Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

**Н. Ф. Абузярова**

# О СДВИГАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИИ, ОБРАТИМЫЕ ПО ЭРЕНПРАЙСУ

## Введение

Пусть $\mathcal{P}$ – совокупность всех целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси: $\varphi \in \mathcal{P} \iff \varphi \in H(\mathbb{C})$, $\exists C_\varphi > 0 : \forall z \in \mathbb{C}$

$$|\varphi(z)| \leqslant C_\varphi (1+|z|)^{C_\varphi} \exp(C_\varphi |\mathrm{Im}\, z|),$$

$P_k$ – банахово пространство, состоящее из всех целых функций $\varphi$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k \exp(b_k y^+ - a_k y^-)},$$

где $y^{\pm} = \max\{0, \pm y\}$, $z = x + \mathrm{i}y$ и $[a_1; b_1] \Subset [a_2; b_2] \Subset \dots$ – последовательность отрезков, исчерпывающая $\mathbb{R}$. Ясно, что $\mathcal{P} = \bigcup\limits_k P_k$. С топологией индуктивного предела пространств $P_k$ множество $\mathcal{P}$ становится топологической алгеброй над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$, которую называют *алгеброй Шварца*.

Мы будем использовать следующие общепринятые обозначения:

$$\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R}), \quad \mathcal{E}' = (C^\infty(\mathbb{R}))', \quad \mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \mathcal{D}' = (C_0^\infty(\mathbb{R}))'.$$

Напомним, что, в силу теоремы Пэли–Винера–Шварца [1], алгебра $\mathcal{P}$ как линейное топологическое пространство изоморфна *пространству Шварца* $\mathcal{E}'$. Изоморфизм реализуется преобразованием Фурье–Лапласа $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F}(S) = S(e^{-\mathrm{i}tz}), \ z \in \mathbb{C}, \quad S \in \mathcal{E}'.$$

---

*Ключевые слова*: целая функция, алгебра Шварца, распределение нулевого множества.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00002).

Функция $\varphi \in \mathcal{P}$ называется *медленно убывающей* (см. [2]), если найдется $a > 0$ со свойством $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x' \in \mathbb{R} : |x - x'| \leqslant a \ln(2 + |x|)$, $|\varphi(x')| \geqslant (a + |x'|)^{-a}$.

Понятие медленно убывающей функции было введено Л. Эренпрайсом [2] в связи с вопросами об *обратимости распределения* $S \in \mathcal{E}'$ в пространствах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}'$, то есть о справедливости соотношений

$$S * \mathcal{E} = \mathcal{E}, \tag{0.1}$$

$$S * \mathcal{D}' = \mathcal{D}', \tag{0.2}$$

где $*$ – свертка. Каждое из соотношений (0.1) и (0.2) эквивалентно медленному убыванию функции $\varphi = \mathcal{F}(S) \in \mathcal{P}$ (см. [2, теоремы 1, 2.2, предложение 2.7]).

В работах [2,3] установлено, что если $\varphi = \mathcal{F}(S)$ – медленно убывающая функция, $S \in \mathcal{E}'$, то каждое решение $f \in \mathcal{E}$ однородного уравнения свертки

$$S * f = 0$$

представляется в виде ряда (со скобками) из экспоненциальных одночленов — элементарных решений этого уравнения, – сходящегося в топологии пространства $\mathcal{E}$.

Будем называть функцию $\varphi \in \mathcal{P}$ *обратимой по Эренпрайсу*, если главный идеал $\mathcal{I}_\varphi$, порожденный этой функцией в $\mathcal{P}$, замкнут, то есть, если для нее верна импликация:

$$\Phi \in \mathcal{P}, \quad \Phi/\varphi \in H(\mathbb{C}) \Longrightarrow \Phi/\varphi \in \mathcal{P}.$$

**Теорема А** (аналитический критерий обратимости по Эренпрайсу)**.** *Медленное убывание функции $\varphi \in \mathcal{P}$ эквивалентно ее обратимости по Эренпрайсу* ([2, теорема 2.6]).

Из этой теоремы и цитированных выше результатов работы [2] следует, что обратимость по Эренпрайсу функции $\varphi \in \mathcal{P}$ равносильна обратимости распределения $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ в пространствах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}'$.

Мы планируем в дальнейшем использовать обратимые по Эренпрайсу функции как инструмент для получения новой информации об инвариантных относительно дифференцирования подпространствах $W \subset C^\infty(a; b)$, допускающих слабый спектральный синтез (см. [4–6]). В связи с этим возникает необходимость изучения нулевых множеств таких функций. Еще Л. Эренпрайс сформулировал в своей работе [2, §6] задачу о нахождении условий медленного убывания функции $\varphi \in \mathcal{P}$

в терминах каких-либо ограничений на ее нулевое множество $\Lambda_\varphi$. Там же он получил одно необходимое условие [2, предложение 6.1]: если функция $\varphi \in \mathcal{P}$ является медленно убывающей, то

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{m_j}{|\operatorname{Im}\lambda_j| + \ln|\operatorname{Re}\lambda_j|} < \infty,$$

где $\lambda_j$ – нули этой функции, а $m_j$ – их кратности.

Приведем другие известные нам результаты в указанном направлении. Первый из них состоит в том, что если нулевое множество $\Lambda_\varphi = \{\lambda_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, является ограниченным возмущением целочисленной последовательности, то есть для некоторого $L > 0$ и всех $k$ выполнено

$$|\lambda_k - k| \leqslant L, \tag{0.3}$$

то $\varphi$ – медленно убывающая функция ( [7, теорема XXXIII], а также [8, теорема 1.1 и следствие]).

В работах [9] и [10] рассмотрены целые функции, нули которых имеют вид

$$\lambda_k = k + l(|k|), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{0.4}$$

где $l(t)$ – неограниченная функция аргумента $t \geqslant 0$.

А. М. Седлецкий в [9] для вырожденной гипергеометрической функции

$$\Phi(a,c;z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{c(c+1)\ldots(c+k-1)}\,\frac{z^k}{k!},\ a,c\in\mathbb{C},\ a,\ c,(c-a)\notin\mathbb{Z}_+,$$

показал, что, при дополнительных условиях $\operatorname{Re} c = 2\operatorname{Re} a$, $c - 2a \neq 0$, функция

$$\varphi(z) = e^{-\mathrm{i}\pi z}\Phi(a,c;2\pi\mathrm{i}z)$$

будет целой функцией экспоненциального типа, удовлетворяющей оценкам

$$C_1|z|^{-\operatorname{Re} a}e^{\pi|\operatorname{Im} z|} \leqslant |\varphi(z)| \leqslant C_2|z|^{-\operatorname{Re} a}e^{\pi|\operatorname{Im} z|}, \quad |\operatorname{Im} z| \geqslant h_\varphi > 0,$$

где $C_1$, $C_2$ – положительные постоянные, а нули $\lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, функции $\varphi$ имеют асимптотику

$$\lambda_k = k + B_1 + B_2\ln|k| + O(1), \quad |k|\to\infty, \quad B_1\in\mathbb{C},\ B_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

([9, теорема 2]). Тем самым, был построен, по-видимому, первый пример обратимой по Эренпрайсу функции, нулевое множество которой не удовлетворяет условию (0.3).

В статье [10] А. А. Юхименко доказал следующее утверждение.

**Теорема B** ([10, теорема 1])**.** *Пусть* $l(t)$ *– положительная дифференцируемая вогнутая функция на положительной полуоси, такая, что*

$$l(t) = O(t^{\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1.$$

*Для того чтобы последовательность* (0.4) *была множеством нулей некоторой функции типа синуса, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$tl'(t) = O(1), \quad t \to +\infty.$$

Напомним, что *функцией типа синуса* называется целая функция $\varphi$, имеющая экспоненциальный тип и удовлетворяющая оценкам

$$C_1 e^{\pi|\operatorname{Im} z|} \leqslant |\varphi(z)| \leqslant C_2 e^{\pi|\operatorname{Im} z|}, \quad |\operatorname{Im} z| \geqslant h_{\varphi} > 0, \ \ C_1, \ C_2 > 0.$$

Очевидно, все функции типа синуса принадлежат алгебре $\mathcal{P}$ и обратимы по Эренпрайсу.

Кратко опишем содержание последующих параграфов.

В первом параграфе изучаются условия на возмущающую функцию $l$, при которых функция с нулевым множеством, определяемым формулами (0.4), будет обратимым по Эренпрайсу элементом алгебры $\mathcal{P}$. При этом мы предъявляем более слабые, чем в работе [10], априорные требования к регулярности поведения функции $l$. В доказательствах нами развивается и используется техника оценивания, основанная на интегральном представлении для $\ln|\varphi|$, полученном С. Ю. Фаворовым [11] (см. лемму C ниже). В одном частном случае она была реализована нами в работе [12]. Эта техника отличается от метода работы [10]. Тем не менее, следует отметить, что доказательство первого утверждения леммы 1 мы проводим при помощи стандартных рассуждений, сходных с рассуждениями в доказательстве теоремы 1 в [10]. Также, введенная автором в этом доказательстве функция $\rho(t) = 1/2 - \{t\}$, где $\{a\}$ – дробная часть числа $a \in \mathbb{R}$, используется нами при обосновании утверждения леммы 2.

Переходя к описанию содержания второго параграфа работы, заметим, что все условия на нулевое множество функции $\varphi \in \mathcal{P}$, полученные авторами цитированных выше работ, как и полученные нами в §1, влекут бóльшую регулярность поведения $|\varphi|$, чем требуется для медленного убывания $\varphi$. А именно, в каждом из этих случаев оказывается, что $|\varphi|$ удовлетворяет следующим оценкам снизу:

$$\exists a > 0 : \ \forall x \in \mathbb{R} \ \exists x' \in \mathbb{R} : \ |x - x'| \leqslant a, \ \ |\varphi(x')| \geqslant (a + |x'|)^{-a}.$$

Такие функции были введены Л. Эренпрайсом в [2, §2] и названы им *очень медленно убывающими*. Оказалось, что для распределения $S \in \mathcal{E}'$ очень медленное убывание функции $\varphi = \mathcal{F}(S) \in \mathcal{P}$ эквивалентно выполнению соотношения

$$S * \mathcal{D}'_{\mathbf{F}} = \mathcal{D}'_{\mathbf{F}},$$

то есть обратимости распределения $S$ в пространстве $\mathcal{D}'_{\mathbf{F}}$; см. [2, теорема 2.2*]. Здесь $\mathcal{D}'_{\mathbf{F}}$ – пространство всех распределений конечного порядка (определение см. в [13], [14]). В замечании после теоремы 2.2* в [2] Л. Эренпрайс пишет, что ему неизвестно, существуют ли распределения $S \in \mathcal{E}'$, *обратимые в пространствах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}'$, но не обратимые в пространстве $\mathcal{D}'_{\mathbf{F}}$*. Этот вопрос, в силу теорем 2.2 и 2.2* из [2], эквивалентен вопросу *существования медленно убывающей функции $\varphi \in \mathcal{P}$, которая не будет очень медленно убывающей*. В параграфе 2 мы демонстрируем как эффективно работает техника, использующая лемму С. Ю. Фаворова (лемму С), для построения такой функции.

## §1. Обратимые по Эренпрайсу функции

**1.** Пусть функция $l : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ такова, что для некоторых $\alpha \in (0; 1)$, $t_l > 0$ и $C_l > 0$ справедливо неравенство

$$|l(t) - l(s)| \leqslant C_l |t^\alpha - s^\alpha| \tag{1.1}$$

при всех $t, s \geqslant t_l$. Положим

$$\lambda(t) = t + l(|t|), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\lambda_k = \lambda(k), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{1.2}$$

$$\varphi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right), \tag{1.3}$$

сходимость последнего произведения будет следовать из приводимых ниже леммы С и леммы 1.

**Теорема 1.** *Предположим, что функция $l$ удовлетворяет условию* (1.1)*, а функция $\varphi$ определена формулой* (1.3)*. Если для всех достаточно больших $t$ и $s$ верна оценка*

$$|l(t) - l(s)| \leqslant C_l |\ln^2 t - \ln^2 s|, \quad C_l > 0, \tag{1.4}$$

*то функция $\varphi$ принадлежит алгебре Шварца $\mathcal{P}$ и обратима по Эренпрайсу.*

Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$, определенной формулой (1.2), $z \in \mathbb{C}$, $t \geqslant 0$, введем обозначения: $n(z,t)$ – число точек $\lambda_k$ в круге $|w-z| \leqslant t$, $n^+(0,t)$, $n^-(0,t)$ — число точек $\lambda_k$ в промежутках $[0;t]$ и $[-t;0]$, соответственно.

В нижеследующей лемме собраны нужные нам в дальнейшем свойства функции $\lambda$, последовательности (1.2) и считающих функций $n^+(0,t)$, $n^-(0,t)$, $n(0,t)$ этой последовательности.

**Лемма 1.** *Пусть функция* $l : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* (1.1). *Тогда*

1) *найдется число* $t_0 > 0$ *такое, что функция* $\lambda(t) = t + l(|t|)$ *строго возрастает при* $t \geqslant t_0$ *и при* $t \leqslant -t_0$, *и, следовательно, при всех* $t$, $|t| \geqslant t_0$ *определена обратная функция* $\lambda^{-1}(t)$, *причем*

$$\lambda^{-1}(t) = t - l(|t|) + O(|t|^{\alpha-1} l(|t|)), \quad |t| \to +\infty; \tag{1.5}$$

2) *точки последовательности* $\Lambda$ *разделены: существует число* $d_0 > 0$ *такое, что*

$$|\lambda_n - \lambda_m| \geqslant d_0, \ m, n \in \mathbb{Z}', \ m \neq n,$$

*где, как обычно,* $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

3) *существует конечный предел*

$$\lim_{R\to+\infty} \sum_{|\lambda_k|<R} \frac{1}{\lambda_k};$$

4) *при всех* $t > t_0$ *будет*

$$n^+(0,t) = [\lambda^{-1}(t)], \quad n^-(0,t) = -[\lambda^{-1}(-t)],$$

*где* $[a]$ *обозначает целую часть числа* $a \in \mathbb{R}$;

5) $n(0,t) = O(t)$, $t \to +\infty$;

6) $n(0,t+1) - n(0,t) = o(t)$, $t \to +\infty$.

**Доказательство.** 1) Пусть $t_l < t < s$. Тогда, в силу формулы (1.1),

$$\lambda(s) - \lambda(t) = s - t + (l(s) - l(t)) \geqslant (s-t)\left(1 - C_0 \alpha t^{\alpha-1}\right).$$

Отсюда следует, что для достаточно большого $t_0 > t_l$ будет

$$\lambda(s) - \lambda(t) > (s-t)/2 > 0, \quad s > t \geqslant t_0.$$

Таким образом, при $t \geqslant t_0$ обратная функция $\lambda^{-1}(t)$ определена.

Положим $s = \lambda(t) = t + l(t), \quad t > t_0$. Из условия (1.1) следует, что

$$t = (1 + o(1))s, \quad t \to \infty. \tag{1.6}$$

Далее,

$$s-t=l(t)=l(s)+\frac{l(t)-l(s)}{t-s}(t-s),$$

$$t=s-l(s)+\frac{L(s,t)l(s)}{1+L(s,t)},$$

где $L(s,t)=\frac{l(t)-l(s)}{t-s}$. С учетом формул (1.1) и (1.6) получим

$$t=s-l(s)+O(s^{\alpha-1}l(s)),\quad s\to+\infty.$$

Случай $s<t<-t_l$ рассматривается аналогично.

2) Свойство разделенности последовательности $\Lambda$ следует из оценки

$$|\lambda(s)-\lambda(t)|>\frac{|s-t|}{2},$$

справедливой при $|s|$, $|t|\geqslant t_0$.

3) Для $R>0$ положим

$$n_R=\max\{n\in\mathbb{N}:\ \lambda_n<R\ \text{ и }\ \lambda_{-n}>-R\}.$$

Ясно, что

$$n_R<R,\quad n_R+1-|l(n_R+1)|<R,\quad n_R+1+|l(n_R+1)|\geqslant R.$$

Отсюда заключаем, что

$$n_R=(1+o(1))R,\quad R\to\infty, \tag{1.7}$$

так как, в силу (1.1),

$$l(t)=O(t^\alpha),\quad t\to+\infty.$$

Напишем представление

$$\sum_{|\lambda_k|<R}\frac{1}{\lambda_k}=\sum_{j=1}^{n_R}\left(\frac{1}{\lambda_{-j}}+\frac{1}{\lambda_j}\right)+\sum_{\substack{|\lambda_k|<R,\\ |k|>n_R}}\frac{1}{\lambda_k}=S_{1,R}+S_{2,R}.$$

Учитывая (1.7), выводим, что

$$|S_{1,R}|\leqslant\sum_{j=1}^{n_R}\left|\frac{1}{\lambda_{-j}}+\frac{1}{\lambda_j}\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n_R}\frac{2|l(j)|}{|j^2-l^2(j)|}=O\left(\sum_{j=1}^{n_R}\frac{1}{j^{2-\alpha}}\right). \tag{1.8}$$

Далее, пусть $K$ – множество значений индекса $k$ в сумме $S_{2,R}$. Для каждого $k\in K$ верны неравенства

$$k+|l(k)|\geqslant R,\quad k-|l(k)|<R.$$

Следовательно, число слагаемых в сумме $S_{2,R}$ есть $O(R^{\alpha})$, а каждое слагаемое удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{|\lambda_k|} = O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Поэтому

$$|S_{2,R}| = O(R^{\alpha-1}), \quad R \to +\infty.$$

Отсюда и из (1.8) вытекает утверждение пункта 3).

Утверждения пунктов 4)–6) являются следствиями уже установленных свойств последовательности $\{\lambda_k\}$. □

**Замечание 1.** Ясно, что изменение конечного числа точек $\{\lambda_k\}$ не влияет на асимптотику функции $\ln|\varphi|$, связанную с вопросами включения $\varphi \in \mathcal{P}$ и обратимости $\varphi$ по Эренпрайсу. Учитывая это замечание, изменим функцию $l$ на отрезке $[0; t_0]$ так, чтобы функция $\lambda$ стала непрерывной и строго возрастающей на всей вещественной оси, $\lambda(0) = 0$ и измененная функция $l$ являлась бы функцией ограниченной вариации на отрезке $[0; t_0]$:

$$\bigvee_0^{t_0}(l) := \sup \sum_{j=0}^{n} |l(\tau_{j+1}) - l(\tau_j)| < +\infty, \tag{1.9}$$

где супремум берется по всевозможным конечным разбиениям отрезка $[0; t_0]$ :

$$\tau_0 := 0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n < t_0 =: \tau_{n+1}.$$

Нам понадобится следующая лемма, принадлежащая С. Ю. Фаворову.

**Лемма C** (см. [11, лемма 1]). *Пусть последовательность $A = \{a_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned}
&\exists \lim_{R\to\infty} \sum_{|a_j|<R} a_j^{-1}, \\
&n_A(0,t) = O(t), \quad t \to \infty, \\
&n_A(0,t+1) - n_A(0,t) = o(t), \quad t \to \infty,
\end{aligned}$$

*где $n_A(z,t)$ – число точек $a_j$ в круге $|w - z| \leqslant t$. Тогда формула*

$$g(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|a_j|\leqslant R} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$$

*корректно определяет целую функцию экспоненциального типа и для всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место представление*

$$\ln|g(z)| = \int_0^\infty \frac{n_A(0,t) - n_A(z,t)}{t}\mathrm{d}t.$$

В силу леммы 1 и леммы C, формулой (1.3) определяется целая функция экспоненциального типа, и для всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место представление

$$\ln|\varphi(z)| = \int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(z,t)}{t}\mathrm{d}t. \tag{1.10}$$

Положим

$$d_1 = \min\{\lambda_1, -\lambda_{-1}, d_0/2\}.$$

Докажем, что для наших целей считающие функции

$$n(0,t) = [\lambda^{-1}(t)] - [\lambda^{-1}(-t)],\ n(x,t) = [\lambda^{-1}(x+t)] - [\lambda^{-1}(x-t)] \tag{1.11}$$

в представлении (1.10) можно заменить на выражения

$$(\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t)), \quad (\lambda^{-1}(x+t) - \lambda^{-1}(x-t)),$$

соответственно.

**Лемма 2.** *Пусть функция $l$ удовлетворяет условию* (1.1). *Тогда для произвольного фиксированного $\delta_0 \in (0; d_1)$ справедливо асимптотическое соотношение*

$$\int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t}\mathrm{d}t - \int_{\delta_0}^\infty \frac{\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t)}{t}\mathrm{d}t + \\ + \int_{\delta_0}^\infty \frac{\lambda^{-1}(x+t) - \lambda^{-1}(x-t)}{t}\mathrm{d}t = O(\ln|x|) \tag{1.12}$$

*при $|x| \to +\infty$ и $|x - \lambda_k| \geqslant \delta_0$, $k \in \mathbb{Z}'$.*

**Доказательство.** Для $|x - \lambda_k| > \delta_0$, $k \in \mathbb{Z}'$, очевидно, будет

$$\int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{\delta_0}^\infty \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Учитывая (1.11), для произвольного $\sigma > 0$ получаем оценку

$$\Big|\int_{\delta_0}^{|x|^\sigma} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}\mathrm{d}t - \int_{\delta_0}^{|x|^\sigma} \frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t)}{t}\mathrm{d}t + \int_{\delta_0}^{|x|^\sigma} \frac{\lambda^{-1}(x+t)-\lambda^{-1}(x-t)}{t}\mathrm{d}t\Big| \leqslant 4\max(\sigma,\, 1)\ln(\delta_0^{-1}|x|). \quad (1.13)$$

Зафиксируем $\sigma > 1$ и положим $\zeta(t) = \frac{1}{2} - \{\lambda^{-1}(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, где $\{a\}$ – дробная часть числа $a \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\int_{|x|^\sigma}^{\infty} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}\mathrm{d}t - \int_{|x|^\sigma}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t)}{t}\mathrm{d}t + \int_{|x|^\sigma}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(x+t)-\lambda^{-1}(x-t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{|x|^\sigma}^{\infty} \frac{\zeta(t)-\zeta(-t)+\zeta(x+t)-\zeta(x-t)}{t}\mathrm{d}t. \quad (1.14)$$

Покажем, что для первообразной $Z(t) = \int_0^t \zeta(\tau)\mathrm{d}\tau$ справедлива оценка

$$|Z(t)| = O(|t|^\alpha), \quad |t| \to +\infty. \quad (1.15)$$

Действительно, используя известную оценку для интеграла Стилтьеса и принимая во внимание условие (1.1) и соотношения (1.6), (1.9), получим

$$|Z(t)| = \left|\int_0^t \left(\frac{1}{2} - \{\lambda^{-1}(\tau)\}\right)\mathrm{d}\,\tau\right| = \left|\int_0^{\lambda^{-1}(t)} \left(\frac{1}{2} - \{y\}\right)\mathrm{d}\,(y + l(|y|))\right| \leqslant \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\bigvee_0^{|\lambda^{-1}(t)|}(l) = O(|\lambda^{-1}(t)|^\alpha) = O(|t|^\alpha)$$

при $|t| \to +\infty$. Из оценки (1.15), представления (1.14), интегрируя по частям, выводим, что

$$\int\limits_{|x|^\sigma}^{\infty} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}\mathrm{d}t - \int\limits_{|x|^\sigma}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t)}{t}\mathrm{d}t + \int\limits_{|x|^\sigma}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(x+t)-\lambda^{-1}(x-t)}{t}\mathrm{d}t = O(1) \quad (1.16)$$

при $|x| \to +\infty$. Утверждение леммы следует из оценок (1.13) и (1.16). □

**Замечание 2.** Пусть точка $z = x + \mathrm{i}y$ такова, что $|z - \lambda_k| = \delta_0$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}'$, число $\delta_0$ такое же, как в лемме 2. Тогда, очевидно,

$$\ln|\varphi(z)| = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{n(0,t)-n(z,t)}{t}\mathrm{d}t = \int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{n(0,t)-n(x,t^*)}{t}\mathrm{d}t,$$

где $t^* = \sqrt{t^2 - y^2}$, $y \in [0;\delta_0]$.

Рассуждая точно так же, как и при доказательстве леммы 2, получаем, что

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{n(0,t)-n(z,t)}{t}\mathrm{d}t - \int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t)}{t}\mathrm{d}t + \int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(x+t^*)-\lambda^{-1}(x-t^*)}{t}\mathrm{d}t = O(\ln|z|), \quad (1.17)$$

когда $z \to \infty$ по множеству $\{z:\ |z-\lambda_k| = \delta_0,\ k \in \mathbb{Z}'\}$.

**Доказательство теоремы 1.** Принимая во внимание определение алгебры $\mathcal{P}$ и аналитический критерий обратимости (теорема A), видим, что требуемое утверждение будет следовать из асимптотического соотношения

$$\ln|\varphi(z)| = O(\ln|z|), \quad (1.18)$$

при $|z| \to \infty$, по множеству $|z - \lambda_k| = \delta_0$, $k \in \mathbb{Z}'$, а $\delta_0 > 0$ такое же, как в лемме 2.

В силу формулы (1.17), соотношение (1.18) эквивалентно тому, что оценка

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*)-\lambda^{-1}(x-t^*))-(\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t))}{t}\mathrm{d}t = O(\ln|x|) \tag{1.19}$$

при $|k|\to\infty$ имеет место для всех $y\in[0;\delta_0]$ и $x$ таких, что $(x-\lambda_k)^2+y^2=\delta_0^2$, $k\in\mathbb{Z}'$; здесь обозначено $t^*=\sqrt{t^2-y^2}$.

Представим интеграл из левой части (1.19) в виде суммы:

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*)-\lambda^{-1}(x-t^*))-(\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t))}{t}\mathrm{d}t = I_1+I_2+I_3$$

$$=\left(\int_{\delta_0}^{\frac{|x|}{2}}+\int_{\frac{|x|}{2}}^{2|x|}+\int_{2|x|}^{\infty}\right)\frac{(\lambda^{-1}(x+t^*)-\lambda^{-1}(x-t^*))-(\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t))}{t}\mathrm{d}t.$$

Оценки для слагаемых $I_1$, $I_2$, $I_3$ проведем при $x>0$, случай $x<0$ рассматривается аналогично. Принимая во внимание соотношения (1.4), (1.5), для слагаемого $I_1$ при $x\to+\infty$ получим

$$I_1=\int_{\delta_0}^{\frac{x}{2}}\frac{2(t^*-t)-(l(x+t^*)-l(x-t^*))}{t}\mathrm{d}t+O(1)=O(\ln x). \tag{1.20}$$

Оценим слагаемое $I_3$. Для этого фиксируем $\sigma>1$ и разобьем $I_3$ на сумму двух интегралов:

$$I_3=I_{31}+I_{32}=$$
$$=\left(\int_{2x}^{x^\sigma}+\int_{x^\sigma}^{\infty}\right)\frac{(\lambda^{-1}(x+t^*)-\lambda^{-1}(x-t^*))-(\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t))}{t}\mathrm{d}t.$$

В силу (1.4) и (1.5), при $x\to+\infty$ будет

$$I_{31}=\int_{2x}^{x^\sigma}\frac{2(t^*-t)-(l(t^*+x)-l(t^*-x))}{t}\mathrm{d}t+O(1).$$

Используя условие (1.4), получаем оценку

$$|I_{31}| \leqslant \mathrm{const} \int_{\sqrt{4x^2-y^2}}^{\sqrt{x^{2\sigma}-y^2}} \frac{x\ln x}{t^*(t^*-x)} \mathrm{d}t^* + O(1) = O(\ln x).$$

Аналогично, для интеграла $I_{32}$ выводим оценку

$$I_{32} = O(1).$$

Таким образом,

$$I_3 = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \tag{1.21}$$

Слагаемое $I_2$ представим в виде

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23}$$
$$= \left( \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x-1} + \int\limits_{x-1}^{x+1} + \int\limits_{x+1}^{2x} \right) \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*) - \lambda^{-1}(x-t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t} \mathrm{d}t.$$

Нетрудно убедиться в справедливости оценки

$$I_{22} = O(1), \quad x \to +\infty. \tag{1.22}$$

Для интеграла $I_{21}$, учитывая (1.4) и (1.5), получим

$$I_{21} = \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*) - \lambda^{-1}(x-t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t} \mathrm{d}t$$
$$= \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{2(t^*-t) - (l(x+t^*) - l(x-t^*))}{t} \mathrm{d}t + O(1)$$
$$= -\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x+t^*) - l(x)}{t} \mathrm{d}t - \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x) - l(x-t^*)}{t} \mathrm{d}t + O(1)$$
$$= -\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x) - l(x-t^*)}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x), \quad x \to +\infty.$$

Далее,

$$\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x)-l(x-t^*)}{t}\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x)-l(x-t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$+\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x-t)-l(x-t^*)}{t}\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{x}} \frac{l(x)-l((1-\tau)x)}{\tau}\mathrm{d}\tau + O(1),$$

когда $x \to +\infty$. Полагая $x = e^s$, $\delta = 1-\tau$ и используя условие (1.4), последний интеграл оценим следующим образом:

$$\left|\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{x}} \frac{l(x)-l((1-\tau)x)}{\tau}\mathrm{d}\tau\right| = \left|\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2}} \frac{l(e^s)-l((e^{s+\ln\delta})}{1-\delta}\mathrm{d}\delta\right|$$

$$\leqslant \mathrm{const}\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(e^{s^*})\cdot e^{s^*}\cdot(-\ln\delta)}{e^{s^*}(1-\delta)}\mathrm{d}\delta = O(\ln x),$$

здесь $s^* \in [s+\ln\delta; s]$. Окончательно получаем

$$I_{21} = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \tag{1.23}$$

Аналогично доказывается оценка

$$I_{23} = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \tag{1.24}$$

Из оценок (1.22), (1.23), (1.24) следует, что

$$I_2 = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \tag{1.25}$$

В свою очередь, из соотношений (1.20), (1.21), (1.25) вытекает оценка (1.19), а значит, и оценка (1.18).

□

**2.** Рассмотрим класс возмущающих функций $l$, для которого условие, эквивалентное соотношению (1.4), будет критерием того, что соответствующая функция $\varphi$ – обратимый по Эренпрайсу элемент алгебры $\mathcal{P}$.

Пусть $l : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ – положительная вогнутая функция и $l(0) = 0$. Тогда функция $l$ абсолютно непрерывна, и значит, почти всюду на

$(0; +\infty)$ дифференцируема. Обозначим через $E$ множество тех значений $t \in (0; +\infty)$, для которых существует производная $l'(t)$, и положим

$$p(t) = \begin{cases} l'(t), & t \in E, \\ \inf\{l'(s),\ s:\ s \in E,\ s < t\}, & t \in (0; +\infty) \setminus E. \end{cases}$$

Функция $p$ убывает на положительной полуоси и

$$l(t) = \int\limits_0^t p(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.26}$$

**Теорема 2.** *Пусть $l$ – положительная вогнутая функция на* $[0; +\infty)$, $l(0) = 0$ *и*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln|l(t)|}{\ln t} \in [0; 1/2), \tag{1.27}$$

*а функция $\varphi$ определена формулой* (1.3).

*Для того, чтобы функция $\varphi$ принадлежала алгебре $\mathcal{P}$ и была обратимой по Эренпрайсу, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{p(t)t}{\ln t} = O(1), \quad t \to +\infty. \tag{1.28}$$

**Доказательство.** *Достаточность.* Из представления (1.26) и условия (1.28) следует, что функция $l$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, согласно которой функция $\varphi \in \mathcal{P}$ и обратима по Эренпрайсу.

*Необходимость.* Предположим, что условие (1.28) не выполнено: найдется последовательность

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots \to +\infty,$$

для которой

$$p(x_n) \geqslant \frac{n \ln x_n}{x_n}, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{1.29}$$

При этом, так как $p$ — убывающая функция, можно считать, что

$$\left|\frac{x_n}{2} - \lambda_k\right| \geqslant \delta_0, \quad k,\ n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $x > 0$. Из представления (1.10) и асимптотического равенства (1.12) следует, что

$$\ln|\varphi(x)| = \int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t)}{t}\mathrm{d}t - \int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(x+t) - \lambda^{-1}(x-t)}{t}\mathrm{d}t + O(\ln x)$$

при $x \to +\infty$, и $|x - \lambda_k| \geqslant \delta_0$, $k = 1, 2, \ldots$. Отсюда, учитывая соотношение (1.5) и условие (1.27), при указанных $x$ можем написать

$$\ln|\varphi(x)| = \int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{l(x+t) - l(|x-t|)}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x).$$

Далее, $l$ – возрастающая функция, поэтому из последнего равенства выводим, что

$$\ln\left|\varphi\left(\frac{x_n}{2}\right)\right| \geqslant \int\limits_{\frac{x_n}{8}}^{\frac{x_n}{4}} \frac{l\left(\frac{x_n}{2} + t\right) - l\left(\frac{x_n}{2} - t\right)}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x_n)$$

$$\geqslant \int\limits_{\frac{x_n}{8}}^{\frac{x_n}{4}} \frac{2p(3x_n/4)t}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x_n)$$

при $n \to \infty$. Откуда, с учетом неравенства (1.29) и того, что $p$ — убывающая функция, следует оценка

$$\ln\left|\varphi\left(\frac{x_n}{2}\right)\right| \geqslant \frac{n \ln(x_n/2)}{4} + O(\ln|x_n|), \quad n \to \infty,$$

то есть функция $\varphi$ имеет вдоль вещественной оси рост выше полиномиального, и следовательно, $\varphi \notin \mathcal{P}$. □

## §2. Медленно убывающая функция, не являющаяся очень медленно убывающей.

Выберем и зафиксируем какую-нибудь подпоследовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{N}$, удовлетворяющую условиям

$$x_1 > 2, \quad \ln x_n > 2x_{n-1}, \ n = 2, 3, \ldots. \tag{2.1}$$

Положительную последовательность $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, определим следующим образом: она получается из натуральной последовательности заменой всех чисел

$$m \in \mathbb{N} \bigcap (x_n - [\ln x_n]; x_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

на числа

$x_n - 1 + (1/[\ln x_n])$, $x_n - 1 + (2/[\ln x_n]), \ldots, x_n - 1 + ([\ln x_n] - 1)/[\ln x_n])$, при каждом $n = 1, 2, \dots$. Теперь положим $\lambda_{-k} = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$ и

$$\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}'}.$$

Последовательность $\Lambda$ имеет плотность 2 и удовлетворяет условиям леммы С. Поэтому формула

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right) \tag{2.2}$$

определяет целую функцию экспоненциального типа $\pi$, и

$$\ln|\varphi(z)| = \int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(z,t)}{t} \mathrm{d}t,$$

где символом $n(z,t)$ обозначено число точек $\lambda_k \in \Lambda$ в круге $|w - z| \leqslant t$.

**Теорема 3.** *Функция $\varphi$ содержится в алгебре $\mathcal{P}$, обратима по Эренпрайсу и не является очень медленно убывающей.*

Докажем сначала одну лемму.

**Лемма 3.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}'}$ – вещественная четная последовательность, удовлетворяющая условию*

$$n(0,t) - 2t = O(\ln t), \quad t \to +\infty. \tag{2.3}$$

*Тогда для произвольного $\delta > 0$ верна формула*

$$\int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{\delta|x|} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t + O_\delta(\ln|x|), \quad |x| \to +\infty, \tag{2.4}$$

*при этом постоянная в оценке $O_\delta(\ln|x|)$ зависит от $\delta$.*

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что для последовательности $\Lambda$ выполнены условия леммы С, поэтому интеграл в левой части соотношения (2.4) корректно определен.

Пусть $\delta > 0$, $x > 0$, $M > \max\{2, \delta\}$. Имеем

$$\int\limits_{\delta x}^{\infty} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t = I_1 + I_2$$

$$= \int\limits_{\delta x}^{Mx} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t + \int\limits_{Mx}^{\infty} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t. \quad (2.5)$$

В силу условия (2.3) будет

$$I_1 = O_{\delta,M}(\ln x), \quad x \to +\infty. \quad (2.6)$$

Напомним, что для $t > 0$ символом $n^+(t,x)$ мы обозначаем число точек $\lambda_k$ в промежутке $(t; t+x]$. Так как $\Lambda$ – четная последовательность, можем написать

$$\int\limits_{Mx}^{\infty} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t = -x \int\limits_{Mx}^{\infty} \frac{n^+(t,x) - x}{t(t+x)} \mathrm{d}t + \int\limits_{(M-1)x}^{Mx} \frac{n^+(t,x) - x}{t+x} \mathrm{d}t$$

$$- x \int\limits_{Mx}^{\infty} \frac{x}{t(t+x)} \mathrm{d}t + \int\limits_{(M-1)x}^{Mx} \frac{x}{t+x} \mathrm{d}t = O_M(\ln x), \quad x \to +\infty. \quad (2.7)$$

Из соотношений (2.5)–(2.7) следует утверждение леммы.

□

**Доказательство теоремы 3.** Фиксируем $\delta \in (0; 1/2)$. Используя лемму C и лемму 3, для функции $\varphi$, определенной формулой (2.2), и $x > 0$ получим

$$\ln|\varphi(x)| = \int\limits_{0}^{\delta x} \frac{n(0,t) - 2t}{t} \mathrm{d}t - \int\limits_{0}^{\delta x} \frac{n(x,t) - 2t}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x). \quad (2.8)$$

Отсюда выводим, что

$$\ln|\varphi(x)| \leqslant \int\limits_{0}^{\delta x} \frac{2t - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x), \quad x \to +\infty. \quad (2.9)$$

Если значение $t \in [0; \delta x]$ таково, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ хотя бы одно из множеств

$$[x-t; x+t] \bigcap [x_n - [\ln x_n]; x_n], \quad [x_n - [\ln x_n]; x_n] \setminus [x-t; x+t] \tag{2.10}$$

пусто, то, в силу определения множества $\Lambda$, будет

$$(2t - n(x,t)) \leqslant 1.$$

Если для $t \in [0; \delta x]$ существует значение $n \in \mathbb{N}$ (самое большее, одно!) такое, что оба множества (2.10) непусты, то будем использовать оценку

$$(2t - n(x,t)) \leqslant 2t,$$

замечая при этом, что мера множества таких значений $t \in [0; \delta x]$ есть величина $O(\ln x)$, когда $x \to +\infty$.

Из вышесказанного для первого слагаемого в правой части (2.8) получим

$$\int\limits_0^{\delta x} \frac{2t - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t \leqslant O(\ln x), \quad x \to +\infty.$$

Следовательно, $\varphi \in \mathcal{P}$.

Пусть $M_0 > 0$. Из определений чисел $x_n$ и $\lambda_k$ вытекает, что для всех достаточно больших значений $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in [x_n - M_0; x_n + M_0]$ будет

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\delta x} \frac{2t - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t &\leqslant \int\limits_{M_0+1}^{[\ln x_n]-M_0} \frac{2t - [\ln x_n]}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x) \\ &= -[\ln x_n] \ln \frac{[\ln x_n] - M_0}{M_0 + 1} + O(\ln x), \quad x \to +\infty.\end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (2.9) выводим, что функция $\varphi$ не является очень медленно убывающей.

Пусть $x > 0$ таково, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ выполнены неравенства

$$|x - x_n| > [\ln x_n], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.11}$$

$$x - \lambda_k \geqslant \varepsilon_0, \quad k \in \mathbb{Z}'. \tag{2.12}$$

Если $x \to +\infty$ по множеству, определяемому соотношениями (2.11), (2.12), то

$$\int\limits_0^{\delta x} \frac{2t - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t \geqslant - \int\limits_{\ln(1-\delta)x}^{2\ln x} \frac{\ln x}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x) = O(\ln x).$$

Из этой оценки и соотношения (2.8), учитывая (2.1), получаем

$$\ln|\varphi(x)| \geqslant \int\limits_0^{\delta x} \frac{n(0,t) - 2t}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x) \geqslant - \sum_{x_j \leqslant \delta x} 2\ln x_j \int\limits_{x_j - [\ln x_j]}^{x_j + 1} \frac{\mathrm{d}t}{t} + O(\ln x)$$
$$\geqslant \sum_{x_j \leqslant \delta x} \frac{-8\ln^2 x_j}{x_j} + O(\ln x) = O(\ln x),$$

когда $x \to +\infty$ по множеству (2.11)–(2.12). Таким образом, для $\varphi$ выполнено определение медленно убывающей функции.

Теорема 3 доказана. □

**Замечание 3.** Если в приведенном выше построении отталкиваться не от последовательности $\mathbb{N}$, а от последовательности положительных нулей очень медленно убывающей функции из теоремы 1, утверждение теоремы 3 останется справедливым. Таким образом, мы получаем целый класс медленно убывающих функций, не являющихся очень медленно убывающими.

Отметим также, что на основе конструкции из теоремы 3 рецензентом был предложен следующий пример:

$$\varphi(z) = \sin \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2^k}\right)^k \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{z}{2^k + j}\right)^{-1},$$

для которого нетрудно прямо, без использования леммы С. Ю. Фаворова, получить все нужные оценки.

## Список литературы

1. Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье.* Мир, М., 1986.
2. L. Ehrenpreis, *Solution of some problems of division, IV.* — Amer. J. Math. **57**, No. 1 (1960), 522–588.
3. C. A. Berenstein, B. A. Taylor, *A new look at interpolation theory for entire functions of one variable.* — Adv. in Math., **33** (1980), 109–143.

4. Н. Ф. Абузярова, *Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций.* — Докл. РАН **457**, No. 5 (2014), 510–513.
5. A. Aleman, A. Baranov, Yu. Belov, *Subspaces of $C^\infty$ invariant under the differentiation.* — J. Func. Anal., **268** (2015), 2421–2439.
6. Н. Ф. Абузярова, *Спектральный синтез для оператора дифференцирования в пространстве Шварца.* — Матем. заметки, **102**, No. 2 (2017), 163–177.
7. R. E. A. C. Paley, N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, AMS, N. Y., 1934.
8. А. И. Хейфиц, *Характеристика нулей некоторых специальных классов целых функций конечной степени.* — Теор. функций, функцион. анализ и их прилож., **9** (1969), 3–13.
9. А. М. Седлецкий, *Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции.* — Матем. заметки, **82**, No. 2 (2007), 262–271.
10. А. А. Юхименко, *Об одном классе функций типа синуса.* — Матем. заметки **83**, No. 6 (2008), 941–954.
11. С. Ю. Фаворов, *Множества нулей целых функций экспоненциального типа с дополнительными условиями на вещественной прямой.* — Алгебра и анализ **20**, No. 1 (2008), 138–145.
12. Н. Ф. Абузярова, В. С. Шустов, *Об условиях обратимости по Эренпрайсу.* — Вестник Башкирск. университета **23**, No. 3 (2018), 590–598.
13. L. Ehrenpreis, *Solution of some problems of division, I.* — Amer. J. Math. **76** (1954), 883–903.
14. В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979.

Abuzyarova N. F. Shifts of a sequence of integers that generate functions invertible in the sense of Ehrenpreis.

Consider the Schwartz algebra $\mathcal{P}$, which consists of all entire functions of exponential type and polynomial growth along the real axis. An element $f$ of $\mathcal{P}$ is said to be invertible in the sense of Ehrenpreis if the principal ideal generated by $f$ is closed. It is clear that the sequence of integers is the zero set of an Ehrenpreis invertible function. For a given unbounded function $l(t)$ on the nonnegative semi-axis, restrictions are studied under which the perturbed sequence $\{k + l(|k|)\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, is a zero set of an Ehrenpreis invertible function.

Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди 32,
450076 Уфа, Россия
*E-mail*: abnatf@gmail.com

Поступило 11 февраля 2019 г.