Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 479, 2019 г.

А. Л. Смирнов

ПРОГРАММА ЭЙЗЕНШТЕЙНА И МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ

§1. Введение

Программа Эйзенштейна сформулирована в работе [1]. Однако Эйзенштейн не реализовал свою программу, возможно, просто не успел. Цель программы состоит в том, чтобы найти точную формулу для числа целых точек в некоторых системах эллипсоидов и гиперболоидов. Первый пример формулы такого типа содержится в исходной статье Эйзенштейна и имеет вид

$$\frac{N(r)-1}{4} = \left[\frac{r^2}{1}\right] - \left[\frac{r^2}{3}\right] + \left[\frac{r^2}{5}\right] - \left[\frac{r^2}{7}\right] + \dots,$$

где $N(r)$ – число целых точек в круге радиуса r. Более сложные формулы такого типа приведены в [2] и [3]. Например,

$$\frac{N_1(r)-1}{4} + \frac{N_2(r)-1}{4} = \left[\frac{r^2}{1}\right] + \left[\frac{r^2}{3}\right] + \left[\frac{r^2}{7}\right] + \left[\frac{r^2}{11}\right] - \left[\frac{r^2}{11}\right]$$
$$- \left[\frac{r^2}{13}\right] - \left[\frac{r^2}{17}\right] - \left[\frac{r^2}{19}\right] + \dots,$$

где $N_1(r)$ и $N_2(r)$ – число целых точек в эллипсах $x^2 + 5y^2 \leqslant r^2$ и $2x^2 + 2xy + 3y^2 \leqslant r^2$, соответственно, а знак справа определяется вычетом знаменателя по модулю 20. В общем случае, в [3] с каждым мнимым квадратичным полем K связана такая формула, где число слагаемых в левой части равняется числу классов идеалов кольца целых $\mathcal{O}_K$. Справа стоит сумма по квадратичным формам, связанным с идеалами $\mathcal{O}_K$ соответствием Дирихле. Таким образом, упомянутые формулы наводят на мысль, что сумма тэта-рядов, соответствующих квадратичным формам, должна иметь простое выражение. Теорема 3.1 выражает указанную сумму с помощью ряда Эйзенштейна. Эта теорема

Ключевые слова: Эйзенштейн, тэта-ряд, мнимое квадратичное поле, точная формула, арифметическая теорема Римана–Роха, модулярная форма.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 19-01-00513) и при поддержке программы Президиума РАН "Новейшие методы математического моделирования в изучении нелинейных динамических систем" (целевая субсидия 08-04).

использована для нового доказательства теоремы 3.2. Мотивировка нашего интереса к таким формулам связана с арифметической теоремой Римана–Роха и может быть найдена в [2] и [3]. Отметим, что в [4] утверждение, близкое к 3.1, использовано для элементарного доказательства формулы Дирихле для числа классов мнимого квадратичного поля. Это соответствует тому, что теорема Римана–Роха дает, помимо прочего, и формулу для эйлеровой характеристики структурного пучка.

§2. Предварительные сведения

Этот раздел предназначен для того, чтобы ввести основные объекты и согласовать обозначения из разных источников.

2.1. Квадратичное поле. Пусть K – мнимое квадратичное расширение $\mathbb{Q}$. Иными словами, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, где m – натуральное бесквадратное число. Пусть $\mathcal{O}_K$ – кольцо всех $\mathbb{Z}$-целых элементов K; $m(K)$ – число корней из 1 в K; $h(K)$ – число классов идеалов кольца $\mathcal{O}_K$.

Пусть $d(K)$ – дискриминант K. Таким образом,

$$d(K) = \begin{cases} -m, & \text{если } (-m) \equiv 1 \pmod 4; \\ -4m, & \text{если } (-m) \not\equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

В частности, $d(K) < 0$.

Пусть $\chi_K : \mathbb{Z}/(d(K)\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ – характер Дирихле, ассоциированный с K. Тем же символом χ_K будем обозначать и композицию этого характера с канонической проекцией $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(d(K)\mathbb{Z})$. Таким образом, χ_K определен тем, что является полностью мультипликативной функцией, $\chi_K(1) = 1$, а для простого p верна формула

$$\chi_K(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \text{ ветвится в } \mathcal{O}_K; \\ +1, & \text{если } p \text{ распадается в } \mathcal{O}_K; \\ -1, & \text{если } p \text{ остается простым в } \mathcal{O}_K. \end{cases} \tag{1}$$

Кроме того, по определению $\chi_K(-1) = -1$. Это сответствует тому, что архимедово нормирование не распадается в мнимом квадратичном поле.

Ниже потребуется символ Кронекера, так как он использован в [5] для описания модулярных преобразований тэта-рядов. Символ Кронекера известен также как обобщенный символ Якоби и символ Якоби–Кронекера. Проблема состоит в том, что символ Кронекера разные авторы понимают по-разному. Например, по-разному понимается область определения этого символа. В [5] символ Кронекер не определен, но есть ссылка на [6]. Поэтому будем использовать этот источник. Нас интересует функция $\mathbb{Z} \to \{0, \pm 1\}$,

$$n \mapsto \left(\frac{a}{n}\right)$$

при фиксированном $a \in \mathbb{Z}$, $a = 0, 1 \pmod 4$, $a < 0$. По определению

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \prod \left(\frac{a}{p}\right)^{v_p(n)}, \text{ где } \left(\frac{a}{p}\right) = 0, \text{ если } a \text{ не взаимно просто с } p.$$

Если же a взаимно просто с p, то

$$\left(\frac{a}{p}\right) \text{– символ Лежандра при } p \neq 2 \text{ и } \left(\frac{a}{2}\right) = \begin{cases} +1, \text{если } a \equiv 1 \pmod 8; \\ -1, \text{если } a \equiv 5 \pmod 8). \end{cases}$$

Утверждается [6, §46, теор. 137, формула (124), с. 189], что функция

$$n \mapsto \left(\frac{a}{n}\right)$$

a-периодична как на луче $n < 0$, так и на луче $n > 0$. При этом никакой периодичности на объединении этих лучей нет. Нам потребуется функция

$$n \mapsto 0, \text{ если } n = 0 \text{ и } n \mapsto \operatorname{sign} n \cdot \left(\frac{a}{n}\right), \text{ если } n \neq 0. \tag{2}$$

Эта функция определена на $\mathbb{Z}$ и является характером Дирихле $\pmod a$.

Кроме того, нам потребуются обобщенные числа Бернулли. Пусть χ – некоторый характер Дирихле и u – модуль этого характера. Таким образом, u – положительное целое число, а χ – примитивный характер $\pmod u$. Для $u = 1$ есть единственный такой характер, причем

$$\chi(1) = \chi(0) = 1. \tag{3}$$

Как обычно, $L(s, \chi) = \sum \chi(n) n^{-s}$. Если $u \neq 1$, то [7, 4.33, с. 137]:

$$L(0, \chi) = -B_{1,\chi}, \tag{4}$$

где

$$B_{1,\chi} = \sum_{c=0}^{u-1} \chi(c) \left(\frac{c}{u} - \frac{1}{2}\right). \tag{5}$$

Например, $B_{1,\chi} = 1/2$ для $u = 2$ и $B_{1,\chi} = 1/3$ для $u = 3$, $\chi(2) = -1$.

2.2. Квадратичные формы. По умолчанию под (квадратичной) формой будем иметь в виду бинарную целочисленную квадратичную форму. Таким образом,

$$f = ax^2 + bxy + cy^2, \qquad (a, b, c \in \mathbb{Z}).$$

Примитивность f означает, что a, b, c взаимно просты в совокупности. Дискриминант f определен формулой

$$\operatorname{disc} f = -(4ac - b^2).$$

Например, $\operatorname{disc}(x^2 + y^2) = -4$. Знак минус в определении дискриминанта заслуживает комментария. Такой знак дискриминанта соответствует выбору знака в [5, IX, §2, с. 207]. Кроме того, такой же знак выбран и в [8, III, §5, с. 96] для форм ранга два. Видимо, такой выбор знака продиктован желанием тривиализовать дискрминант стандартной гиперболической формы $x^2 - y^2$. Кроме дискиминанта формы в [8] есть и понятие детерминанта формы, отличающееся от дискриминанта знаком. Понятие детерминанта постараемся не использовать, чтобы не усугублять путаницу в терминологии, связанной с квадратичными формами.

На множестве положительно-определенных примитивных форм естественно действует группа $G = \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) : \det \gamma > 0\}$. Таким образом, рассматривается собственная или, что то же самое, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-эквивалентность форм.

В [5] с формой f связывается четная (на диагонали) симметричная матрица

$$A(f) = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\operatorname{disc} f = -\det A(f).$$

Наоборот, с четной симметричной матрицей A связана форма

$$f_A(x, y) = \frac{1}{2} v^t A v, \qquad \text{где } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Например,

$$A(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad f = x^2 + xy + y^2,$$

$$A(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad f = x^2 + y^2. \tag{7}$$

Соответствие $f \mapsto A(f)$ и $A \mapsto f_A$ и осуществляет биекцию QF и множества четных симметричных матриц $EvSymM$. Эта биекция индуцирует биекцию множества классов эквивалентности квадратичных форм и множества классов эквивалентности четных симметричных матриц.

Как и в [5, IX, §2, (11)] уровень f определен формулой

$$N(f) = \min\{N \in \{1, 2, \dots\} : NA^{-1} \text{ четная симметричная матрица}\}.$$

Если форма f ясна из контекста, то вместо $N(f)$ иногда будем писать просто N. В нашем бинарном случае легко видеть, что из примитивности f вытекает равенство

$$N = -\operatorname{disc} f. \tag{8}$$

Для примитивных форм произвольного ранга это проверено в [5, IX, §2, теорема 1]. Например (см. (7)),

$$N(f) = 3 \text{ для } f = x^2 + xy + y^2 \text{ и } N(f) = 4 \text{ для } f = x^2 + y^2. \tag{9}$$

Пусть $f = f_A$ – форма из (6). С f связан некоторый характер Дирихле χ_f. Он нужен для описания модулярных преобразований тэта-ряда (см. [5]). Как будет видно ниже, характер χ_f полностью определен дискриминантом f и его можно было бы обозначить просто χ_D, где $D = \operatorname{disc} f$. Модуль для χ_f – дискриминант f, но $\operatorname{disc} f = -N$ (см. (8)) и для краткости обозначений в качестве модуля возьмем просто уровень N. Следуя [5, IX, §4, теорема 5], положим

$$\chi_f(n) \text{ – функция из (2), где } a = -N. \tag{10}$$

2.3. Классы идеалов и формы. Соответствие Дирихле (см. [6, VII, §53]) устанавливает биекцию $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$ множества классов эквивалентности примитивных положительных квадратичных форм дискриминанта $d(K)$. При этом идеалу I соответствует класс формы

$$\frac{\operatorname{Norm}(xe_1 + ye_2)}{\operatorname{Norm} I},$$

где (e_1, e_2) – произвольный базис I как абелевой группы, а Norm обозначает как отображение нормы $K \to \mathbb{Q}$, так и соответствующее отображение $\mathrm{Div}(\mathcal{O}_K) \to \mathrm{Div}(\mathbb{Z})$. Кроме того, при этом неявно имеется в виду стандартное отождествление моноида эффективных дивизоров кольца $\mathbb{Z}$ и множества положительных целых чисел.

Легко проверить, что

$$\chi_K = \chi_f,$$

где χ_K определен в (1), а f соответствует по Дирихле классу идеалов в $\mathcal{O}_K$.

2.4. Модулярные формы. Ниже $\mathcal{H}$ – верхняя полуплоскость в $\mathbb{C}$, $\tau \in \mathcal{H}$, $q = e^{2\pi i\tau}$. Пространство $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ определено в [7, определение 1.2.3] для $k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, нам потребуется пространство $\mathcal{M}_1(N,\chi)$, где χ – характер Дирихле для модуля N. Это пространство определено в [7, 4.3] как χ-собственное подпространство в $\mathcal{M}_1(\Gamma_1(N))$.

Важный для нас пример модулярных форм представлен тэта-рядами квадратичных форм. Удобный источник ссылок при этом – книга [5]. По определению

$$\theta_f(\tau) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}} q^{f(x,y)}.$$

Например (см. (7) и (9)),

$$\theta_f = 1+6q+6q^3+6q^4+12q^7+6q^9+6q^{12}+12q^{13}\dots \text{ для } f = x^2+xy+y^2,$$

$$\theta_f = 1+4q+4q^2+4q^4+8q^5+4q^8+4q^9+8q^{10}+8q^{13}\dots \text{ для } f = x^2+y^2.$$

Для согласования с обозначениями из [5, с. 210, (16)] отметим, что $\theta_f(\tau)$ представляет собой частный случай ряда

$$\theta_{A,\mathbf{h},P_k^A}(\tau) = \sum_{\mathbf{n}\equiv 0 \pmod N} \exp\left(\frac{2\pi i\tau}{N}\frac{1}{2}\frac{\mathbf{n}^t A\mathbf{n}}{N}\right),$$

где $N = N(f)$, $A = A(f)$, $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2$, $\mathbf{h} = 0$, $k = 0$, $P_k^A = 1$. Известно [5, IX, §4, теорема 5], что

$$\theta_f \in \mathcal{M}_1(N,\chi_f).$$

В частности,

$$\theta_f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)(c\tau+d)^{-1} = \chi_f(\gamma)\theta_f(\tau), \text{ где } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma_0(N),$$

$\chi_f(\gamma) = \chi_f(d)$, а характер $d \mapsto \chi_f(d)$ определен в (10).

Еще один важный для нас пример модулярных форм – ряды Эйзенштейна. В нужном весе 1 стандартные ряды расходятся и появляется проблема определения рядов Эйзенштейна. По определению [7, 5.11] пространство $\mathcal{E}(\Gamma_1(N))$ – ортогонал к пространству соответствующих параболических форм. Для наших целей, однако, удобна явная конструкция из [7, 5.11]. Там пространство рядов Эйзенштейна в $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ определено для конгруэнц-подгруппы Γ как пересечение $\mathcal{E}_k(\Gamma(N)) \cap \mathcal{M}_k(\Gamma)$, где $\mathcal{E}_k(\Gamma(N))$ порождено конкретными рядами. На самом деле для каждого N потребуется всего один ряд Эйзенштейна. При этом нужны только те N, для которых $(-N)$ – дискриминант мнимого квадратичного поля. Для характера Дирихле χ положим

$$E_1^\chi = L(0,\chi) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0^\chi(n) q^n, \text{ где } \sigma_0^\chi(n) = \sum_{m|n} \chi(n/m). \tag{11}$$

Например, $E_1^\chi = 1/3 + 2(q + q^3 + q^4 + 2q^7 + q^9 + ...)$, если χ – символ Лежандра по модулю 3. Здесь значение $L(0,\chi) = 1/3$ найдено с помощью (4) и (5).

Нужный нам ряд является частным случаем ряда E_1^χ, где в качестве χ следует взять характер χ_K соответствующего поля K (см. 1).

Кроме того, нам потребуется пространство $\mathcal{E}_1(N,\chi)$, где χ – характер Дирихле по модулю N. Это пространство определено в [7, 4.3] как χ-собственное подпространство в $\mathcal{E}_1(\Gamma_1(N))$. Базис $\mathcal{E}_1(\Gamma_1(N))$ индексирован множеством $A_{N,1}$ (см. [7, перед теор. 4.8.1]). Ряд E_1^χ соответствует элементу (χ,χ_1) из $A_{N,1}$, где χ_1 – единственный характер Дирихле по модулю 1 (см. (3)). Поэтому $E_1^\chi \in \mathcal{E}_1(N,\chi)$ согласно [7, теорема 4.8.1].

§3. Основные результаты

Пусть K – мнимое квадратичное поле, E_1^χ – ряд Эйзенштейна из (11), где χ – характер Дирихле χ_K, указанный в (1). Для класса форм φ определен тэта-ряд θ_φ. Это тэта-ряд, связанный с произвольным представителем класса φ.

3.1. Теорема. *Верна формула*

$$\frac{1}{m}\sum_{\varphi} \theta_\varphi = \frac{1}{2}E_1^\chi,$$

где m – число корней из 1 в K, а φ пробегает классы примитивных положительно-определенных форм дискриминанта $d(K)$.

Доказательство. Пусть

$$\frac{1}{m}\sum_{\varphi} \theta_\varphi = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots, \qquad \frac{1}{2}E_1^\chi = b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \dots .$$

Проверим, что $a_n = b_n$ для $n = 0, 1, \dots$. Начнем с $n = 0$. Так как формы из класса φ положительны, то каждая из них представляет ноль один раз и

$$a_0 = \frac{h(K)}{m}.$$

С другой стороны, ввиду определения ряда Эйзенштейна (11) и формулы (4) для значения L-ряда, $b_0 = -B_1^\chi/2$, где B_1^χ – обобщенное число Бернулли (см. (5)). Поэтому, учитывая формулу (5), для сравнения a_0 и b_0 достаточно проверить формулу

$$h(K) = \frac{m}{2N} \sum_{c=0}^{N-1} \chi(c)c,$$

где $N = -d(K)$ (см. замечание перед (10)). По существу, это формула Дирихле для числа классов мнимого квадратичного поля (см. [6, VII, §52, теорема 152]) с учетом того, что $\rho = 1$ (см. чуть ниже формулировки теоремы в [6]).

Сравним a_n и b_n при $n \geqslant 1$. По определению ряда Эйзенштейна (11):

$$b_n = \sigma_0^\chi(n). \tag{12}$$

Функция $\sigma_0^\chi(n)$ мультипликативна в теоретико-числовом смысле. Это следствие того известного простого факта, что свертка мультипликативных функций мультипликативна. Функция $n \mapsto a_n$ также мультипликативна. В самом деле, пусть $\widetilde{\mathrm{Cl}}(\mathcal{O}_K)$ – набор идеалов $\mathcal{O}_K$, представляющих множество $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$. Практически по определению

$$a_n = \operatorname{card} \widetilde{A}_n/\mathcal{O}_K^*, \quad \text{где}$$
$$\widetilde{A}_n = \{(I, x) : I \in \widetilde{\mathrm{Cl}}(\mathcal{O}_K),\ x \in I,\ \mathrm{Norm}(x) = n\,\mathrm{Norm}(I)\},$$

где $\mathcal{O}_K^*$ действует на $\widetilde{A}_n$ по правилу $(\varepsilon, (I, x)) \mapsto (I, \varepsilon x)$. Однако множество $\widetilde{A}_n/\mathcal{O}_K^*$ изоморфно множеству

$$ID_n = \{J\text{– идеал в } \mathcal{O}_K : \operatorname{card} \mathcal{O}_K/J = n\}.$$

Этот изоморфизм индуцирован отображением $\widetilde{A}_n \to ID_n$, $(I, x) \mapsto xI^{-1}$. Если $n = uv$, где $\gcd(u, v) = 1$, то из однозначности разложения на простые идеалы вытекает, что умножение $ID_u \times ID_v \to ID_n$ – биекция. Поэтому $a_{uv} = a_u a_v$ и достаточно проверить равенство $a_n = b_n$ только для $n = p^r$, где p – простое, $r = 1, 2, \ldots$. В этом случае из определений (1), (11) и формулы (12) вытекает, что

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{если } p \text{ ветвится в } \mathcal{O}_K; \\ 1+r, & \text{если } p \text{ распадается в } \mathcal{O}_K; \\ 1, & \text{если } p \text{ остается простым в } \mathcal{O}_K \text{ и } r \text{ – четно;} \\ 0, & \text{если } p \text{ остается простым в } \mathcal{O}_K \text{ и } r \text{ – нечетно.} \end{cases}$$

В первом случае $p = \pi^2$, $\operatorname{Norm}\pi = p$ и p^r является нормой единственного идеала π^r. В втором случае $p = \pi\bar{\pi}$, $\operatorname{Norm}\pi = \operatorname{Norm}\bar{\pi} = p$ и p^r является нормой идеалов $\pi^a\bar{\pi}^b$, где $a + b = r$. Таких пар (a, b) ровно $r+1$. Третий и четвертый случаи вытекают из равенства $\operatorname{Norm} p = p^2$. Во всех случаях $a_n = b_n$. □

Приведем пример: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, $N = 20$, $h = 2$, $f_1 = x^2 + 5y^2$, $f_2 = 2x^2 + 2xy + 3y^2$,

$$\theta_1 = 1 + 2(q + q^4 + q^5 + 2q^6 + 3q^9 + \dots);$$
$$\theta_2 = 1 + 2(2q^2 + 2q^3 + 2q^7 + q^8 + q^{10} + \dots),$$
$$\theta_1 + \theta_2 = 2 + 2(q + q^2 + 2q^3 + q^4 + q^5 + 2q^6 + 2q^7 + q^8 + 3q^9 + q^{10} + \dots) = E_1^{\chi}.$$

С помощью теоремы 3.1 можно получить новое доказательство формул из [3]. Пусть

$$h^0(f, r) = \frac{\operatorname{card}\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | f(x, y) \leqslant r^2\} - 1}{m}.$$

3.2. Теорема. $\sum h^0(\varphi, r) = \chi(1)E(r^2/1) + \chi(2)E(r^2/2) + \dots$, *где* φ *под знаком суммы пробегает классы примитивных положительно-определенных форм дискриминанта* $d(K)$, *а* $h^0(\varphi, r) = h^0(f, r)$ *для произвольного представителя* $f \in \varphi$.

Доказательство. Непосредственно из определений видно, что

$$\sum h^0(\varphi, r) = c_1 + \dots + c_e,$$

где

$$\sum_{\varphi} \frac{\theta_\varphi - 1}{m} = c_1 q + c_2 q^2 + \dots, \quad e = E(r^2),$$

а $E(x) = [x]$ – целая часть числа x. Так как

$$h^0(f, r) = (a_1 + \dots + a_e)/m,$$

где $\theta_f = 1 + a_1 q + \dots$, то по теореме 3.1 и по определению ряда Эйзенштейна (11) при $n \geqslant 1$ верно равенство

$$c_n = \sum_{m|n} \chi(n/m).$$

Поэтому

$$c_1 + \dots + c_e = \sum_{m|1} \chi(1/m) + \sum_{m|2} \chi(2/m) + \dots$$
$$+ \sum_{m|e} \chi(e/m) = \sum_{md \leqslant e} \chi(d) = \sum_{d \leqslant e/m} \chi(d) = \chi(1)e + \chi(2)E(e/2)$$
$$+ \chi(3)E(e/3) + \dots = \chi(1)E(r^2/1) + \chi(2)E(r^2/2) + \dots$$

В последнем переходе использовано тождество $E(E(x)/m) = E(x/m)$. □

3.3. Замечания. Заключительную часть доказательства теоремы 3.2 можно слегка сократить, если использовать тождество из [9, теорема 3.11].

В доказательстве теоремы 3.2 использован явный вид ряда Эйзенштейна. Возможно, имеется и формула для суммы первых коэффициентов q-разложения f в предположении, что $f \in \mathcal{M}_1(N, \chi)$ и f собственна для алгебры Гекке. Ответ предполагается в терминах собственных чисел и нормировочного множителя.

Теорема 3.1 ведет к вопросу: лежат ли другие симметрические функции тэта-рядов в пространстве рядов Эйзенштейна. В своей курсовой работе мой студент Г. Струков показал, что это не так. Например, для $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ имеется два тэта-ряда, но их произведение не лежит в пространстве рядов Эйзенштейна.

Выше теорема 3.2 выведена из теоремы 3.1. Видимо, можно поступить и наоборот. Это может представлять интерес, так как 3.2 по форме больше похожа на теорему Римана–Роха, арифметическую версию которой мы ищем.

Список литературы

1. G. Eisenstein, *Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste.* — J. für die Reine und Angew. Math., **28** (1844), 246–248.
2. А. Л. Смирнов, *О точных формулах для числа целых точек.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **413** (2013), 173–182.

3. Д. А. Артюшин, А. Л. Смирнов, *Формула Эйзенштейна и соответствие Дирихле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **469** (2018), 7–31.
4. H. I. S. Orde, *On Dirichlet's Class Number Formula.* — J. of the London Math. Soc.(2), **18**, Part 3 (1978), 409–420.
5. B. Schoeneberg, *Elliptic Modular Functions*, Springer-Verlag, Grundl. Math. Wiss., vol. 203 (1974).
6. Э. Гекке, *Лекции по теории алгебраических чисел.* — (1940).
7. F. Diamond, J. Shurman, *A First Course In Modular Forms*, Graduate Texts in Mathematics, **228**, Springer (2005).
8. Дж. Милнор, Д. Хьюзмоллер, *Симметрические билинейные формы*, Наука (1986).
9. T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1976).

Smirnov A. L. Eisenstein's program and modular forms.

We give an identity for sum of the theta-series, related to an imaginary quadratic field. This sum is expressed in terms of a certain Eisenstein series. The obtained identity is used for a new proof of a formula, giving the exact number of integral points in a certain system of ellipses. Such formulas are interesting in view of relations to arithmetic Riemann–Roch theorems.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

Поступило 30 августа 2019 г.