Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 479, 2019 г.

А. Л. Смирнов

ВЕКТОРЫ ВИТТА И ПОЛЕ ИЗ ОДНОГО ЭЛЕМЕНТА

§1. Введение

С классическим кольцом связано кольцо векторов Витта. В этой заметке рассматривается задача распространения конструкции Витта на обобщенные кольца. При этом имеются в виду обобщенные кольца в смысле Н. Дурова (см. [1]).

Вопрос о назначении векторов Витта интересен, и ответ на него не очевиден. Одна из возможных точек зрения состоит в том, что спектр векторов Витта представляет собой нечто вроде гладкой малой окрестности спектра исходного кольца и, таким образом, позволяет изучать гомотопические свойства этого спектра дифференциальными методами. Так или иначе, конструкция Витта содержит много арифметики и интригующих фактов (см. [2]). Этим и объясняется наш интерес к поставленной задаче.

Для распространения конструкции Витта на обобщенные кольца используется подход Г. Олмквиста (см. [3]). Отметим, что другой подход к векторам Витта для некоторых обобщенных колец предложен А. Конном и К. Конзани (см. [4]). Они применили свой подход к полукольцам характеристики 1.

В §2 вычислено кольцо векторов Витта для поля из одного элемента, а в §3 получено описание проективных модулей над полем вычетов в архимедовой точке и проведено сравнение этого поля вычетов и полуколец характеристики 1.

§2. Векторы Витта для обобщенных колец

С коммутативным кольцом A связано кольцо больших векторов Витта $W(A)$. Мы собираемся распространить эту конструкцию на обобщенные кольца в смысле Дурова. Имеется несколько конструкций

Ключевые слова: вектор, Витт, поле из одного элемента, Дуров, динамическая система, характеристика один.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 19-01-00513) и при поддержке программы Президиума РАН “Новейшие методы математического моделирования в изучении нелинейных динамических систем” (целевая субсидия 08-04).

векторов Витта. Для переноса на случай обобщенных колец удобно использовать конструкцию Олмквиста (см. [3]). Эта конструкция состоит из двух этапов, второй из которых связан с пополнением результата первого этапа. Мы собираемся начать изучение именно с первого этапа конструкции Олмквиста. Ее результат мы и будем обзначать $W(A)$. Классическое же кольцо векторов Витта будем обозначать $\widehat{W}(A)$.

2.1. $\widehat{W}(A)$ для классического кольца A. С кольцом A связано кольцо векторов Витта

$$\widehat{W}(A) = \{x = (x_1, x_2, \dots)|x_i \in A\},$$

где x_i называются реальными компонентами x. Сложение и умножение в $\widehat{W}(A)$ заданы сложными полиномами. Они восстанавливаются с помощью призрачных координат $w_1 = x_1$, $w_2 = 2x_2 + x_1^2$, ..., которые складываются и умножаются покомпонентно. В общем случае

$$w_n = \sum_{d|n} dx_d^{n/d}.$$

Связь между конструкцией Олмквиста и $\widehat{W}(A)$ удобно описывать с помощью другой хорошо известной конструкции $\widehat{W}(A)$. А именно, рассмотрим множество

$$\widehat{\Lambda}_t(A) = 1 + tA[[t]],$$

где t переменная. Отображение “экспоненты” $E : \widehat{W}(A) \to \widehat{\Lambda}_t(A)$ задано формулой

$$E(x) = \prod \frac{1}{1 - x_n t^n}. \tag{1}$$

В множестве $\widehat{\Lambda}_t(A)$ рассматривается структура группы, где сложение совпадает с умножением в кольце $A[[t]]$. Пусть

$\Lambda_t(A)$ – подгруппа $\widehat{\Lambda}_t(A)$, порожденная полиномами.

Кроме того (см. [2, (9.16), с. 351]), в $\widehat{\Lambda}_t(A)$ имеется умножение

$$f * g = \prod (1 - \xi_i \eta_j)^{-1},$$

где $f = \prod(1 - \xi_i)^{-1}$, $g = \prod(1 - \eta_j)^{-1}$. Известно, что “экспонента” E – изоморфизм колец и, таким образом, $\widehat{\Lambda}_t(A)$ дает другое описание $\widehat{W}(A)$.

2.1.1. Конструкция Олмквиста. Пусть A-Mod – категории A-модулей, $\mathcal{P}A$ – полная подкатегория A-Mod, состоящая из всех конечнопорожденных проективных A-модулей, а $\mathcal{E}\mathcal{P}A$ – категория эндоморфизмов для категории $\mathcal{P}A$. Таким образом, объекты $\mathcal{E}\mathcal{P}A$ – пары (P, f), где f – эндоморфизм конечнопорожденного проективного A-модуля P. Морфизмы $\mathcal{E}\mathcal{P}A$ – просто гомоморфизмы стрелок.

На каждой из категорий $\mathcal{P}A$ и $\mathcal{E}\mathcal{P}A$ имеется структура точной категории, причем класс коротких точных последовательностей в $\mathcal{P}A$ и $\mathcal{E}\mathcal{P}A$ индуцируется из категории A-Mod с помощью тавтологического вложения $\mathcal{P}A \subset A$-Mod и забывающего функтора

$$\mathcal{E}\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A, \qquad (P, f) \mapsto P.$$

Таким образом, определена группа

$$W(A) = K_0(\mathcal{E}\mathcal{P}A)/K_0(\mathcal{P}A), \tag{2}$$

где $K_0(\mathcal{P}A)$ отображается в $K_0(\mathcal{E}\mathcal{P}A)$ с помощью стрелки

$$\nu : [P] \mapsto [(P, 0)]. \tag{3}$$

Отображение $K_0(\mathcal{E}\mathcal{P}A) \to \Lambda_t(A)$, $[P, f] \mapsto \det(1 - tf)^{-1}$ индуцирует отображение

$$L : \widehat{W}(A) \to \widehat{\Lambda}_t(A).$$

Теорема Олмквиста говорит, что L – изоморфизм колец.

Конструкция Олмквиста хороша тем, что она очень естественна и легко применима в более общей ситуации. Мы применим ее к категории A-модулей над обобщенным кольцом (см. [1]) и, в частности, над полем из одного элемента.

2.1.2. Операции на векторах Витта. На $\mathcal{E}\mathcal{P}A$ имеется тензорная структура $(P, f) \otimes (Q, g) = (P \otimes Q, f \otimes g)$. Образ $K_0(\mathcal{P}A)$ в $K_0(\mathcal{E}\mathcal{P}A)$ (см. (3)) является идеалом и, таким образом, на $W(A)$ индуцируется структура кольца. Для $n \in \{0, 1, \dots\}$ функторы $[n], F_n, V_n : \mathcal{E}\mathcal{P}A \to \mathcal{E}\mathcal{P}A$ определены следующим образом.

$$[n] : (P, f) \mapsto (P \oplus \dots \oplus P, f \oplus \dots \oplus f),$$

где имеется в виду n-кратная сумма.

$$F_n : (P, f) \mapsto (P, f^n),$$

$$V_n : (P, f) \mapsto (P[t]/(t^n - f), t).$$

Отметим, что F_n – тензорный аддитивный функтор, а V_n – аддитивный, но не тензорный. Кроме того, имеется изоморфизм функторов

$$[n] \to F_n V_n, (P \oplus \cdots \oplus P, f \oplus \cdots \oplus f)(p_1, \ldots, p_n) \mapsto \left(\sum_{i=0}^{n-1} Pt^i, t \right).$$

Так как F_n – возведение в n-тую степень, то можно сказать, что V_n представляет собой корень n-той степени из эндоморфизма $[n](f)$. Такой корень определен неоднозначно, но несложно аккуратно сформулировать и доказать утверждение о том, что все функториальные инкарнации извлечения корня изоморфны.

Функторы F_n и V_n индуцируют стрелки $\mathrm{frob}_n, \mathrm{ver}_n : W(A) \to W(A)$. При этом frob_n – гомоморфизм колец, а ver_n, вообще говоря, только гомоморфизм групп. Известно (см. [2, 17.28, с. 432]), что

$$\mathrm{frob}_n \circ \mathrm{ver}_n = \mathrm{ver}_n \circ \mathrm{frob}_n = n.$$

Кроме того, frob_m и ver_n коммутируют для взаимнопростых m и n (см. [2, 13, с. 382]).

2.2. $W(A)$ **для обобщенного кольца** A**.** Мы намерены определить векторы Витта для коммутативного обобщенного кольца A, используя подход Олмквиста (см. 2.1.1). Для этого (см. (4)) нужны категории $\mathcal{P}A$ и $\mathcal{E}\,\mathcal{P}A$, K_0 для этих категорий и стрелка $\nu : K_0(\mathcal{P}A) \to K_0(\mathcal{E}\,\mathcal{P}A)$ (см. (3)).

Для обобщенного кольца A категория A-Mod обычно не аддитивна. Некоторые из известных подходов к построению K-теории работают и в неаддитивном случае. Например, это так для S-конструкции Вальдхаузена (см. [5]). Эта конструкция применима к категории $\mathcal{C}$ с некоторыми дополнительными структурами и свойствами. В частности, S-конструкция требует некоторых рудиментов аддитивности категории $\mathcal{C}$. А именно, категория $\mathcal{C}$, помимо прочего, должна быть пунктирована (начальный и финальный объекты должны совпадать). Это означает, что для использования этой конструкции мы должны ограничиться обобщенными кольцами с нулем. Итак, предположим, что

A – обобщенное коммутативное кольцо с нулем.

В этом случае определение категорий $\mathcal{P}A$ и $\mathcal{E}\,\mathcal{P}A$ дословно переносится из классического случая (см. 2.1.1). При этом, однако, нужно фиксировать понятие проективности. Есть по меньшей мере три разных версии. В одной из них (см. [6, V, 4]) для проективности объекта P

требуется сохранение эпиморфизмов функтором $\mathrm{Hom}(P, *)$. В другой (см. [7, §4]) это требование накладывается только на эффективные эпиморфизмы. Еще одна версия предполагает точность $\mathrm{Hom}(P, *)$ справа, то есть сохранение этим функтором конечных копределов. Наш выбор в данной работе совпадает с определением из [7, §4] (см. также [1, 4.6.23]).

Итак, при использовании исходной конструкции Вальдхаузена на этом пути мы потенциально можем определить $K_0(\mathcal{P}\mathbb{F}_1)$, но не можем определить $K_0(\mathcal{P}\mathbb{F}_0)$. Для определения $K_0(\mathcal{P}\mathbb{F}_0)$ можно использовать более сложную конструкцию Дурова [1, 10.3]. Связь этих конструкций обсуждается в [1, 10.3.31].

2.2.1. Конструкция Вальдхаузена для $K_0(\mathcal{P}A)$ и $K_0(\mathcal{E}\mathcal{P}A)$. Для применения S-конструкции к пунктированной категории $\mathcal{C}$ должны быть выделены два класса стрелок: класс корасслоений $\mathrm{CoF}(\mathcal{C})$ и класс слабых эквивалентностей $\mathrm{WE}(\mathcal{C})$. В качестве $\mathrm{CoF}(\mathcal{P}A)$ возьмем допустимые вложения $u : X \to Y$, то есть такие вложения, что Y/X – проективный объект в A-Mod. В качестве $\mathrm{WE}(\mathcal{P}A)$ возьмем все изоморфизмы. Стрелку категории $\mathcal{E}\mathcal{P}A$ объявим корасслоением (слабой эквивалентностью), если функтор забывания эндоморфизма приводит к корасслоению (слабой эквивалентности) в $\mathcal{P}A$.

Проверку аксиомы категории Вальдхаузена (см. [5] и [1, 10.3.31]) мы приводить не будем. Отметим только, что в категории $\mathcal{E}\mathcal{P}A$ объекты, вообще говоря, не являются проективными объектами в этой категории.

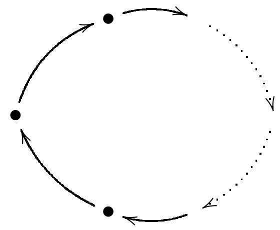
Наконец, необходимая стрелка $\nu : K_0(\mathcal{P}A) \to K_0(\mathcal{E}\mathcal{P}A)$ (см. (3)) строится так же, как и в классическом случае: $[P] \mapsto [(P, 0)]$.

$$W(A) = K_0(\mathcal{E}\mathcal{P}A)/K_0(\mathcal{P}A). \tag{4}$$

Таким образом, группа $W(A)$ определена и для обобщенного A. Заметим также, что операции умножения, frob_n и ver_n, определены в обобщенном случае теми же формулами, что и в классическом случае (см. 2.1.2).

2.3. $W(\mathbb{F}_1)$ и динамические системы. Объекты категории $\mathcal{E}\mathcal{P}\mathbb{F}_1$ – конечные (не обязательно обратимые) пунктированные динамические системы. Такие системы удобно изображать с помощью ориентированных графов, где из каждой вершины выходит ровно одна стрелка. При этом удобно не изображать на рисунке выделенную неподвижную точку, а стрелки, ведущие в нее, рисовать как ведущие в никуда. Для $n \geqslant 1$ нам потребуется динамическая система

$Z_n :$



представляющая собой цикл длины n. В частности, для $n = 1$ получаем систему из одной невыделенной неподвижной точки. При этом есть и выделенная неподвижная точка, не отраженная на рисунке. Кроме того, нам потребуется динамическая система

$$T : \quad \bullet \to .$$

2.3.1. Теорема. *Верны следующие утверждения:*

1. $K_0(\mathcal{E}\mathcal{P}\mathbb{F}_1)$ *– свободная абелева группа, порожденная элементами* $[T]$, $[Z_1]$, $[Z_2]$, $[Z_3]$, *.... При этом*

$$\mathrm{frob}_n[T] = [T], \ \mathrm{ver}_n[T] = n[T], \ [T]^2 = [T], \ [T][Z_m] = m[T],$$

$$[Z_m][Z_n] = d[Z_l], \quad \textit{где} \ \ d = \mathrm{GCD}(m,n), \ \ l = \mathrm{LCM}(m,n),$$

$$\mathrm{frob}_n[Z_m] = \frac{m}{d}[Z_d], \quad \mathrm{ver}_n[Z_m] = [Z_{mn}], \ \textit{где} \ \ d = \mathrm{GCD}(m,n).$$

   $K_0(\mathcal{P}\mathbb{F}_1)$ *– свободная абелева группа, порожденная элементом* $[S]$, *где* S *– пунктированное множество* $(\{0,1\},0)$, $\nu[S] = [T]$, *где* $\nu : K_0(\mathcal{P}\mathbb{F}_1) \to K_0(\mathcal{E}\mathcal{P}\mathbb{F}_1)$ *– стрелка* (3) *из определения векторов Витта.*
2. $W(\mathbb{F}_1)$ *– свободная абелева группа, порожденная элементами* z_1, z_2, *...,* *где* z_i *– образ* $[Z_i]$ *при структурной проекции из определения векторов Витта. При этом произведение базисных элементов, действие операторов* frob_n *и* ver_n *вычисляется в точности по формулам из предыдущего пункта для соответствующих элементов* $[Z_i]$.

Набросок доказательства. Достаточно вычислить базис. Остальные утверждения теоремы проверяются прямым вычислением. То, что класс в $K_0(\mathcal{E}\mathcal{P}\mathbb{F}_1)$ динамической системы D можно выразить в виде линейной комбинации $[T]$ и $[Z_i]$, доказывается индукцией по числу вершин. А именно, если D не изоморфно прямой сумме циклов, то найдется вершина a, в которую нет стрелок. Тогда $[D] = [D_1] + [T]$, где система D_1 получена из D выкидыванием вершины a и ведущей из нее стрелки. Это вытекает из того, что $D_1 \subset D$ – корасслоение и $D/D_1 = T$. Для доказательства независимости образующих можно определить отображение $K_0(\mathcal{E}\mathcal{P}\mathbb{F}_1) \to \mathbb{Z}$. Например, чтобы выделить коэффициент при $[T]$, положим

$$a_T(X, f) = \text{ число невозвратных вершин } (X, f).$$

Чтобы выделить коэффициент при $[Z_n]$, положим

$$a_n(X, f) = \text{ число неподвижных ненулевых вершин } f^n.$$

Осталось проверить, что эти инварианты выдерживают соотношения для K_0. Это можно сделать благодаря полной классификации конечных динамических систем и стрелок между ними. □

2.3.2. Ожерелья. Интересный математический сюжет связан с подсчетом классов эквивалентности крашеных ожерелий (см. [2, §17]). Этот сюжет связан с векторами Витта полей $\mathbb{F}_{1^n}$ следующим образом. Предположим, что рассматриваются ожерелья, раскрашенные в цвета из множества C, причем $\mathrm{card}(C) = c$. Будем считать, что $C = \{z \in \mathbb{C}\,|z^c = 1\}$. Ожерелью сопоставим пару (P, f), где P свободный $\mathbb{F}_{1^c}$-модуль, а f – эндоморфизм P. В качестве P возьмем свободный модуль, порожденный компонентами связности пространства $S - B$, где B – множество бусинок ожерелья, а S – ориентированная нитка, на которую нанизаны бусинки. В качестве f рассмотрим эндоморфизм, переводящий базисный элемент e в $\varepsilon e'$. Здесь e' соответствует компоненте связности, следующей за компонентой связности e. При этом ε – цвет бусинки, разделяющей e и e'.

Заметим, что $z^2 = -1$ для $z = z_2 - 1$. Кроме того, $z = z^2 - 2$ для $z = z_3 - 1$. Точно такое же соотношение появлялось в [8]. А именно, в этой работе рассматриваются неподвижные точки итераций отображения

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto z^2 - 2.$$

Отметим также, что в [9] рассмотрена динамическая система из ожерелий. Было бы интересно понять ее место с точки зрения векторов Витта.

§3. На пути к векторам Витта для архимедовых точек

Здесь получено описание проективных модулей для обобщенного кольца $\mathbb{F}_a$. Это кольцо представляет собой поле вычетов в архимедовой точке полукольца неотрицательных рациональных чисел. Проведено сравнение $\mathbb{F}_a$ и полуколец характеристики 1 [4]. Обсуждаются возможности восстановления кольца целых вещественных чисел по его полю вычетов.

3.1. $\mathbb{F}_a$ и проективные модули над ним. В [1, 4.8.13] описано обобщенное кольцо, представляющее собой поле вычетов в архимедовой точке $\mathbb{Q}$. Нас интересует обобщенное кольцо $\mathbb{F}_a$, играющее роль поля вычетов в архимедовой точке $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ [10, 3.2]. Кольцо $\mathbb{F}_a$ порождено над $\mathbb{F}_1$ одной 2-операцией $\vee$ с соотношениями

$$x \vee x = x, \quad x \vee y = y \vee x, \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \quad 0 \vee x = 0. \quad (5)$$

3.1.1. Модули над $\mathbb{F}_a$. Категория $\mathbb{F}_a$-модулей эквивалентна категории частично упорядоченных множеств с точной верхней границей каждых двух элементов $(x, y) \mapsto x \vee y$ и с наибольшим элементом 0, где морфизмы – отображения, переводящие 0 в 0 и коммутирующие с $\vee$. Отметим, что обозначение константы нулем соответствует духу теории обобщенных колец, но противоречит обозначениям теории решеток, где максимальный элемент по отношению к операции $\vee$ следует обозначить 1.

Мы намерены получить критерий проективности конечно порожденного $\mathbb{F}_a$-модуля X (см. 3.1.2). Для этого нужно ввести некоторые понятия. Отметим, что конечно порожденность X равносильна конечности X как множества. Пусть $V, W \subset X$. Говорим, что W доминирует над V, если для всякой вершины $v \in V$ найдется $w \in W$, для которой $v \leqslant w$. Пусть $x \in X$. Назовем элемент x примитивным, если его нельзя представить в виде $x = v \vee w$, где $v < x$ и $w < x$. Положим

$$V(x) = \{v \in X | v < x\}, \qquad P(x) = \{v \in V(x) | v - \text{примитивен}\}.$$

Говорим, что

$$V \text{ достаточно для } x, \text{ если } V \subset V(x) \text{ и } V \text{ доминирует над } P(x). \quad (6)$$

Положим

$$v(x) = \min \operatorname{card}(V),$$

где V пробегает достаточные для x подмножества X.

3.1.2. Теорема. *Конечно порожденный $\mathbb{F}_a$-модуль X проективен тогда и только тогда, когда 0 примитивный элемент X и $v(x) \leqslant 2$ для каждого $x \in X$.*

Эта теорема доказана ниже. Сначала переформулируем теорему на языке графов и поясним несколькими примерами.

Удобно изображать $\mathbb{F}_a$-модуль X с помощью ориентированного графа $\Gamma(X)$. Вершины $\Gamma(X)$ соответствуют элементам X. Для $x, y \in X$ имеется не более одного ребра из x в y. Ориентированное ребро из x в y рисуем тогда и только тогда, когда $x > y$ и не существует $t \in X$, для которого $x > t > y$. Нулевую вершину обозначаем 0, а остальные либо именем, либо заполненным кружком. Вот, например, графы свободных модулей ранга один и два:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] \\ \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ x_1 & x_1 \vee x_2 \arrow[l] \arrow[r] & x_2. \end{tikzcd}$$

Отметим, что вершина x примитивна тогда и только тогда, когда из x выходит не более одного ребра. Кроме того, пусть $E(x)$ множество всех ребер, выходящих из x, $E \subset E(x)$. Говорим, что E достаточно для x, если из x можно добраться до каждой примитивной вершины $\Gamma(x)$, выйдя из x по ребрам из E. Положим

$$e(x) = \min \operatorname{card}(E),$$

где E пробегает достаточные для x подмножества $E(x)$. Покажем, что

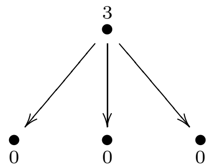
$$v(x) = e(x). \tag{7}$$

Неравенство $v(x) \leqslant e(x)$ вытекает из того, что множество концов ребер из достаточного E – достаточное для x множество вершин. Чтобы проверить обратное неравенство, рассмотрим множества $V, W \subset V(x)$. Если W доминирует над V и V достаточно для x, то и W достаточно для x. Поэтому любое V доминируется множеством концов некоторого E. Отсюда вытекает неравенство $v(x) \geqslant e(x)$ и равенство (7).

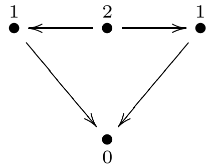
Таким образом, теорема 3.1.2 допускает следующую переформулировку.

3.1.3. Теорема. *Конечно порожденный $\mathbb{F}_a$-модуль X проективен тогда и только тогда, когда из нулевой вершины графа $\Gamma(X)$ выходит не более одного ребра и $e(x) \leqslant 2$ для каждой ненулевой вершины x.*

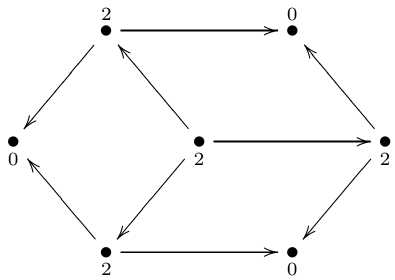
3.1.4. Примеры. На графах рядом с каждой вершиной указано значение ее e-инварианта. Кроме того, в следующих примерах будем рассматривать модули, для которых из нуля выходит ровно одно ребро. Поэтому нулевую вершину и выходящее из нее ребро не будем отражать на рисунке. Модуль



не проективен. Модули $\overset{1}{\bullet} \to \overset{1}{\bullet} \to \overset{0}{\bullet}$ и



проективны. Пример свободного модуля ранга три



показывает, что в определении достаточного набора ребер (см. (6)) нельзя заменить множество примитивных вершин $P(x)$ на множество всех вершин $V(x)$.

3.1.5. Доказательство теоремы 3.1.2. Рассмотрим эпиморфизм

$$p : F \to X, \qquad p : g_x \mapsto x,$$

где F – свободный модуль с образующими g_x, а x пробегает множество ненулевых элементов X. Модуль X проективен тогда и только тогда, когда p имеет сечение s. Существование s – прямое следствие определения проективности. Наоборот, если s существует, то X – ретракт свободного модуля и, таким образом, проективен.

Проверим необходимость условий проективности. Пусть X проективен. Тогда существует сечение s и необходимость примитивности нуля вытекает из того, что в свободном модуле $\vee$-комбинация ненулевых элементов не может быть нулем: если $0 = u \vee v$, то $0 = s(u) \vee s(v)$. Поэтому либо $s(u) = 0$, либо $s(v) = 0$. Но тогда либо $u = ps(u) = 0$, либо $v = ps(v) = 0$.

Пусть $x \in X$, $x \neq 0$ и $v(x) \geqslant 3$. Покажем, что предположение о существовании сечения s ведет к противоречию. Пусть V – достаточное для x множество вершин, причем V – минимальное по числу элементов такое множество. По предположению, найдутся три различные вершины $u, v, w \in V$. Можно считать (см. рассуждение перед теоремой 3.1.3), что u, v и w – концы ребер, выходящих из x. Тогда $x = u \vee v = u \vee w$. Поэтому

$$s(u) \vee s(v) = s(u) \vee s(w). \tag{8}$$

В силу минимальности $e(x)$ найдется примитивный элемент $z \in \Gamma(x)$, для которого не верно, что $z \leqslant u$, и не верно, что $z \leqslant v$, но верно, что $z \leqslant w$. Из первых двух утверждений вытекает, что g_z не входит в $s(u)$ и не входит в $s(v)$. Из примитивности z и неравенства $z \leqslant w$ вытекает, что g_z входит в $s(w)$. Таким образом, g_z не входит в левую часть (8), но входит в правую. Поэтому предположение о существовании s не верно и проверка необходимости условий проективности завершена.

Проверим достаточность условий проективности. Положим

$$s(x) = \bigvee g_y \qquad (y \text{ пробегает прим. элементы } \leqslant x). \tag{9}$$

Проверим, что s – сечение p. Действительно,

$$ps(x) = p\left(\bigvee g_y\right) = \bigvee p(g_y) = \bigvee g_y = x.$$

Последнее равенство – следствие того, что в конечнопорожденном случае всякий элемент – $\vee$-комбинация примитивных.

Проверим теперь, что s – морфизм модулей. Так как по условию 0 примитивен, то $s(0) = 0$. Пусть

$$x = u \vee v.$$

Надо проверить, что $s(x) = s(u) \vee s(v)$. Из определения s ясно, что $s(x) \geqslant s(u) \vee s(v)$. Поэтому достаточно проверить, что

$$s(x) \leqslant s(u) \vee s(v). \tag{10}$$

Если x – примитивный элемент, то либо $u = x$, либо $v = x$. В этом случае (10) очевидно. Считаем, что элемент x не примитивен. Вместе с условием $e(x) \leqslant 2$ это дает $e(x) = 2$.

Пусть y_1, y_2 – два разных примитивных элемента, каждый из которых меньше x и таких, что для всякого $z < x$ либо $z \leqslant y_1$, либо через $z \leqslant y_2$. Не может быть так, что $u \leqslant y_1$ и $v \leqslant y_1$, так как в этом случае $x = u \vee v \leqslant y_1$. Поэтому можно считать, что $u \leqslant y_1$ и $v \leqslant y_2$.

Пусть y – примитивный элемент, $y < x$. Тогда либо $y \leqslant y_1$, либо $y \leqslant y_2$. Поэтому либо $s(y) \leqslant s(y_1)$ либо $s(y) \leqslant s(y_2)$. Следовательно, $s(y) \leqslant s(y_1) \vee s(y_2)$. Таким образом, верно неравенство (10), так как это верно для всех $\vee$-компонент $s(x)$ (см. (9)). Теорема 3.1.2 доказана.

3.2. $\mathbb{F}_a$ и характеристика 1. В [4] введены векторы Витта для некоторых полуколец характеристики 1. Полукольцо R отнесено в [4, определение 2.7] к характеристике 1, если в R верно соотношение

$$x + x = x. \tag{11}$$

В частности, в [4, перед определением 2.7] рассмотрено инициальное полукольцо характеристики 1, а именно полукольцо $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, где $1 + 1 = 1$, а умножение обычное. В обобщенном коьце $\mathbb{F}_a$ (см. 3.1) выполнено соотношение

$$x \vee x = x, \tag{12}$$

похожее на (11). Однако $\mathbb{B}$ и $\mathbb{F}_a$ играют совершенно разные роли, несмотря на их внешнее сходство. Для сравнения полукольца $\mathbb{B}$ с обобщенным кольцом $\mathbb{F}_a$ заметим, что полукольца представляют собой частный случай обобщенных колец. При этом полукольцу R сопоставлено [1, 4.8.6] обобщенное кольцо по правилу $R(n) = R^n$.

Покажем, что обобщенные кольца $\mathbb{B}$ и $\mathbb{F}_a$ не изоморфны. Для этого заметим, что операция $(x, y) \mapsto x+y$ в $\mathbb{B}$ является сложением в смысле понятия сложения из [1, 4.8.2]. Понятие сложения требует выделенности некоторой константы, называемой нулем. Так как в $\mathbb{B}$ имеется ровно одна константа, а именно $0 \in \mathbb{B}(0) = \{0\}$, то операции сложения определены корректно. По этой же причине корректно определены и сложения в $\mathbb{F}_a$. Однако среди бинарных операций $\mathbb{F}_a$ нет ни одного сложения.

Полукольцо $\mathbb{B}$ является фактором полукольца $\mathbb{N}_0$ и, видимо, не имеет прямого отношения к архимедову нормированию $\mathbb{Q}$. Наоборот, $\mathbb{F}_a$ является фактором обобщенного кольца целых положительных вещественных чисел и играет роль поля вычетов в архимедовой точке компактификации $\operatorname{Spec}\mathbb{N}_0$. В самом деле, рассмотрим в $\mathbb{R}$ обобщенное подкольцо $\mathbb{P}$, где $\mathbb{P}(n) = \{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)|\lambda_i \geqslant 0\}$, и обобщенное кольцо $\mathcal{O}_\mathbb{P} \subset \mathbb{P}$, где $\mathcal{O}_\mathbb{P}(n) = \{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)|\sum\lambda_i \leqslant 1\}$. Существует, причем единственный, гомоморфизм $\pi : \mathcal{O}_\mathbb{P} \to \mathbb{F}_a$, для которого $\pi(\lambda_1) = 0$, если $\lambda_1 < 1$, $\pi(\lambda_1) = 1$, если $\lambda_1 = 1$ и

$$\pi(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \begin{cases} \pi(x), & \text{если } \lambda_1 = 1,\\ \pi(y), & \text{если } \lambda_2 = 1,\\ x \vee y, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Таким образом, операцию $x \vee y$ стоит рассматривать как выпуклую комбинацию, а не как сложение. Для выпуклой комбинации тождество $x \vee x = x$ естественно и нет смысла интерпретировать его как принадлежность к характеристике 1.

Отметим, что для некоторых полуколец характеристики 1 в [4, с. 18] введены векторы Витта. Видимо, использованный там подход дает иные результаты, чем использованный выше подход Олмквиста.

3.3. Восстановление $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ по $W(\mathbb{F}_{a^2})$. Конструкция Витта восстанавливает $\mathbb{Z}_p$ по полю вычетов $\mathbb{F}_p$. Можно ли ожидать чего-нибудь подобного в архимедовой точке? Рассмотрим композицию

$$W(\mathbb{F}_p) \to W_{p^\infty}(\mathbb{F}_p) \to \widehat{W}_{p^\infty}(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p,$$

где каноническая проекция $W \to W_{p^\infty}$ указана в [2, §14]. Хотелось бы иметь аналогичные стрелки $W(\mathbb{F}_a) \to \mathcal{O}_\mathbb{P}$ и $W(\mathbb{F}_{a^2}) \to \mathcal{O}_\mathbb{R}$, где $\mathbb{F}_{a^2}$ – поле вычетов обобщенного кольца целых вещественных чисел $\mathcal{O}_\mathbb{R}$. Поле $\mathbb{F}_{a^2}$ введено в [1] под иным обозначением. Однако подход Олмквиста всегда приводит к классическому кольцу, так как таков функтор K_0. Во избежание этого в нелинейном контексте можно попробовать заменить K_0 другим инвариантом. Например, можно сопоставить категории множество классов изоморфизма ее объектов и принять во внимание какие-либо категорные операции. Изучение возможностей такого рода выходит за рамки данной заметки.

Список литературы

1. N. Durov, *New Approach to Arakelov Geometry.* `arXiv: 0704.2030 v1 [math AG] 16` Apr. (2007).
2. M. Hazewinkel, *Witt vectors*, Part 1, Handbook of Algebra, vol. 6, Elsevier B. V., (2009).
3. G. Almkvist, *The Grothendieck Ring Of the Category of Endomorphisms.* — J. Alg., **28** (1974), 375–388.
4. A. Connes, C. Consani, Characteristic 1, Entropy, and the Absolute Point, `arXiv: 0911.3537 v1` (2009).
5. F. Waldhausen, *Algebraic K-Theory of spaces.* — Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1126 (1985), 318–419.
6. S. Maclane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer (1971).
7. D. Quillen, *Homotopical Algebra.* — Lecture Notes in Mathematics, Vol. 43 (1967).
8. K. M. Brucks, *MSS sequences, colorings of necklaces, and periodic points of* $f(z) = z^2 - 2$. — Adv. applied Math. **8** (1987), 434–445.
9. М. Кац, *Несколько вероятностных задач физики и математики*, Мир (1968).
10. А. Л. Смирнов, *Обобщенные подкольца арифметических колец.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **349** (2007), 211–241.

Smirnov A. L. Witt vectors and the field with one element.

Witt vectors for Durov's generalized rings are constructed. The ring of Witt vectors for the field with one element is calculated. A criterion for the projectivity of modules over the residue field at archimedian point is given. This residue field is compared with the semiring of characteristic 1 in a construction of Connes and Consani.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `smirnov@pdmi.ras.ru`

Поступило 30 августа 2019 г.