f(x) - f(y) = f'(x)f'(y)(\overline{f(x)} - \overline{f(y)}) \tag{4.1}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Не умаляя общности, можно считать что $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$. Подставляя $y = 0$ в равенство (4.1), получаем $f(x) = f'(x)\overline{f(x)}$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Используя это тождество, мы можем переписать условие (4.1) следующим образом:

$$f(x) - f(y) = f'(y)f(x) - f'(x)f(y).$$

Подставляя в последнее равенство число $y = y_0$ такое, что $f(y_0) \neq 0$, получим

$$f(y_0)f'(x) = (f'(y_0) - 1)f(x) + f(y_0).$$

Решая это дифференциальное уравнение, получаем

$$f(x) = \frac{e^{ax} - 1}{a} \quad \text{и} \quad f'(x) = e^{ax},$$

где $a = \dfrac{f'(y_0) - 1}{f(y_0)}$ (в случае $a = 0$ мы получаем, что $f' = 1$ всюду). Ясно, что $\operatorname{Re} a = 0$, поскольку $|f'(x)| = 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Аналогичное утверждение верно для операторно липшицевых функций, заданных на невырожденном замкнутом промежутке.

Список литературы

1. А. Б. Александров, *Операторно липшицевы функции и модельные пространства.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **416** (2013), 5–58.
2. А. Б. Александров, *Коммутаторно липшицевы функции и аналитическое продолжение.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **434** (2015), 5–18.
3. А. Б. Александров, В. В. Пеллер, *Операторно липшицевы функции.* — УМН, **71**, вып. 4(430) (2016), 3–106.
4. B. E. Johnson and J. P. Williams, *The range of a normal derivation.* — Pacific J. Math. **58** (1975), 105–122.
5. H. Kamowitz, *On operators whose spectrum lies on a circle or a line.* — Pacific J. Math. **20** (1967), 65–68.
6. E. Kissin and V. S. Shulman, *Classes of operator-smooth functions. I. Operator-Lipschitz functions.* — Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **48** (2005), 151–173.
7. Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, Москва, Мир, 1968.
8. G. Pisier, *Similarity problems and completely bounded maps*, Second, expanded edition. Includes the solution to "The Halmos problem". Lecture Notes in Mathematics, 1618. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

Aleksandrov A. B. Some remarks concerning operator Lipschitz functions.

We consider examples of operator Lipschitz functions f for which the operator Lipschitz seminorm $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ coincides with the Lipschitz seminorm $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R})}$. In particular, we consider the operator Lipschitz functions such that $f'(0) = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$. It is well known that every function f whose the derivative f' is positive definite has this property. In the paper it is proved that there are other functions having this property. It is also shown that the identity $|f'(t_0)| = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathbb{R})}$ implies that the derivative of f is continuous at t_0. In fact, a more general statement is established concerning commutator Lipschitz functions on a closed subset of the complex plane.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
E-mail: alex@pdmi.ras.ru

Поступило 26 августа 2019 г.