

В. Г. Журавлев

ЛОКАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ РАЗБИЕНИЙ ДВУМЕРНОГО ТОРА

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Производные торические разбиения. Пусть задан сдвиг $S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^2}$ тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^2$ и перекладывающаяся развертка $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2$ тора $\mathbf{T} \subset \mathbb{T}^2$, состоящая из трех параллелограммов T_0, T_1, T_2 . Исходя из некоторой развертки тора T , в [16] были определены ее $[\xi]_n$ -производные развертки

$$T^{[\xi]_n} = T_0^{[\xi]_n} \sqcup T_1^{[\xi]_n} \sqcup T_2^{[\xi]_n} \quad (0.1)$$

другого тора $\mathbf{T}^{[\xi]_n} \subset \mathbb{T}^2$, также состоящие из трех перекладывающихся параллелограммов $T_0^{[\xi]_n}, T_1^{[\xi]_n}, T_2^{[\xi]_n}$. Одно из свойств разверток (0.1) состоит в том, что они порождают производные разбиения

$$\mathcal{T}^{[\xi]_n} = \mathcal{T}_0^{[\xi]_n} \sqcup \mathcal{T}_1^{[\xi]_n} \sqcup \mathcal{T}_2^{[\xi]_n} \quad (0.2)$$

объемлющего тора \mathbb{T}^2 , где каждое из множеств $\mathcal{T}_k^{[\xi]_n}$ образуется S_α -трансляциями соответствующего параллелограмма $T_k^{[\xi]_n}$ из разбиения (0.1). По этой причине производные развертки тора $T^{[\xi]_n} = \text{Gr}(\mathcal{T})$ называют ядрами разбиений тора $\mathcal{T}^{[\xi]_n}$.

0.2. Локальные правила. Настоящая цель – получить локальное описание производных разбиений $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{[\xi]_n}$. Обозначим через $\text{Orb}(0, \mathbf{m})$ орбиту начальной точки $x_0 = 0$ на торе \mathbb{T}^2 , порождаемую сдвигом S_α и образуемую из точек $x_i = S^i(0) \equiv i\alpha \pmod{\mathbb{Z}^2}$ для $i = 0, 1, \dots, \mathbf{m} - 1$, где \mathbf{m} – общее количество многоугольников разбиения (0.2). Локальное описание или *локальные правила LR* состоят в том, чтобы по порядку i точки $x_i \in \text{Orb}(0, \mathbf{m})$ определить многоугольную звезду $\text{St}(i)$ с центром в данной точке – множество всех многоугольников P из производного разбиения \mathcal{T} , имеющих общую точку x_i . Звезду $\text{St}(i)$ еще иначе называют *локальным окружением* точки x_i .

Ключевые слова: производные разбиения тора, классификация многоугольных звезд, локальные правила.

Локальные правила LR позволяют строить глобальное разбиение \mathcal{T} тора \mathbb{T}^2 , начиная с любой точки орбиты $\text{Orb}(0, \mathbf{m})$, например, с $x_0 = 0$ путем присоединения к ней всех инцидентных многоугольников $P \ni x_0$ из разбиения \mathcal{T} . Затем повторяем тот же процесс для вершин многоугольников P и т.д.

0.3. Классификация типов многоугольных звезд. В теореме 5.1 доказана следующая формула

$$\text{St}(\mathcal{T}, i) = \text{St}_{\mathcal{T}}(i), \quad (0.3)$$

где $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ – многоугольная звезда производного разбиения \mathcal{T} с центром в точке x_i , а $\text{St}_{\mathcal{T}}(i)$ – звезда из некоторого конечного явно определенного списка звезд. Для невырожденных разбиений \mathcal{T} указанный список содержит 7 различных типов звезд. Кроме того, в теореме 5.1 приведена формула для количества звезд $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ в разбиении \mathcal{T} , принадлежащих данному типу. Две многоугольные звезды $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ и $\text{St}(\mathcal{T}, i')$ из множества звезд $\text{St}(\mathcal{T})$ разбиения \mathcal{T} считаются эквивалентными $\text{St}(\mathcal{T}, i) \sim \text{St}(\mathcal{T}, i')$, если одну из них можно перевести в другую некоторой трансляцией тора \mathbb{T}^2 .

Приведенная формула (0.3) содержит в себе локальные правила LR и позволяет классифицировать типы многоугольных звезд производных разбиений \mathcal{T} .

0.4. Короны и типы звезд. Обозначим через \mathbf{Cr} множество, состоящее из ядра $\text{Kг}(\mathcal{T})$ производного разбиения (0.2) и соседних с ним многоугольников P из разбиения \mathcal{T} . При этом учитываются многоугольники P как с общей стороной, так и с общей вершиной с ядром $\text{Kг}(\mathcal{T})$. Множество \mathbf{Cr} называется короной ядра $\text{Kг}(\mathcal{T})$.

В теореме 6.1 доказано, что среди звезд $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ разбиения \mathcal{T} с внутренними вершинами короны \mathbf{Cr} содержатся все типы многоугольных звезд из $\text{St}^{\sim}(\mathcal{T})$ – множества классов эквивалентных звезд; при этом имеет место следующая формула

$$t_{\text{St}}(\mathcal{T}) = 7 - \tau$$

для количества различных типов $t_{\text{St}}(\mathcal{T}) = \sharp \text{St}^{\sim}(\mathcal{T})$ многоугольных звезд из $\text{St}^{\sim}(\mathcal{T})$. Здесь τ – степень вырождения производного разбиения \mathcal{T} .

Вырождение $\tau > 0$ возможно только при условии, когда разбиение \mathcal{T} содержит небольшое количество \mathbf{m} многоугольников $P \subset \mathcal{T}$. В

общем случае производное разбиение \mathcal{T} невырождено $\tau = 0$ и, следовательно, имеет максимально возможное число типов звезд $t_{\text{St}}(\mathcal{T}) = 7$.

0.5. Принцип максимума. Из теоремы 5.1 вытекает *принцип максимума*, который можно сформулировать следующим образом: в производном разбиении \mathcal{T} тора \mathbb{T}^2 из любой точки x_i орбиты $\text{Orb}(0, \mathbf{m})$ выходит максимальное число допустимых в данной точке лучей \mathbf{w} из множества всех возможных лучей $\mathbf{V} = \{\pm \mathbf{v}_0, \pm \mathbf{v}_1, \pm \mathbf{v}_2\}$. Здесь через $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ обозначены векторы перекладывания ядра $\text{Kг}(\mathcal{T})$ производного разбиения (0.2). Луч $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ считается допустимым в точке x_i , если сдвинутая точка $x_i + \mathbf{w}$ снова принадлежит орбите $\text{Orb}(0, \mathbf{m})$. Выходящие из точки x_i лучи $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ – это направляющие сторон многоугольников P звезды $\text{St}(\mathcal{T}, i)$. Знание лучей \mathbf{w} позволяет построить и искомую звезду $\text{St}(\mathcal{T}, i)$.

На принципе максимума основан *LLG*-алгоритм (layer-by-layer growth), приведенный в п. 7.2, – это алгоритм послойного роста производного разбиения \mathcal{T} . Исходными данными *LLG*-алгоритма являются: 1) векторы перекладывания $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ядра $\text{Kг}(\mathcal{T})$; и 2) их порядки $\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 = 1, 2, 3, \dots$, определяемые из сравнений $\mathbf{v}_k \equiv \mathbf{m}_k \alpha \pmod{\mathbb{Z}^2}$ для $k = 0, 1, 2$.

0.6. История вопроса. Производные разбиения \mathcal{T} возникли [16], [18] при изучении множеств ограниченного остатка $X \subset \mathbb{T}^2$. Такие множества X выделяются тем, что в них хорошо распределяются точки орбит относительно сдвига S_α . Что касается разбиений \mathcal{T} , то любой параллелограмм $X = P$ из \mathcal{T} будет множеством ограниченного остатка.

Другим приложением производных разбиений \mathcal{T} являются многомерные диофантовы приближения [17, 19]. В [17] доказано, что среди точек расширенной орбиты $\text{Orb}(0, \mathbf{m} + 1)$ точка $x_{\mathbf{m}} = S^{\mathbf{m}}(0) \equiv \mathbf{m}\alpha \pmod{\mathbb{Z}^2}$ является ближайшей к $0 \in \mathbb{T}^2$ относительно нормы, определяемой ядром $\text{Kг}(\mathcal{T})$ разбиения \mathcal{T} . Развитие этой идеи приводит к многомерным цепным дробям [17–23]. Операцию дифференцирования торических разбиений \mathcal{T} можно связать через некоторое суперпространство с многомерными разбиениями Фарей [1–8].

Связь между коронами Cr и типами многоугольных звезд $\text{St}^\sim(\mathcal{T})$ была впервые обнаружена для одномерных разбиений Фибоначчи [13] и двумерных разбиений Розы [15]. Дальнейшее развитие показало, что указанная связь – общий феномен, наблюдаемый в кристаллографии

квазипериодических структур [9], [14]; кроме того, эту связь удалось использовать [10] в теории сложности (complexity theory) квазипериодических разбиений.

§1. ПЕРЕКЛАДЫВАЮЩИЕСЯ РАЗВЕРТКИ ТОРА

1.1. Общая конструкция. Пусть $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$ – произвольный базис квадратной решетки \mathbb{Z}^2 и

$$\Delta(\mathbf{l}) = \{x = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2; \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 < 1\} \quad (1.1)$$

– открытый треугольник с вершиной в 0, образованный базисными векторами l_1, l_2 . Кроме того, пусть

$$\mathbb{T}^2 \xrightarrow{S} \mathbb{T}^2 : x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^2} \quad (1.2)$$

– сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^2$ с условием

$$\alpha \in \Delta(\mathbf{l}). \quad (1.3)$$

По базису \mathbf{l} и вектору α из (1.3) зададим тройку векторов

$$v = v(\alpha, \mathbf{l}) = \{v_0, v_1, v_2\} \quad (1.4)$$

следующим образом:

$$v_0 = \alpha, \quad v_1 = \alpha - l_1, \quad v_2 = \alpha - l_2. \quad (1.5)$$

Из принадлежности (1.3) вектора α области $\Delta(\mathbf{l})$ следует, что так заданная (1.5) тройка векторов $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ будет *согласованной*. Согласно [16] это означает, что $0 \in \Delta^{\text{int}}(v)$, где $\Delta^{\text{int}}(v)$ – внутренняя часть треугольника $\Delta(v)$ с вершинами, расположенными в концах векторов v_0, v_1, v_2 . Любую согласованную тройку векторов $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ будем для краткости называть *звездой*.

Звезды $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ обладают тем свойством, что по ним можно построить перекладывающиеся развертки

$$T = T(v) = T(v_0, v_1, v_2) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2 \quad (1.6)$$

тора \mathbb{T}^2 с векторами перекладывания v_0, v_1, v_2 из (1.4). Быть *разверткой* для T означает, что каноническое отображение

$$T \longrightarrow \mathbb{T}^2 : x \mapsto x \pmod{\mathbb{Z}^2}$$

является биекцией. *Перекладывание* развертки (1.6) задается формулой

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) = x + v_{\text{col}(x)}. \quad (1.7)$$

В формуле (1.7) использовано обозначение $\text{col}(x) = k$ для цвета точек x , принадлежащих подмножеству T_k , где $k = 0, 1, 2$.

Развертка T из (1.6) – это выпуклый шестиугольник, состоящий из трех параллелограммов T_0, T_1, T_2 . Обозначим $T_{k,l}$ замкнутый параллелограмм, натянутый на векторы v_k, v_l . Пусть, кроме того, T_m обозначают параллелограммы, имеющие те же внутренние части $T_m^{\text{int}} = T_{k,l}^{\text{int}}$, что и параллелограммы $T_{k,l}$, где m – дополнительный к $\{k, l\}$ индекс в $\{0, 1, 2\}$.

Определение 1.1. *Стороны и вершины параллелограммов $T_{k,l}$ распределим между соответствующими параллелограммами T_m , так чтобы выполнялись следующие условия:*

- 1) *каждому T_m принадлежали две смежные стороны и соединяющая их вершина;*
- 2) *получающееся при этом объединение $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2$ является разбиением множества T .*

Для определенности зададим следующее распределение вершин:

$$0 \in T_0, \quad v_0 \in T_1, \quad v_0 + v_1 \in T_2. \quad (1.8)$$

Так как по условию векторы $-l_1 = v_1 - v_0, -l_2 = v_2 - v_0$ образуют базис квадратной решетки \mathbb{Z}^2 , то T будет перекладывающейся разверткой тора \mathbb{T}^2 .

1.2. Пример 1. Пусть

$$\mathbb{T}^2 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2); \quad 0 \leq \alpha_1 < 1, \quad 0 \leq \alpha_2 < 1\}$$

– фундаментальная область тора \mathbb{T}^2 и α – вектор из \mathbb{T}^2 с условием

$$s_+(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 < 1. \quad (1.9)$$

Если в качестве базиса $\mathbf{1}$ взять базис $\mathbf{e} = \{e_1, e_2\}$, состоящий из единичных векторов $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$, и выбрать векторы

$$v_0 = \alpha, \quad v_1 = \alpha - e_1, \quad v_2 = \alpha - e_2, \quad (1.10)$$

то получим по правилу (1.4) согласованную тройку векторов $v = v(\alpha, \mathbf{e}) = \{v_0, v_1, v_2\}$, так как из условия (1.9) следует принадлежность вектора α области $\Delta(\mathbf{e})$.

1.3. Пример 2. Пусть теперь вектор α из области $\mathbb{T}^{2 \text{ int}}$ удовлетворяет другому условию

$$s_-(\alpha) = \alpha_1 - \alpha_2 > 0. \quad (1.11)$$

В качестве базиса \mathbf{l} решетки \mathbb{Z}^2 выберем скошенный базис $\mathbf{e}_- = \{e_1, e_2 + e_1\}$. Тогда по условию (1.11) вектор α принадлежит треугольнику $\Delta(\mathbf{e}_-)$ и, следовательно, по правилу (1.5), (1.10) получим согласованную тройку векторов $v = v(\alpha, \mathbf{e}_-)$.

Если же для вектора $\alpha \in \mathbb{T}^{2 \text{ int}}$ будет выполняться обратное условие

$$s_-(\alpha) = \alpha_1 - \alpha_2 < 0,$$

то выберем другой скошенный базис $\mathbf{e}_+ = \{e_1 + e_2, e_2\}$ и придем к согласованной тройке векторов $v = v(\alpha, \mathbf{e}_+)$.

1.4. Пример 3. содержит несколько иной ход рассуждения. Предположим, что вектор $\alpha \in \mathbb{T}^{2 \text{ int}}$ не удовлетворяет требованию (1.9). Тогда для него будет выполняться неравенство

$$s_+(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 > 1. \quad (1.12)$$

Вместо α рассмотрим вектор

$$\alpha_- = \alpha - e_1 - e_2 \equiv \alpha \pmod{\mathbb{Z}^2}, \quad (1.13)$$

а единичный базис $\mathbf{e} = \{e_1, e_2\}$ заменим центрально симметричным ему базисом $-\mathbf{e} = \{-e_1, -e_2\}$. Снова получили, что вектор α_- принадлежит треугольнику $\Delta(-\mathbf{e})$ и, тем самым, по правилу (1.5), (1.10) образуем согласованную тройку векторов $v_- = v(\alpha_-, -\mathbf{e})$.

Новое при таком подходе состоит в замене (1.13) вектора α сравнимым с ним вектором α_- по модулю решетки \mathbb{Z}^2 . В результате получаем перекладывающуюся развертку

$$T_- = T(v_-)$$

тора \mathbb{T}^2 , перекладывание (1.7) которой эквивалентно сдвигу тора $S_{\alpha_-} = S_\alpha$ из (1.2), на исходный вектор α .

1.5. Построение базиса в общем случае. Не уменьшая общности, будем предполагать, что вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ принадлежит положительному квадранту \mathbb{R}_+^2 , т.е. $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Предложенный в примерах 1,2,3 подбор базиса $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$ квадратной решетки \mathbb{Z}^2 с условием $\alpha \in \Delta(\mathbf{l})$ становится все более затруднительным с ростом длины вектора α . В этом случае будем использовать разложение числа $\xi = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

в цепную дробь. Выберем две соседние подходящие дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ с условием

$$\frac{P_n}{Q_n} < \xi < \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}, \quad (1.14)$$

при этом предполагая отношение $\xi = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ иррациональным. Рассмотрим целочисленные векторы

$$l_{n1} = (P_n, Q_n), \quad l_{n2} = (P_{n+1}, Q_{n+1}). \quad (1.15)$$

Из неравенств (1.14) следует, что вектор α принадлежит углу $\widehat{l_{n1}, l_{n2}}$ от вектора l_{n1} к вектору l_{n2} . Известно [24], что соседние подходящие дроби связаны соотношением

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$$

или иначе –

$$P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = 1. \quad (1.16)$$

Равенство (1.16) равносильно тому, что векторы $\mathbf{l}_n = (l_{n1}, l_{n2})$ из (1.15) образуют базис квадратной решетки \mathbb{Z}^2 .

После этого остается добиться выполнения условия попадания вектора α в треугольник $\Delta(\mathbf{l}_n)$. Так как длины векторов из (1.15) бесконечно растут, то найдется наименьшее n_{\min} с условием

$$\alpha \in \Delta(\mathbf{l}_n) \quad \text{для всех } n \geq n_{\min}.$$

Итак, для фиксированного вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ с иррациональным отношением координат, принадлежащего положительному квадранту \mathbb{R}_+^2 , мы получаем по правилу (1.10) бесконечную последовательность

$$v_n = v(\alpha, \mathbf{l}_n) = \{v_{n0}, v_{n1}, v_{n2}\} \quad \text{для всех } n \geq n_{\min} \quad (1.17)$$

согласованных троек векторов.

Замечание 1.1. Метод цепных дробей порождает согласованные тройки векторов $v_n = v(\alpha, \mathbf{l}_n)$ из (1.1), для которых один из углов $\widehat{l_{n1}, l_{n2}}$ треугольника $\Delta(\mathbf{l}_n)$ быстро стремится к нулю. Наоборот, метод прямого перебора, изложенный в примерах 1,2,3, хорошо находит тройки векторов $v_n = v(\alpha, \mathbf{l}_n)$ с большим углом $\widehat{l_{n1}, l_{n2}}$, которые может пропустить предыдущий метод.

§2. ПРОИЗВОДНЫЕ ЗВЕЗДЫ

2.1. Звезды. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$ из множества индексов $\{0, 1, 2\}$. Пусть тройка векторов $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ образует звезду (см. п. 1.1).

Определение 2.1. Будем говорить, что звезда $\{v_0, v_1, v_2\}$ невырождена, если для всех $\sigma = \{k, l\}$ из Σ только одна из троек

$$\{v_m, v_k, v_k + v_l\}, \quad \{v_m, v_k + v_l, v_l\} \quad (2.1)$$

является согласованной. Здесь m – дополнительный индекс для $\{k, l\}$ в множестве $\{0, 1, 2\}$.

В этом случае σ -производная тройка или звезда $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\}$ полагается равной согласованной тройке из (2.1). Рассмотрим

$$\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}} \quad (2.2)$$

– множество всех последовательностей

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}, \quad (2.3)$$

состоящих из произвольных сочетаний $\xi_i = \{\xi_{i1}, \xi_{i2}\}$ из Σ . Обозначим через

$$[\xi]_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \quad (2.4)$$

первые n членов последовательности (2.3), при этом считаем, что $[\xi]_0 = \emptyset$. Для $n = 0, 1, 2, \dots$ определим последовательность $[\xi]_n$ -производных, полагая

$$v^{[\xi]_n} = (v^{[\xi]_{n-1}})^{\xi_n}, \quad (2.5)$$

где

$$v^{[\xi]_0} = v. \quad (2.6)$$

И более обще –

$$v^\xi = \{v^{[\xi]_0}, v^{[\xi]_1}, v^{[\xi]_2}, \dots\}. \quad (2.7)$$

Скажем, что звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ будет $[\xi]_n$ -дифференцируемой (соответственно ξ -дифференцируемой), если существует ее производная (2.5) для n (соответственно – существуют производные из (2.7) для всех $n = 0, 1, 2, \dots$). Если существуют производные v^ξ для всех $\xi \in \Xi$, то будем говорить, что такая звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ тотально дифференцируема.

2.2. Тотальная дифференцируемость звезд. Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ называется *иррациональным*, если числа

$$1, \alpha_1, \alpha_2 \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

Чтобы избежать случаев вырождения, сосредоточимся исключительно на иррациональных (2.8) векторах сдвига α тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2/\mathbb{Z}^2$. Для произвольных торов \mathbb{T}_L^2 определение (2.8) сохраняется. Нужно лишь α_1 и α_2 рассматривать как координаты вектора α в произвольном базисе решетки L .

Для формулировки следующего результата нам потребуется еще одно понятие.

Определение 2.2. Звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ вкладывается

$$v \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2 \quad (2.9)$$

в тор \mathbb{T}^2 относительно сдвига $S = S_\alpha$, если множество

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2$$

является разбиением тора \mathbb{T}^2 . Здесь $\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \dots \sqcup S^{m_k-1}(T_k)$ – орбитное разбиение, составленное из S -сдвигов параллелограмма T_k из развертки $T = T(v)$, для которой векторы перекладывания v_k имеют вид

$$v_k \equiv m_k \alpha \pmod{\mathbb{Z}^2} \quad (2.10)$$

для $k = 0, 1, 2$ с некоторыми коэффициентами $m_k = 1, 2, 3, \dots$

Теорема 2.1. Пусть звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ вкладывается (2.9) в тор $v \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$ относительно сдвига $S = S_\alpha$ тора \mathbb{T}^2 на иррациональный (2.8) вектор α . Тогда справедливы следующие утверждения:

1. звезда v будет тотально дифференцируема;
2. любая σ -производная $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\}$ для $\sigma \in \Sigma$ также вкладывается

$$v^\sigma \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2 \quad (2.11)$$

в тот же тор \mathbb{T}^2 относительно сдвига S .

Доказательство. Приведено в [16] и [17].

2.3. Производное разбиение $\mathcal{T}^{[\xi]^n}$ тора \mathbb{T}^2 . Далее будем предполагать вектор α иррациональным (2.8). Фиксируем бесконечно дифференцируемую звезду $v = \{v_0, v_1, v_2\}$, последовательность $\xi \in \Xi$ и $n = 1, 2, 3, \dots$. Обозначим

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = v^{[\xi]^n} = \{v_0^{[\xi]^n}, v_1^{[\xi]^n}, v_2^{[\xi]^n}\} \quad (2.12)$$

– $[\xi]^n$ -производную звезду для v . По теореме 2.1 производная звезда \mathbf{v} снова вкладывается

$$\mathbf{v} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2 \quad (2.13)$$

в тор \mathbb{T}^2 относительно сдвига $S = S_\alpha$. Данная звезда \mathbf{v} имеет векторы

$$\mathbf{v}_k \equiv \mathbf{m}_k \alpha \pmod{\mathbb{Z}^2} \quad (2.14)$$

для $k = 0, 1, 2$ с коэффициентами $\mathbf{m}_k = m_k^{[\xi]^n}$, вычисляемыми по правилу (2.1). Обозначим общую сумму коэффициентов через

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2. \quad (2.15)$$

Звезде (2.12) соответствует перекладывающаяся развертка

$$\mathbf{T} = T^{[\xi]^n} = T(\mathbf{v}) = \mathbf{T}_0 \sqcup \mathbf{T}_1 \sqcup \mathbf{T}_2 \quad (2.16)$$

некоторого малого тора $\mathbf{T} \subset \mathbb{T}^2$ с векторами перекладывания $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ из (2.12). Напомним, что параллелограмм \mathbf{T}_m имеет своими сторонами векторы $\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l$ с индексами $k \neq m, l \neq m$. Рассмотрим $[\xi]^n$ -производное разбиение

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathcal{T}_0(\mathbf{v}) \sqcup \mathcal{T}_1(\mathbf{v}) \sqcup \mathcal{T}_2(\mathbf{v}) = \mathcal{T}^{[\xi]^n} \quad (2.17)$$

тора \mathbb{T}^2 . Здесь

$$\mathcal{T}_k(\mathbf{v}) = \mathbf{T}_k \sqcup S^1(\mathbf{T}_k) \sqcup \dots \sqcup S^{\mathbf{m}_k - 1}(\mathbf{T}_k) \quad (2.18)$$

– орбитное разбиение, составленное из S -сдвигов параллелограмма \mathbf{T}_k из развертки (2.16). Производная развертка (2.16) является ядром (кагуон)

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}\mathbf{r} = \text{Kr}(\mathcal{T}(\mathbf{v})) \quad (2.19)$$

$[\xi]^n$ -производного разбиения тора (2.17).

Наконец, определим еще конечную орбиту

$$\text{Orb}(0, \mathbf{m}) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha \pmod{\mathbb{Z}^2}; j = 0, 1, \dots, \mathbf{m} - 1\} \quad (2.20)$$

начальной точки $x_0 = 0$ на торе \mathbb{T}^2 .

2.4. Пример: производное разбиение $\mathcal{T}^{[\xi]_6}$ тора \mathbb{T}^2 . Выберем иррациональный (2.8) вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_1)$ с координатами $\alpha_1 \approx 0.3613$ и $\alpha_2 \approx 0.4067$. Такой выбор обусловлен желанием получать в дальнейшем не слишком вытянутые производные разбиения тора \mathbb{T}^2 . Вектор α принадлежит $\alpha \in \Delta(\mathbf{e})$ треугольнику $\Delta(\mathbf{e})$ из (1.1), если в качестве базиса квадратной решетки \mathbb{Z}^2 взять единичный базис $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$, где $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Согласно (1.4), (1.5) начальная звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ состоит из векторов

$$v_0 = \alpha, \quad v_1 = \alpha - e_1, \quad v_2 = \alpha - e_2. \quad (2.21)$$

Пусть

$$[\xi]_6 = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6\} \quad (2.22)$$

– последовательность из следующих сочетаний $\xi_1 = \xi_2 = \xi_5 = \{1, 2\}$, $\xi_3 = \{0, 2\}$ и $\xi_4 = \xi_6 = \{0, 1\} \in \Sigma$. Рассмотрим

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = v^{[\xi]_6} = \{v_0^{[\xi]_6}, v_1^{[\xi]_6}, v_2^{[\xi]_6}\} \quad (2.23)$$

– $[\xi]_6$ -производную звезду для звезды v , определяемую последовательностью (2.22). По теореме 2.1 производная звезда \mathbf{v} вкладывается $\mathbf{v} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$ в тор \mathbb{T}^2 относительно сдвига $S = S_\alpha$. Применяя к звезде \mathbf{v} правило (2.1), находим ее векторы $\mathbf{v}_k \equiv \mathbf{m}_k \alpha \bmod \mathbb{Z}^2$ для $k = 0, 1, 2$ с коэффициентами

$$\mathbf{m}_0 = 3, \quad \mathbf{m}_1 = 5, \quad \mathbf{m}_2 = 6. \quad (2.24)$$

Таким образом, общая сумма коэффициентов (2.15) равна

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = 14. \quad (2.25)$$

Звезде $\mathbf{v} = v^{[\xi]_6}$ соответствует (2.16) перекладывающаяся развертка

$$\mathbf{T} = T^{[\xi]_6} = T(\mathbf{v}) = \mathbf{T}_0 \sqcup \mathbf{T}_1 \sqcup \mathbf{T}_2 \quad (2.26)$$

малого тора $\mathbf{T} \subset \mathbb{T}^2$ с векторами перекладывания $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ из (2.23). Развертка $\mathbf{T} = T^{[\xi]_6}$ разбита на параллелограммы

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{P}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{P}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2), \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{P}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) \quad (2.27)$$

со сторонами, указанными в скобках. На рис. 1 изображена развертка $[\xi]_6$ -производного разбиения

$$\mathcal{T}^{[\xi]_6} = \mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathcal{T}_0(\mathbf{v}) \sqcup \mathcal{T}_1(\mathbf{v}) \sqcup \mathcal{T}_2(\mathbf{v}) \quad (2.28)$$

тора \mathbb{T}^2 , где \mathcal{T}_k – орбита (2.18) параллелограмма \mathbf{T}_k по действием S -сдвигов. В силу (2.24) и (2.25) орбита \mathcal{T}_k состоит из 3, 5 и 6 параллелограммов \mathbf{T}_k для $k = 0, 1$ и 2 соответственно; при этом вершины

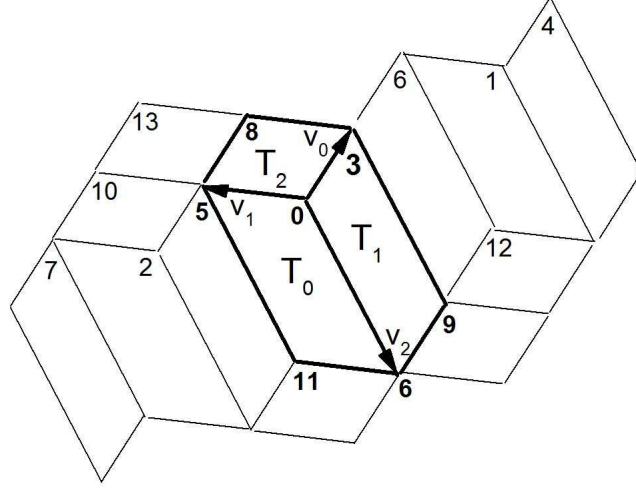


Рис. 1. Развертка производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_6}$ тора \mathbb{T}^2 .

параллелограммов \mathbf{T}_k отмечены номерами $j = 0, 1, \dots, 13$ точек x_j орбиты $\text{Orb}(0, 14)$ из (2.20). Ядро $\mathbf{T} = \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{K}\mathbf{r}(\mathcal{T}^{[\xi]_6})$ производного разбиения (2.28) выделено на рис. 1 жирными линиями.

§3. ЛУЧЕВЫЕ И МНОГОУГОЛЬНЫЕ ЗВЕЗДЫ: ОСНОВНАЯ СЕРИЯ

3.1. Лучевые и многоугольные звезды. Лучевые звезды

$$\begin{aligned}
 st_3 &= \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, \\
 st_4 &= \{\pm\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, \\
 st_5 &= \{\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, \\
 -st_3 &= \{-\mathbf{v}_0, -\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2\}, \\
 -st_4 &= \{\pm\mathbf{v}_0, -\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2\}, \\
 -st_5 &= \{\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2\},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

и

$$st_6 = \{\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, \pm\mathbf{v}_2\} \tag{3.2}$$

имеют центр в точке 0 и лучи $\pm\mathbf{v}_k$ из симметризованной звезды

$$\mathbf{v}^\pm = \{\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, \pm\mathbf{v}_2\}, \tag{3.3}$$

получающейся из исходной звезды \mathbf{v} , определенной в (2.12). Индексы $a = 3, 4, 5, 6$ означают количество лучей соответствующих звезд $\pm st_a$.

Звездам (3.1) и (3.2) отвечают *многоугольные звезды*

$$\pm St_3, \pm St_4, \pm St_5, St_6, \quad (3.4)$$

состоящие из параллелограммов

$$P(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \{\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2; 0 \leq \lambda_i \leq 1\}, \quad (3.5)$$

где лучи \mathbf{w}_1 и \mathbf{w}_2 звезд $\pm st_a$ выбираются так, чтобы порождаемые ими параллелограммы $P(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ не пересекались по внутренним точкам со всеми лучами $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ указанной звезды $\pm st_a$. В обозначениях (3.4) и (3.5) имеем

$$\mathbf{T}_0 = P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \quad \mathbf{T}_1 = P(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2), \quad \mathbf{T}_2 = P(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1), \quad (3.6)$$

где \mathbf{T}_k – параллелограммы из развертки (2.16). В общем случае под *многоугольной звездой* St будем понимать звезду, составленную из параллелограммов вида (3.5), при этом $x_0 = 0$ является внутренней точкой звезды St .

Отметим, что все звезды $\pm st_a$ и $\pm St_a$ имеют центр в точке 0. Параллельными сдвигами из них получаются звезды

$$\pm st_a(i) = \pm st_a + x_i, \quad \pm St_a(i) = \pm St_a + x_i \quad (3.7)$$

с центрами в точках x_i орбиты $\text{Orb}(0, \mathbf{m})$ из (2.20). Кроме явно определенных звезд (3.7), нам потребуются еще абстрактные звезды

$$st(i) = st + x_i, \quad St(i) = St + x_i \quad (3.8)$$

также с центрами в точках x_i . Здесь st обозначает произвольную лучевую звезду с лучами $\mathbf{w} = \pm \mathbf{v}_k$ из симметризованной звезды \mathbf{v}^\pm и с центром в точке 0; а St – соответствующую многоугольную звезду.

Далее мы будем сравнивать конкретные (3.7) и абстрактные звезды (3.8) с *реальными звездами*

$$st(\mathcal{T}, i), \quad St(\mathcal{T}, i) \subset \mathcal{T}, \quad (3.9)$$

содержащимися в многоугольном производном разбиении $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора \mathbb{T}^2 на параллелограммы (2.17) с центрами в тех же самых точках x_i .

3.2. Типы лучевых звезд. Векторы \mathbf{v}_k звезды \mathbf{v} из (2.12) всегда можно упорядочить так, чтобы их *веса* \mathbf{m}_k удовлетворяли неравенствам

$$1 \leq \mathbf{m}_0 \leq \mathbf{m}_1 \leq \mathbf{m}_2. \quad (3.10)$$

Здесь первое неравенство $\mathbf{m}_0 \geq 1$ выполняется всегда в силу определения (2.12) производных звезд \mathbf{v} . В условиях (3.10) определим следующие *основные типы звезд*

$$\begin{aligned} \text{st}_3(i) & \text{ для } i \in I_3 = [0, \mathbf{m}_0 - 1], \\ \text{st}_4(i) & \text{ для } i \in I_4 = [\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1 - 1], \\ \text{st}_5(i) & \text{ для } i \in I_5 = [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 - 1]; \end{aligned} \quad (3.11)$$

а также *двойственные* к (3.11) типы звезд

$$\begin{aligned} -\text{st}_3(i') & \text{ для } i \in I_3, \\ -\text{st}_4(i') & \text{ для } i \in I_4, \\ -\text{st}_5(i') & \text{ для } i \in I_5, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$i' = \mathbf{m} - 1 - i. \quad (3.13)$$

Эти звезды можно записать в более явном однообразном с (3.11) виде

$$\begin{aligned} -\text{st}_3(i) & \text{ для } i \in I'_3 = [\mathbf{m} - \mathbf{m}_0, \mathbf{m} - 1], \\ -\text{st}_4(i) & \text{ для } i \in I'_4 = [\mathbf{m} - \mathbf{m}_1, \mathbf{m} - \mathbf{m}_0 - 1], \\ -\text{st}_5(i) & \text{ для } i \in I'_5 = [\mathbf{m} - \mathbf{m}_2, \mathbf{m} - \mathbf{m}_1 - 1]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Заметим, что если в (3.10) имеются равенства, то соответствующие интервалы I_i, I'_i в определениях (3.11)-(3.14) будут пустыми.

Далее нам придется разделять лучевые $\pm \text{st}_a(i)$ и многоугольные звезды $\pm \text{St}_a(i)$ *основной серии*, когда выполняется неравенство

$$\mathbf{m}_2 \leq \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1, \quad (3.15)$$

и *дополнительной серии*, когда –

$$\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 < \mathbf{m}_2. \quad (3.16)$$

Если выполнено условие (3.15), то в дополнение к звездам (3.11)-(3.14) определим еще *симметричный тип* звезд

$$\text{st}_6(i) \text{ для } i \in I_6 = [\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 - 1]. \quad (3.17)$$

Из (3.2) следует, что это единственный тип, обладающий свойством центральной симметрии

$$\text{st}_6 = -\text{st}_6. \quad (3.18)$$

3.3. Многоугольные звезды производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_6}$. Рассмотрим звезды $\pm\text{St}_a(i)$ производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_6}$ из (2.28). Согласно (2.24) имеем $\mathbf{m}_0 = 3$, $\mathbf{m}_1 = 5$, $\mathbf{m}_2 = 6$, поэтому выполняется неравенство (3.15) и, следовательно, мы имеем дело со звездами $\pm\text{St}_a(i)$ основной серии. На рис. 2 представлено замощение $\mathcal{T}^{[\xi]_6} + \mathbb{Z}^2$ части плоскости \mathbb{R}^2 разверткой производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_6}$ тора \mathbb{T}^2 . Заметим, что изображенная на рис. 1 развертка – это развертка тора \mathbb{T}^2 . Такими развертками можно разбить всю плоскости \mathbb{R}^2 трансляциями на векторы решетки \mathbb{Z}^2 . Переход к замощению $\mathcal{T}^{[\xi]_6} + \mathbb{Z}^2$ объясняется тем, что на замощении можно непосредственно видеть многоугольные звезды $\pm\text{St}_a(i)$ без дополнительной операции склейки по $\text{mod } \mathbb{Z}^2$.

3.4. Симметрии лучевых звезд. На множестве абстрактных лучевых звезд (3.8) определим *отображение двойственности*

$$\iota: \text{st}(i) \longrightarrow -\text{st}(i'), \quad (3.19)$$

где значение i' было определено в (3.13). Отображение (3.19) определено корректно, т.к. симметризованная звезда (3.3) обладает свойством $-\mathbf{v}^\pm = \mathbf{v}^\pm$. На подмножестве конкретных звезд (3.7) отображение двойственности ι принимает вид

$$\iota: \begin{cases} \text{st}_a(i) & \longrightarrow -\text{st}_a(i'), & \text{где } i \in I_a, \\ -\text{st}_a(i) & \longrightarrow \text{st}_a(i'), & \text{где } i \in I'_a. \end{cases} \quad (3.20)$$

Здесь для каждого $a = 3, 4, 5, 6$ интервалы I_a и I'_a изменений i взяты из правых частей определений звезд (3.11), (3.14) и (3.17). Отображение ι является *инволюцией*

$$\iota \circ \iota = \text{id}. \quad (3.21)$$

Заметим, что из (3.20) и (3.18) вытекает свойство симметрии

$$\iota \text{st}_6(i) = \text{st}_6(i') \quad \text{для } i \in I_6 = I'_6 \quad (3.22)$$

для звезд симметричного типа LR_6 .

На рис. 3 многоугольные звезды $\pm\text{St}_a(i)$ производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_6}$ разбиты на симметричные семейства относительно отображения ι из (3.19) и (3.20). В центре звезд $\pm\text{St}_a(i)$ указаны интервалы номеров i звезд данного типа.

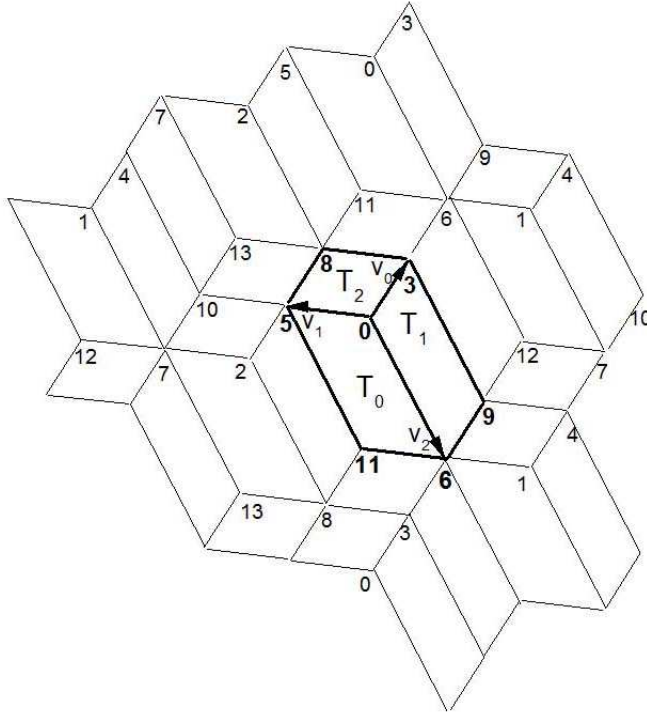


Рис. 2. Замощение плоскости разверткой производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_6}$.

3.5. Допустимость и жесткость звезд. Вектор $\mathbf{w} = \pm \mathbf{v}_k$ назовем *допустимым* в точке $x_i \in \text{Orb}(0, \mathbf{m})$, если выполнено условие

$$\mathbf{w} + x_i \in \text{Orb}(0, \mathbf{m}), \quad (3.23)$$

где $\text{Orb}(0, \mathbf{m})$ – орбита (2.20). Аналогично пару неколлинеарных векторов $\mathbf{w}_1 = \pm \mathbf{v}_k$, $\mathbf{w}_2 = \pm \mathbf{v}_l$ назовем *допустимой* в точке x_i , если

$$\mathbf{w}_1 + x_i, \mathbf{w}_2 + x_i, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + x_i \in \text{Orb}(0, \mathbf{m}). \quad (3.24)$$

Переходя к более общему случаю, назовем лучевую звезду $\text{st}(i)$ *допустимой* в точке x_i , если выполняется включение

$$\text{St}^v(i) \subset \text{Orb}(0, \mathbf{m}), \quad (3.25)$$

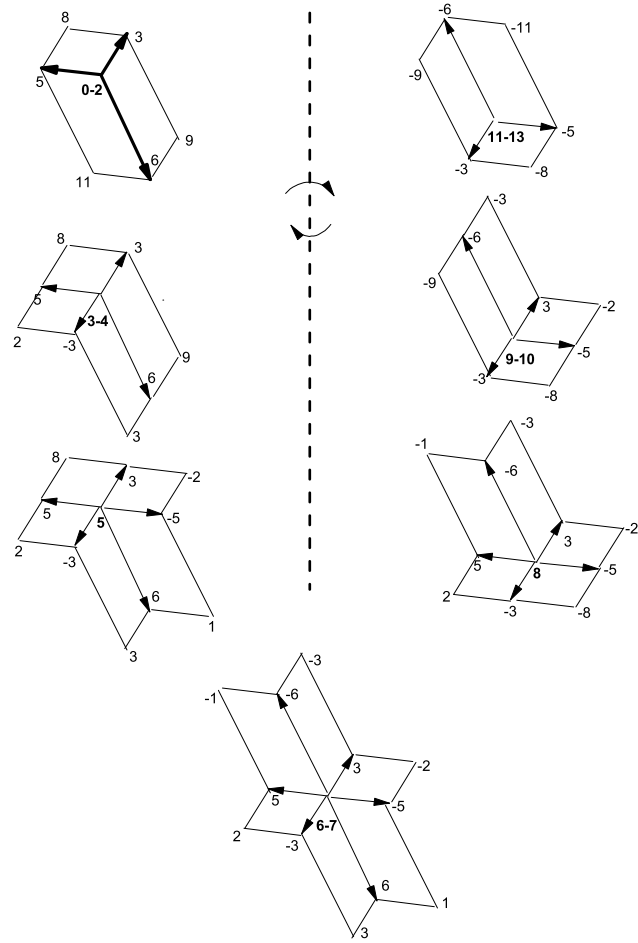


Рис. 3. Симметрии многоугольных звезд производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_6}$.

где $St^v(i)$ – множество вершин всех многоугольников звезды $St(i)$, включая ее центр x_i . Укажем, что включения (3.23)-(3.25) подразумеваются по mod \mathbb{Z}^2 .

Естественно, в допустимой звезде $st(i)$ каждый ее отдельный луч и любая пара смежных лучей будут допустимыми. Поскольку индекс i в обозначении звезды $st(i)$ однозначно указывает на ее центр – точку x_i , то далее отмечая какое-либо свойство звезды $st(i)$ будем опускать упоминание самой точки x_i .

Будем говорить, что $st(i)$ – *максимальная* звезда, если она содержит все допустимые в точке x_i векторы \mathbf{w} из симметризованной звезды (3.3). Напротив, *минимальность* звезды $st(i)$ будет означать выполнение условий:

- 1) звезда $st(i)$ допустима в точке x_i ;
- 2) если удалить хотя бы один луч звезды $st(i)$, то она становится *запрещенной*, т.е. недопустимой в точке x_i .

Скажем, что лучевая звезда $st(i)$ *жесткая*, если $st(i)$ является единственной допустимой звездой с центром в точке x_i . Поскольку согласно (3.4) между звездами $st(i)$ и $St(i)$ существует биекция

$$st(i) \Leftrightarrow St(i), \quad (3.26)$$

то приведенные выше определения можем перенести с лучевых звезд $st(i)$ также и на отвечающие им многоугольные звезды $St(i)$.

Непосредственно из приведенных выше определений свойств абстрактных лучевых звезд $st(i)$ и определения отображения двойственности (3.19) вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.1. 1. *Если лучевая звезда $st(i)$ обладает одновременно свойствами максимальной и минимальности в точке x_i , то она обязана быть жесткой звездой.*

2. *Лучевая звезда $st(i)$ является жесткой тогда и только тогда, когда таковой является ее двойственная звезда $-st(i') = \iota st(i)$, где ι – отображение (3.19).*

Обозначим через st_a множество всех лучевых звезд $\pm st_a(i) = \pm st_a + x_i$ из (3.7), где $\pm st_a$ – звезды из списков (3.1), (3.2) и (3.4), и St_a – множество соответствующих многоугольных звезд $\pm St_a(i) = \pm St_a + x_i$.

Лемма 3.2. *Пусть St_a – множество всех многоугольных звезд $\pm St_a(i)$ основной серии, т.е. выполняются неравенства (3.10) и (3.15). Тогда все звезды $\pm St_a(i)$ из множества St_a являются жесткими.*

Доказательство. Из выполнимости условий (3.10) и (3.15) следуют неравенства

$$\begin{aligned} 0 < \mathbf{m}_0 &\leq \mathbf{m}_1 \leq \mathbf{m}_2 \\ &\leq \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 \leq \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_2 \leq \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \leq \mathbf{m} - 1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Учитывая эти неравенства, доказательство сначала проведем для звезд $St_a(i)$ из множества St_a , постепенно увеличивая i от 0 до $\lfloor \frac{\mathbf{m}-1}{2} \rfloor$, где $\lfloor * \rfloor$ – целая часть.

Случай $St_3(i)$ для $i \in I_3 = [0, \mathbf{m}_0 - 1]$. Точка $x_0 = 0$ допускает только векторы \mathbf{w} из лучевой звезды $st_3 = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ и, следовательно, звезда $St_3(0)$ максимальная. Кроме того, любые два соседних вектора $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ звезды $St_3(0)$ образуют допустимую пару. Так как $x_0 = 0$ – внутренняя точка звезды $St_3(0)$, то данная звезда допустимая. Далее заметим, что звезда $St_3(0)$ минимальная, а поскольку она еще и максимальная, то по первой части леммы 3.1 звезда $St_3(0)$ является жесткой. То же рассуждение сохраняется для всех звезд $St_3(i)$ с номерами $i \in I_3$.

Случай $St_4(i)$ для $i \in I_4 = [\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1 - 1]$. При переходе к точке $x_{\mathbf{m}_0}$ количество допустимых векторов \mathbf{w} увеличивается на единицу. Все такие векторы составляют лучевую звезду $st_4 = \{\pm \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ и любые два вектора $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in st_4$ образуют допустимую пару. Новый вектор $-\mathbf{v}_0$ разделяет пару $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. В точке $x_{\mathbf{m}_0}$ она становится запрещенной парой. Вместо нее возникают две допустимые пары $\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_0$ и $-\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2$. Следовательно, $St_4(\mathbf{m}_0)$ – максимальная допустимая звезда. Перебором всех комбинаций убеждаемся в минимальности системы векторов st_4 и выводим жесткость звезды $St_4(\mathbf{m}_0)$. Схема рассуждений сохраняется для всех звезд $St_4(i)$, где $i \in I_4$.

Случаи $St_5(i)$ для $i \in I_5 = [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 - 1]$ и $st_6(i)$ для $i \in I_6^- = [\mathbf{m}_2, \lfloor \frac{\mathbf{m}-1}{2} \rfloor]$ рассматриваются аналогично; увеличивается лишь количество перебираемых комбинаций пар векторов $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in st_a$.

Оставшиеся звезды $-St_a(i)$ для $i \in [\lfloor \frac{\mathbf{m}-1}{2} \rfloor + 1, \mathbf{m} - 1]$ двойственны рассмотренным выше относительно отображения ι из (3.20), при этом в силу неравенств (3.27) звезды $-St_a(i)$ соответствуют рассмотренным выше звездам $St_a(i')$. Поэтому в силу леммы 3.1 звезды $-St_a(i)$ также будут жесткими. \square

Замечание 3.1. 1. Отметим, что из первого неравенств в (3.27) вытекает $I_3 \neq \emptyset$, и, значит, звезда $St_3(0)$ всегда существует. Это же свойство непосредственно следует из определения $[\xi]_n$ -производных разбиений (2.17).

2. Напротив, в *случае вырождения*, когда среди неравенств (3.27) присутствуют равенства, соответствующий тип звезд $St_a(i)$ отсутствует.

§4. ЛУЧЕВЫЕ И МНОГОУГОЛЬНЫЕ ЗВЕЗДЫ: ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ СЕРИЯ

4.1. Звезды дополнительной серии. Переходим к рассмотрению многоугольных звезд St_a дополнительной серии, когда имеют место неравенства (3.10) и (3.16). Лучевые звезды $\pm st_3$, $\pm st_4$ и $\pm st_5$ определим также, как в (3.1). Симметричную же звезду st_6 в (3.2) заменим на новую *симметричную лучевую звезду*

$$st_4^s = \{\pm \mathbf{v}_0, \pm \mathbf{v}_1\}. \quad (4.1)$$

Индексы $a = 3, 4, 5$ по-прежнему означают количество лучей соответствующих звезд $\pm st_a$. Аналогично (3.7), звездам (3.1) и (4.1) отвечают *лучевые звезды*

$$\pm st_3(i), \quad \pm st_4(i), \quad \pm st_5(i), \quad st_4^s(i) \quad (4.2)$$

с центрами в точках x_i орбиты $\text{Orb}(0, \mathbf{m})$ из (2.20). Неравенства (3.27) в случае дополнительной серии заменяются неравенствами

$$0 < \mathbf{m}_0 \leq \mathbf{m}_1 \leq \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 < \mathbf{m}_2 \leq \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_2 \leq \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \leq \mathbf{m} - 1. \quad (4.3)$$

Поэтому *симметричный тип* звезд $st_4^s(i)$ имеет вид

$$st_4^s(i) \quad \text{для} \quad i \in I_4^s = [\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 - 1]. \quad (4.4)$$

Среди звезд (4.2) это единственный тип, обладающий свойством центральной симметрии

$$st_4^s = -st_4^s. \quad (4.5)$$

Лемма 4.1. Пусть выполняются неравенства (3.10), (3.16), и пусть St_a – множество всех многоугольных звезд $\pm St_a(i)$, отвечающих лучевым звездам дополнительной серии (4.2). Тогда все звезды $\pm St_a(i)$, $St_4^s(i)$ из множества St_a являются жесткими.

Доказательство. Сравнивая неравенства (3.27) и (4.3) видим, что доказательство леммы 3.2 сохраняется для звезд дополнительной серии $\pm St_3(i)$, $\pm St_4(i)$ и $\pm St_5(i)$. Поэтому нужно проверить лишь жесткость симметричных звезд $St_4^s(i)$ с центрами в точках x_i для $i \in I_4^s = [\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 - 1]$.

В силу неравенства $\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 < \mathbf{m}_2$ из (4.3) векторы $\pm \mathbf{v}_2 \in st_6$ становятся запрещенными в точке $x_{\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1}$. Данная точка допускает только векторы \mathbf{w} из симметричной лучевой звезды $st_4^s = \{\pm \mathbf{v}_0, \pm \mathbf{v}_1\}$ и, следовательно, звезда $St_4^s(\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1)$ максимальная. Любые два соседних вектора $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ звезды $St_4^s(\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1)$ образуют допустимую пару, поэтому звезда допустимая. А так как свойство минимальности данной звезды очевидно, то снова применяя первую часть леммы 3.1 убеждаемся, что звезда $St_4^s(\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1)$ является жесткой. То же рассуждение справедливо для всех звезд $St_4^s(i)$ с остальными номерами $i \in I_4^s$. \square

4.2. Производное разбиение $\mathcal{T}^{[\xi]_3}$ тора \mathbb{T}^2 . Выберем иррациональный вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_1) \approx (0.3613, 0.4067)$ такой же, как в п. 2.4. Пусть

$$[\xi]_3 = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} \quad (4.6)$$

– последовательность из следующих сочетаний $\xi_1 = \xi_2 = \{0, 2\}$ и $\xi_3 = \{1, 2\} \in \Sigma$. Рассмотрим

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = v^{[\xi]_3} = \{v_0^{[\xi]_3}, v_1^{[\xi]_3}, v_2^{[\xi]_3}\} \quad (4.7)$$

– $[\xi]_3$ -производную звезду для звезды v из (2.21), определяемую последовательностью (4.6). Снова по теореме 2.1 производная звезда \mathbf{v} вкладывается $\mathbf{v} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$ в тор \mathbb{T}^2 относительно сдвига $S = S_\alpha$. По правилу (2.1) для звезды \mathbf{v} вычисляем ее векторы $\mathbf{v}_k \equiv \mathbf{m}_k \alpha \bmod \mathbb{Z}^2$, где $k = 0, 1, 2$, имеющие коэффициенты

$$\mathbf{m}_0 = 1, \quad \mathbf{m}_1 = 2, \quad \mathbf{m}_2 = 4. \quad (4.8)$$

Теперь общая сумма коэффициентов (2.15) равна

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = 7. \quad (4.9)$$

Аналогично (2.26) для звезды $\mathbf{v} = v^{[\xi]_3}$ строим перекладывающуюся развертку

$$\mathbf{T} = T^{[\xi]_3} = T(\mathbf{v}) = \mathbf{T}_0 \sqcup \mathbf{T}_1 \sqcup \mathbf{T}_2 \quad (4.10)$$

малого тора $\mathbf{T} \subset \mathbb{T}^2$ с векторами перекладывания $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ из (4.7).

На рис. 4 изображена развертка $[\xi]_3$ -производного разбиения

$$\mathcal{T}^{[\xi]_3} = \mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathcal{T}_0(\mathbf{v}) \sqcup \mathcal{T}_1(\mathbf{v}) \sqcup \mathcal{T}_2(\mathbf{v}). \quad (4.11)$$

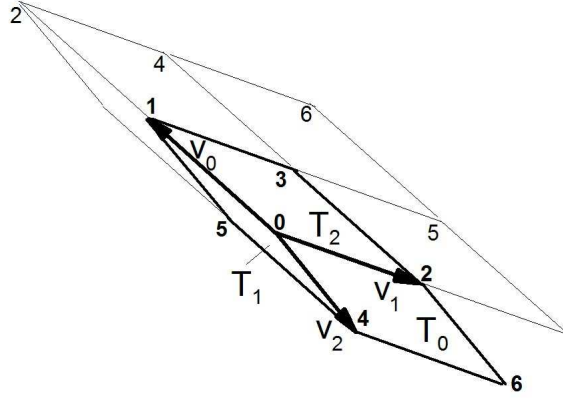


Рис. 4. Развертка производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]3}$ тора \mathbb{T}^2 .

В силу (4.8) и (4.9) орбита \mathcal{T}_k состоит из 1, 2 и 4 параллелограммов \mathbf{T}_k для $k = 0, 1$ и 2 соответственно; при этом вершины параллелограммов \mathbf{T}_k отмечены номерами $j = 0, 1, \dots, 6$ точек x_j орбиты $\text{Orb}(0, 7)$. Ядро $\mathbf{T} = \mathbf{K}\Gamma = \mathbf{K}\Gamma(\mathcal{T}^{[\xi]3})$ производного разбиения (4.11) выделено на рис. 4 жирными линиями.

Рассмотрим звезды $\pm\text{St}_a(i)$ производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]3}$. Согласно (4.8) выполняется неравенство (3.16), поэтому в данном случае мы имеем дело со звездами $\pm\text{St}_a(i)$ дополнительной серии. На рис. 5 представлено замощение $\mathcal{T}^{[\xi]3} + \mathbb{Z}^2$ плоскости \mathbb{R}^2 разверткой производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]3}$.

На рис. 6 многоугольные звезды $\pm\text{St}_a(i)$ производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]3}$ разбиты на симметричные семейства относительно отображения ι из (3.19) и (3.20). В центре звезд $\pm\text{St}_a(i)$ указаны интервалы номеров i звезд данного типа.

§5. АБСТРАКТНЫЕ И РЕАЛЬНЫЕ ЗВЕЗДЫ

5.1. Отрезки I_a, I'_a и типы многоугольных звезд. Цель настоящего раздела – сравнить конкретные лучевые $\pm\text{st}_a(i) \in \text{st}_a$ и многоугольные звезды $\pm\text{St}_a(i) \in \text{St}_a$ с реальными звездами $\text{st}(\mathcal{T}, i)$ и $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ из (3.9), содержащимися в многоугольном разбиении $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора \mathbb{T}^2 на параллелограммы (2.17).

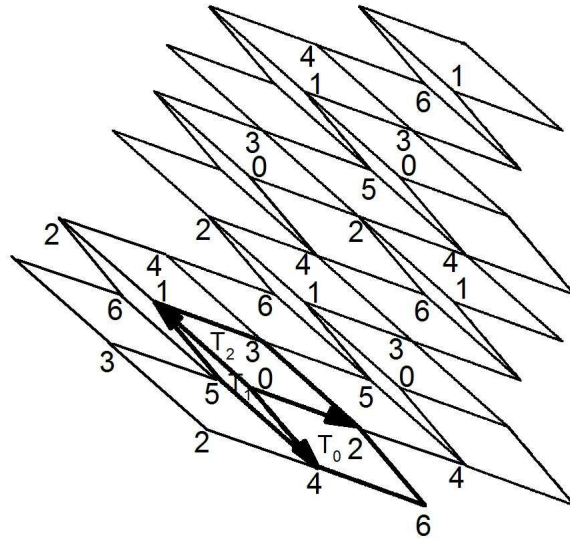


Рис. 5. Замошение плоскости разверткой производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_3}$.

Пусть I_a, I'_a для $a = 3, 4, 5, 6$ – интервалы, определенные в (3.11), (3.14), (3.17) и (4.5). Из определений следует, что отрезок $I = [0, \mathbf{m} - 1]$ имеет два типа разбиений

$$I = I_3 \sqcup I_4 \sqcup I_5 \sqcup I_6 \sqcup I'_5 \sqcup I'_4 \sqcup I'_3 \quad (5.1)$$

и

$$I = I_3 \sqcup I_4 \sqcup I_5 \sqcup I_4^s \sqcup I'_5 \sqcup I'_4 \sqcup I'_3 \quad (5.2)$$

соответственно в случае основной серии (3.10), (3.15) и дополнительной серии (3.10), (3.16). Отрезки в разбиениях (5.1) и (5.2) записаны последовательно друг за другом.

Таблица 1. Отрезки I_a, I'_a и типы $\pm St_a$ многоугольных звезд $\pm St_a(i)$ основной серии.

| | | | | | | |
|----------------|-------------------------------|-------------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|----------------|
| I_3 | I_4 | I_5 | I_6 | I'_5 | I'_4 | I'_3 |
| St_3 | St_4 | St_5 | St_6 | $-St_3$ | $-St_4$ | $-St_5$ |
| \mathbf{m}_0 | $\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_0$ | $\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1$ | $\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$ | $\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1$ | $\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_0$ | \mathbf{m}_0 |

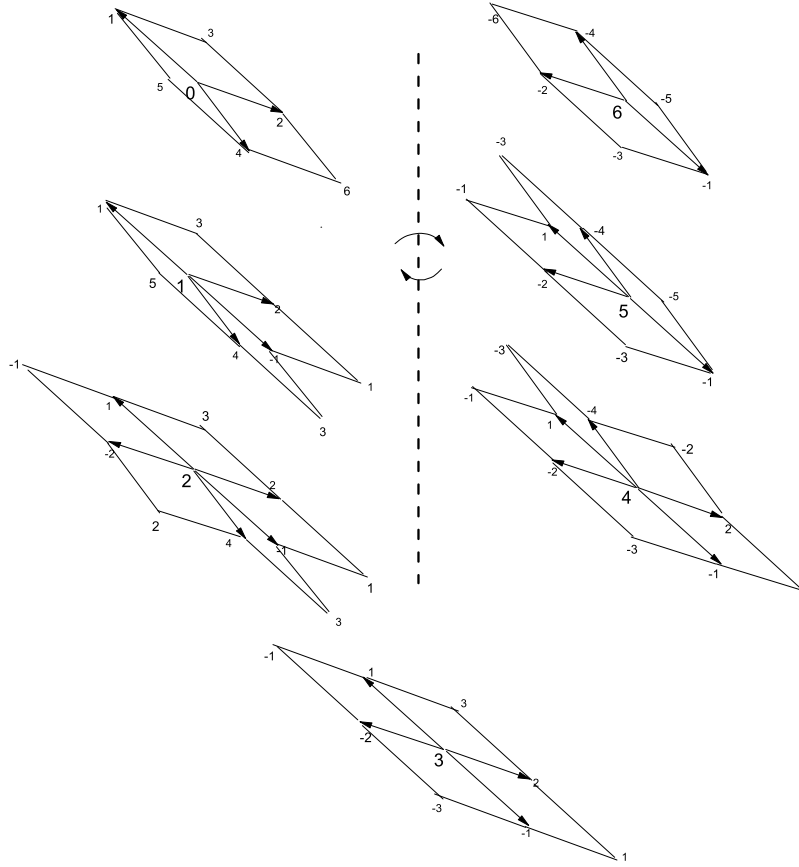


Рис. 6. Симметрии многоугольных звезд производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]3}$.

Таблица 2. Отрезки I_a, I'_a, I_4^s и типы $\pm St_a, St_4^s$ многоугольных звезд $\pm St_a(i), St_4^s(i)$ дополнительной серии.

| I_3 | I_4 | I_5 | I_4^s | I_5' | I_4' | I_3' |
|----------------|-------------------------------|----------------|--|----------------|-------------------------------|----------------|
| St_3 | St_4 | St_5 | St_4^s | $-St_3$ | $-St_4$ | $-St_5$ |
| \mathbf{m}_0 | $\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_0$ | \mathbf{m}_0 | $\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_1$ | \mathbf{m}_0 | $\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_0$ | \mathbf{m}_0 |

В таблицах 1 и 2 в верхней строке записаны отрезки I_a, I'_a из разбиений (5.1), (5.2); во второй строке – типы $\pm\text{St}_a$ звезд $\pm\text{St}_a(i)$ с центрами в точках x_i для номера i из соответствующего отрезка I_a, I'_a ; в нижней строке – количество номеров i из указанных отрезков. Отрезок $I = [0, \mathbf{m} - 1]$ содержит \mathbf{m} номеров i , что совпадает с суммами всех чисел в нижних строках таблиц 1 и 2.

Используя таблицы 1 и 2, для любого i из отрезка I зададим два отображения

$$\text{St}_{\mathcal{T}} : i \mapsto \text{St}_{\mathcal{T}}(i) \quad (5.3)$$

и

$$\mathbf{m} : i \mapsto \mathbf{m}(i) \quad (5.4)$$

следующим образом:

1) определяем основную или дополнительную серию разбиения \mathcal{T} , а затем по соответствующей таблице 1 или 2, какому из отрезков I_a, I'_a, I_4^s принадлежит номер i ;

2) тогда $\text{St}_{\mathcal{T}}(i)$ в (5.3) – это звезда $\pm\text{St}_a(i), \text{St}_4^s(i)$, расположенная ниже найденного отрезка I_a, I'_a, I_4^s , а $\mathbf{m}(i)$ в (5.4) – количество звезд данного типа.

Таким образом, по номеру $i \in I$ отображения (5.3) и (5.4) однозначно определяют тип звезды $\pm\text{St}_a, \text{St}_4^s$, ее центр x_i и количество таких звезд $\mathbf{m}(i)$.

5.2. Основная теорема.

Теорема 5.1. 1. Любое производное разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора \mathbb{T}^2 из (2.17) обладает свойством максимальности, т.е. в разбиении \mathcal{T} все звезды $\text{St}(\mathcal{T}, i)$, где $i \in I$, максимальны.

2. Если $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ – какая-то многоугольная звезда из разбиения \mathcal{T} , то в разбиении \mathcal{T} существует симметричная ей звезда

$$\text{St}(\mathcal{T}, i') = -\text{St}(\mathcal{T}, i) \quad (5.5)$$

с центром $x_{i'}$ с номером $i' = \mathbf{m} - 1 - i$.

3. По формуле

$$\text{St}(\mathcal{T}, i) = \text{St}_{\mathcal{T}}(i), \quad (5.6)$$

где $\text{St}_{\mathcal{T}}$ – отображение (5.3), определяется тип $\pm\text{St}_a, \text{St}_4^s$ звезды $\text{St}(\mathcal{T}, i) \in \mathcal{T}$.

4. Количество звезд $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ в разбиении \mathcal{T} данного типа (5.6) равно $\mathbf{m}(i)$, определенному в (5.4).

Доказательство. Удобно начать доказательство с утверждений 3 и 4. Начальная звезда \mathbf{v} из (2.12) имеет лучи \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 порядков \mathbf{m}_0 , \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 , определяемых из сравнений (2.14). Предполагается, что лучи упорядочены таким образом, что выполняются неравенства (3.10). В зависимости от того, какое из неравенств (3.15) или (3.16) имеет место, множество всех многоугольных звезд St_a состоит из звезд основной $\pm St_a(i)$ или дополнительной $\pm St_a(i)$, $St_4^s(i)$ серии. Согласно леммам 3.2 и 4.1 все эти звезды для всех номеров $i \in I$ являются жесткими. По теореме 2.1 любая производная звезда $\mathbf{v} = v^{[\xi]^n}$ вкладывается $\mathbf{v} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$ в тор \mathbb{T}^2 относительно сдвига $S = S_\alpha$ и, значит, по определению существует производное разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора \mathbb{T}^2 . Многоугольники разбиения \mathcal{T} имеют вершины в точках x_i с номерами $i \in I$. По указанным выше леммам в точках x_i возможны единственные звезды из списка St_a . Отсюда и определения отображения (5.3) вытекает формула (5.6) и утверждение 4.

В доказательствах лемм 3.2 и 4.1 была установлена максимальность всех звезд из списка St_a , что в совокупности с формулой (5.6) доказывает утверждение 1. Формула (5.5) получается из явной формулы (3.20) для отображения двойственности ι и определений типов звезд (3.1), (3.2) и (4.1). \square

§6. КОРОНЫ И ТИПЫ ЗВЕЗД

6.1. Корона. Из теоремы 5.1, формула (5.6), следует, что определенное в (2.19) ядро $\mathbf{K}\mathbf{r} = \text{Kr}(\mathcal{T})$ производного разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора \mathbb{T}^2 совпадает

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = St_3(0) = \mathbf{T}_0 \sqcup \mathbf{T}_1 \sqcup \mathbf{T}_2 \quad (6.1)$$

с многоугольной звездой из списка (3.7) с центром в точке $x_0 = 0$. В правой части (6.1) записаны параллелограммы \mathbf{T}_k из (3.6). Чтобы не вводить дополнительного обозначения, будем считать ядро в (6.1) замкнутым $\mathbf{K}\mathbf{r} = \overline{\mathbf{K}\mathbf{r}}$.

Обозначим через $\mathbf{C}\mathbf{r}$ множество, состоящее из самого ядра $\mathbf{K}\mathbf{r}$ и соседних с ним многоугольников P из производного разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора \mathbb{T}^2 из (2.17). При этом учитываются многоугольники P как с общей стороной, так и с общей вершиной с ядром $\mathbf{K}\mathbf{r}$. Множество $\mathbf{C}\mathbf{r}$ назовем *коронай* ядра $\mathbf{K}\mathbf{r}$.

По определению корона $\mathbf{C}\mathbf{r}$ содержит три многоугольника \mathbf{T}_0 , \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 ядра $\mathbf{K}\mathbf{r}$ и еще окружающие его многоугольники $P \in \mathcal{T}$. Кроме

того, корона \mathbf{Cr} содержит семь внутренних вершин указанных многоугольников. Опишем это *множество вершин* \mathbf{Cr}^v . По определению (3.6) параллелограммы \mathbf{T}_k в разбиении (6.1) имеют вершины

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_0^v &= \{0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}, \\ \mathbf{T}_1^v &= \{0, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2\}, \\ \mathbf{T}_2^v &= \{0, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1\}.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Используя (2.14) можем представить вершины из (6.2) в виде их номеров

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_0^v &= \{0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2\}, \\ \mathbf{T}_1^v &= \{0, \mathbf{m}_0, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_2\}, \\ \mathbf{T}_2^v &= \{0, \mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1\}.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Формулы (6.3) позволяют явным образом записать множество внутренних вершин \mathbf{Cr}^v короны \mathbf{Cr} :

$$\mathbf{Cr}_1^v = \{0, \mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2\}.\quad (6.4)$$

6.2. Классификация типов многоугольных звезд. Обозначим множество всех многоугольных звезд $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ разбиения \mathcal{T} через $\text{St}(\mathcal{T})$. Две многоугольные звезды $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ и $\text{St}(\mathcal{T}, i')$ из множества $\text{St}(\mathcal{T})$ считаем *эквивалентными* $\text{St}(\mathcal{T}, i) \sim \text{St}(\mathcal{T}, i')$, если одну из них можно перевести в другую некоторой трансляцией тора \mathbb{T}^2 . Пусть $\text{St}^\sim(\mathcal{T})$ – множество всех *классов* эквивалентных звезд в множестве $\text{St}(\mathcal{T})$ и

$$t_{\text{St}(\mathcal{T})} = \sharp \text{St}^\sim(\mathcal{T})\quad (6.5)$$

– число классов или типов звезд.

Теорема 6.1. 1. Среди звезд

$$\begin{aligned}\text{St}(\mathcal{T}, 0), \quad \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_0), \quad \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_1), \quad \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_2), \\ \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1), \quad \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_2), \quad \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)\end{aligned}\quad (6.6)$$

с внутренними вершинами (6.4) короны \mathbf{Cr} содержатся все типы многоугольных звезд из $\text{St}^\sim(\mathcal{T})$.

2. Число типов звезд (6.5) вычисляется по формуле

$$t_{\text{St}(\mathcal{T})} = 7 - \tau.\quad (6.7)$$

Здесь τ – количество равенств в последовательности

$$\mathbf{m}_0 \leq \mathbf{m}_1 \leq \mathbf{m}_2 \leq \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 \leq \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_2 \leq \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2\quad (6.8)$$

в случае основной серии (3.10), (3.15) и –

$$\mathbf{m}_0 \leq \mathbf{m}_1 \leq \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 < \mathbf{m}_2 \leq \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_2 \leq \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2\quad (6.9)$$

в случае дополнительной серии (3.10), (3.16). Таким образом, если $\tau = 0$, то имеет место взаимно однозначное соответствие

$$\text{St}^{\sim}(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \mathbf{Cr}^v \quad (6.10)$$

между типами звезд $\text{St}^{\sim}(\mathcal{T})$ и внутренними вершинами (6.4) короны \mathbf{Cr} .

Доказательство. 1. С помощью формулы (5.6) из теоремы 5.1 устанавливается соответствие между многоугольными звездами $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ в разбиении \mathcal{T} и звездами $\text{St}_{\mathcal{T}}(i)$, где $i \in I$, из таблиц 1 или 2 в случае основной или дополнительной серии соответственно. По этой же формуле определяется тип $\pm\text{St}_a, \text{St}_4^s$ звезды $\text{St}(\mathcal{T}, i) \in \mathcal{T}$, при этом типы звезд в таблицах 1, 2 находятся во взаимно однозначном соответствии с отрезками I_a, I'_a, I_4^s из (5.1), (5.2). В списке (6.6) представлены все звезды $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ с начальными номерами i из указанных отрезков. Поэтому звезды (6.6) содержат все возможные типы звезд $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ производного разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора \mathbb{T}^2 .

2. Все представленные в таблицах 1, 2 типы звезд $\pm\text{St}_a, \text{St}_4^s$ различны и, кроме того, данные типы нумеруются отрезками I_a, I'_a, I_4^s из (5.1), (5.2). Следовательно, если какой-то отрезок пустой, то отвечающий ему тип звезд отсутствует в производном разбиении \mathcal{T} . Отсюда и из утверждения 4 теоремы 5.1 выводим формулу (6.7). \square

Определенную в теореме 6.1 величину τ назовем *степенью вырождения* производного разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$. Если $\tau = 0$, то будем говорить, что разбиение \mathcal{T} *невырождено*. По формуле (6.7) в этом случае выполняется равенство $t_{\text{St}}(\mathcal{T}) = 7$, т.е. невырожденное разбиение имеет максимально возможное число типов звезд (6.5).

На рис. 7 изображена корона $\mathbf{Cr}^{[\xi]^6}$ производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]^6}$ основной серии, определенного в п. 2.4.

Числа j у внутренних вершин $x_j \in \mathbf{Cr}^v$ короны \mathbf{Cr} указывают на их порядки относительно сдвига $S = S_\alpha$ тора \mathbb{T}^2 . Согласно (2.24) производное разбиение $\mathcal{T}^{[\xi]^6}$ невырождено, так как для него $\tau = 0$. Поэтому по формуле (6.7) теоремы 6.1 разбиение $\mathcal{T}^{[\xi]^6}$ содержит $t_{\text{St}}(\mathcal{T}^{[\xi]^6}) = 7$ различных типов $\text{St}^{\sim}(\mathcal{T})$ многоугольных звезд $\text{St}(\mathcal{T}, i) \in \mathcal{T}^{[\xi]^6}$. По формуле (6.10) каждому типу звезд из $\text{St}^{\sim}(\mathcal{T})$ соответствует внутренняя вершина короны \mathbf{Cr} . По рис. 7 легко проверить, что многоугольные звезды $\text{St}(\mathcal{T}, i)$ с центрами $x_i \in \mathbf{Cr}^v$ в 7 внутренних вершинах короны \mathbf{Cr} принадлежат различным типам. Поскольку, как уже указывалось

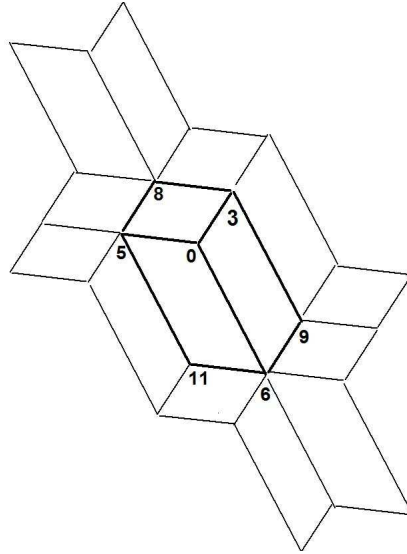


Рис. 7. Корона $\text{Cr}^{[\xi]_6}$ производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_6}$ основной серии.

различных типов 7, то тем самым получаем подтверждение теоремы 6.1 в случае производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_6}$ из основной серии.

Корона $\text{Cr}^{[\xi]_3}$ невырожденного производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_3}$ дополнительной серии, определенного в п. 4.2, представлена на рис. 8.

6.3. Корона и симметрии типов многоугольных звезд. Как уже указывалось в (3.20), (3.22) и (4.5) между многоугольными звездами $\pm \text{St}_a(i)$ существует симметрия. Теперь, воспользовавшись доказанной теоремой 6.1 с описанием типов звезд в производном разбиении \mathcal{T} , мы можем разбить данные типы на попарно симметричные.

Например, отображение (3.13) переводит отрезок I_3 в I'_3 . Первому отрезку соответствует звезда $\text{St}(\mathcal{T}, 0)$, а второму – звезда $\text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)$. Поэтому в силу (3.20) вторая звезда с точностью до трансляции получается из первой поворотом на 180° градусов, что обозначим $\text{St}(\mathcal{T}, 0) \leftrightarrow \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)$. Средний отрезок I_6 отображается сам в себя и ему соответствует звезда $\text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_2)$ в случае основной серии. Отсюда и формулы (3.22) следует, что указанная звезда центрально

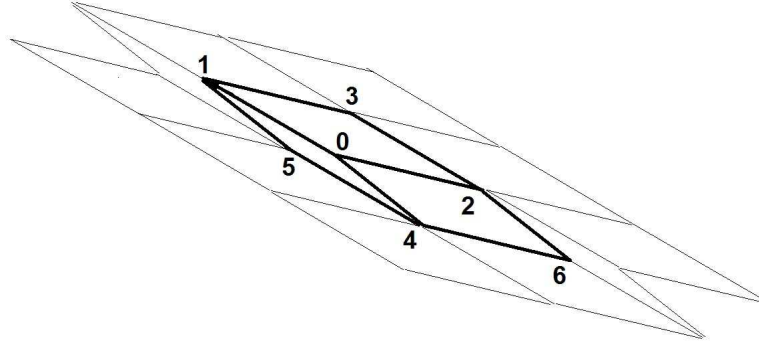


Рис. 8. Корона $\text{Cr}^{[\xi]_3}$ производного разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_3}$ дополнительной серии.

симметрична. Продолжая аналогичные рассуждения, приходим к следующему утверждению.

Предложение 6.1. *Между звезд (6.6) имеют место симметрии*

$$\begin{array}{lcl}
 \text{St}(\mathcal{T}, 0) & \leftrightarrow & \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2), \\
 \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_0) & \leftrightarrow & \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_2), \\
 \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_1) & \leftrightarrow & \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1) \\
 & & \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_2)
 \end{array} \quad (6.11)$$

в случае основной серии (3.10), (3.15) и –

$$\begin{array}{lcl}
 \text{St}(\mathcal{T}, 0) & \leftrightarrow & \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2), \\
 \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_0) & \leftrightarrow & \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_2), \\
 \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_1) & \leftrightarrow & \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_2) \\
 & & \text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1)
 \end{array} \quad (6.12)$$

в случае дополнительной серии (3.10), (3.16). Здесь звезды $\text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_2)$ и $\text{St}(\mathcal{T}, \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1)$ центрально симметричны.

□

Связь между типами многоугольных звезд или локальными окружениями была впервые открыта в [10], [14].

§7. ПОСТРОЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ РАЗБИЕНИЙ ТОРА

7.1. Принцип максимума. Из теоремы 5.1 вытекает *принцип максимума*, который можно сформулировать следующим образом: в производном разбиении $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора \mathbb{T}^2 из любой точки x_i с номером $i \in I$ выходит максимальное число допустимых в данной точке лучей \mathbf{w} из множества всех возможных лучей $\mathbf{V} = \{\pm \mathbf{v}_0, \pm \mathbf{v}_1, \pm \mathbf{v}_2\}$.

По определению (3.23) это означает, что если, скажем, луч $\mathbf{w} = \mathbf{v}_k$ (или $\mathbf{w} = -\mathbf{v}_k$) и $i + \mathbf{m}_k \in I$ (или соответственно $i - \mathbf{m}_k \in I$), то разбиению \mathcal{T} из точки x_i выходит луч \mathbf{w} и все такие лучи образуют лучевую звезду $\text{st}(i)$. При этом новая точка $x_i + \mathbf{w}$ имеет порядок $i + \mathbf{m}_k$ (или соответственно $i - \mathbf{m}_k$). Используя принцип максимума мы можем в любой точке x_i только по ее номеру i построить все выходящие из нее лучи $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$, не зная явного описания лучевых звезд $\text{st}(i)$ из п.п. 3.1, 3.2 и 4.1.

Начнем с точки $x_0 = 0$. Она является центром исходной $[\xi]_n$ -производной звезды \mathbf{v} из (2.12) или в других обозначениях – центром лучевой звезды $\text{st}_3 = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ из (3.1). Концами лучей \mathbf{v}_i являются точки x_i порядков $i = \mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$. Назовем x_0 и x_i центрами 0-слоя $eq(0, 0)$ и 1-слоя $eq(0, 1)$ соответственно. Нуль в обозначении слоя $eq(0, n)$ указывает начальную точку роста $x_0 = 0$. Поскольку в дальнейшем мы будем выбирать только нулевую точку, то для слоев введем сокращенное обозначение $eq(n) = eq(0, n)$. Слой $eq(1)$ содержит три центра x_i ($i = \mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$) и из каждого из них по принципу максимума можно построить выходящие лучи $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$. Процесс роста организуем *послойно*

$$eq(0) \Rightarrow eq(1) \Rightarrow \dots \Rightarrow eq(n) \Rightarrow \dots, \quad (7.1)$$

где $eq(n)$ обозначает n -ый слой или n -ое координационное окружение точки $x_0 = 0$. Объяснением обозначения $eq(n)$ служит связь n -ого слоя с эквидистантой точки 0, где расстояние между точками определяется соединяющими их геодезическими, составленными из лучей $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$, точнее – минимальным количеством таких лучей. В [11] было доказано, что предельной *формой роста*

$$eq(\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} eq(n) \quad (7.2)$$

является многоугольник $eq(\infty)$.

В результате послыного роста (7.1) получаем бесконечное дискретное множество точек

$$eq_\infty = \bigcup_{m=0,1,2,\dots} eq(m). \quad (7.3)$$

Из (7.3) и теоремы 5.1 следует, что множество eq_∞ периодически относительно трансляций на векторы квадратной решетки \mathbb{Z}^2 . Расширим eq_∞ до множества eq_∞^r , состоящего из пар (x, \mathbf{w}) , где $x \in eq_\infty$ и \mathbf{w} – лучи из \mathbf{V} , допустимые точкой x . Множество eq_∞^r однозначно задает многоугольное разбиение Eq_∞ плоскости \mathbb{R}^2 на параллелограммы, получающимися параллельными переносами параллелограммов \mathbf{T}_0 , \mathbf{T}_1 и \mathbf{T}_2 из (3.6). Также, как и множество точек (7.3), разбиение Eq_∞ периодически по модулю решетки \mathbb{Z}^2 .

Поставим себе цель – построить производное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора \mathbb{T}^2 , определенное в (2.17), (2.18). Данная задача сводится к выделению *фундаментальной области* \mathcal{F} в разбиении плоскости Eq_∞ . По теореме 5.1 (1) фундаментальную область \mathcal{F} можно составить из многоугольников P разбиения Eq_∞ . Два многоугольника $P, P' \in Eq_\infty$ назовем *эквивалентными* $P \sim P'$, если

$$P \equiv P' \pmod{\mathbb{Z}^2}. \quad (7.4)$$

Пусть $i(P)$ – множество номеров i всех вершин x_i многоугольника P . Тогда сравнение (7.4) выполняется тогда и только тогда, когда имеет место совпадение множеств

$$i(P) = i(P'). \quad (7.5)$$

Заметим, что построенное по принципу максимума множество точек eq_∞ из (7.3) есть не что иное, как множество вершин многоугольников P разбиения Eq_∞ . У каждой точки $x_i \in eq_\infty$ мы знаем только ее номер i . Номера i, j у двух точек $x_i, y_j \in eq_\infty$ совпадают $i = j$, только при условии

$$x_i \equiv y_j \pmod{\mathbb{Z}^2}. \quad (7.6)$$

Поэтому при построении фундаментальной области $\mathcal{F} \subset Eq_\infty$ удобно воспользоваться *номерным критерием* (7.5), а не метрическим (7.4). Фундаментальная область $\mathcal{F} \subset Eq_\infty$ состоит из максимально возможного числа попарно неэквивалентных многоугольников P разбиения Eq_∞ . Каждый такой многоугольник P сравним

$$P \equiv \mathbf{T}_k \pmod{\mathbb{Z}^2} \quad (7.7)$$

с одним из параллелограммов \mathbf{T}_0 , \mathbf{T}_1 или \mathbf{T}_2 из (3.6). Причем для каждого $k = 0, 1, 2$ многоугольников вида (7.7), содержащихся в фундаментальной области \mathcal{F} , ровно \mathbf{m}_k . Обычно \mathcal{F} выбирают связным множеством и оно должно разбивать плоскость

$$\mathbb{R}^2 = \coprod_{l \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{F}_l, \quad (7.8)$$

где $\mathcal{F}_l = \mathcal{F} + l$ и любые две области $\mathcal{F}_l, \mathcal{F}_{l'}$ в (7.8) с разными $l \neq l'$ не пересекаются по внутренним точкам. Разбиение (7.8) означает, что фундаментальная область \mathcal{F} является разверткой тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

После того, как построена фундаментальная область \mathcal{F} , можно перейти к искомому производному разбиению $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора \mathbb{T}^2 . Для этого в силу (7.8) достаточно, соблюдая правило (7.6), у фундаментальной области \mathcal{F} склеить граничные вершины $x_i, y_j \in \partial\mathcal{F}$ с совпадающими номерами $i = j$. Здесь через $\partial\mathcal{F}$ обозначена граница фундаментальной области \mathcal{F} .

7.2. Алгоритм построения производных разбиений тора. Используя приведенную выше конструкцию, сформулируем алгоритм построения производного разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора \mathbb{T}^2 . Поскольку он основывается на схеме послойного роста (7.1), то назовем его *LLG-алгоритм* (layer-by-layer growth).

LLG-алгоритм.

Шаг 1. По принципу максимума последовательно создаем (7.1) слои точек $eq(0), eq(1), \dots, eq(n)$ и запоминаем вместе с точками выходящие из них допустимые лучи $eq^r(0), eq^r(1), \dots, eq^r(n)$. Номер последнего слоя n выбирается так, чтобы выполнялось условие

$$\sharp eq_n > \mathbf{m}, \quad (7.9)$$

где

$$eq_n = eq(0) \cup eq(1) \cup \dots \cup eq(n)$$

– множество точек в n слоях и $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$.

Шаг 2. Пусть eq_n^r – множество пар (x, \mathbf{w}) , где $x \in eq_n$ и \mathbf{w} – лучи, допустимые точкой x . Далее множество eq_n^r перестраиваем в другое множество Eq_n^r , состоящее из многоугольников P и свободных лучей по его границе. Отметим, что переход $eq_n^r \Rightarrow Eq_n^r$ аналогичен описанному в п. 7.1 переходу $eq_\infty^r \Rightarrow Eq_\infty$, только в последнем случае отсутствуют свободные лучи.

Шаг 3. Используя номерной критерий (7.5), из множества Eg_n^r выделяем подмножество \mathcal{F}' из максимально возможного числа попарно неэквивалентных многоугольников P . Затем для каждого $k = 0, 1, 2$ вычисляем количество \mathbf{m}'_k содержащихся в \mathcal{F}' многоугольников P вида (7.7). В любом случае будут выполняться неравенства

$$\mathbf{m}'_0 \leq \mathbf{m}_0, \quad \mathbf{m}'_1 \leq \mathbf{m}_1, \quad \mathbf{m}'_2 \leq \mathbf{m}_2. \quad (7.10)$$

Если в (7.10) имеют место три равенства, то \mathcal{F}' будет фундаментальной областью $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$; и на этом шаге процесс построения фундаментальной области \mathcal{F} *заканчивается*. В противном случае возвращаемся к шагу 1 и добавляем еще один слой точек $eq(0), eq(1), \dots, eq(n), eq(n+1)$. После этого повторяем последовательность шагов 1, 2, 3.

Замечание 7.1. В *LLG*-алгоритме мы остановились на построении фундаментальной области \mathcal{F} , хотя целью было построение производного разбиения \mathcal{T} из (2.17), (2.18). Как уже отмечалось, фундаментальная область \mathcal{F} является разверткой тора \mathbb{T}^2 . Поэтому разбиение \mathcal{T} получается склейкой фундаментальной области \mathcal{F} . Поскольку работать со склейкой всё-таки неудобно (ее приходится рисовать в трехмерном пространстве), то поступают следующим образом:

- 1) фундаментальную область $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ окружают соседними с ней областями $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{l_s}$ из разбиения плоскости (7.8);
- 2) область \mathcal{F}_0 расширяют до множества

$$\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_0 \sqcup \mathcal{F}_{l_1} \sqcup \dots \sqcup \mathcal{F}_{l_s}. \quad (7.11)$$

- 3) затем в множестве (7.11) выделяют границу $\partial\widehat{\mathcal{F}}$ фундаментальной области \mathcal{F}_0 .

В расширенном множестве $\widehat{\mathcal{F}}$ легко видеть все вершины x_i , лучевые $st(\mathcal{T}, i)$ и многоугольные звезды $St(\mathcal{T}, i)$, где $i \in I$, содержащиеся в искомом разбиении \mathcal{T} тора \mathbb{T}^2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Arnoux, S. Labbe, *On some symmetric multidimensional continued fraction algorithms*. arXiv:1508.07814, August 2015.
2. V. Berthe, S. Labbe, *Factor complexity of S-adic words generated by the Arnoux-Rauzy-Poincaré algorithm*. — Advances in Applied Mathematics **63** (2015), 90–130.
3. V. Brun, *Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres*. — In: Treizieme congrès des mathématiciens scandinaves, tenu a Helsinki 18–23 aout (1957), 45–64. Mercators Tryckeri, Helsinki, 1958.

4. J. Cassaigne, *Un algorithme de fractions continues de complexité linéaire*. — October 2015. DynA3S meeting, LIAFA, Paris, October 12th (2015).
5. A. Nogueira, *The three-dimensional Poincaré continued fraction algorithm*. — Israel J. Math. **90**, no. 1–3 (1995), 373–401.
6. G. Rauzy, *Ensembles à restes bornés*. — Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux. 1984, exposé 24.
7. E. S. Selmer, *Continued fractions in several dimensions*. — Nordisk Nat. Tidskr. **9** (1961), 37–43.
8. F. Schweiger, *Multidimensional Continued Fraction*. — Oxford Univ. Press, New York (2000).
9. A. V. Shutov, A. V. Maleev, V. G. Zhuravlev, *Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry*. — Acta Crystallogr. **A66** (2010), 427–437.
10. V. G. Zhuravlev, *On additive property of a complexity function related to Rauzy tiling*. — Anal. Probab. Methods Number Theory, E. Manstavicius et al. (Eds), TEV, Vilnius, 2007, pp. 240–254.
11. В. Г. Журавлев, *Самоподобный рост периодических разбиений и графов*. — Алгебра и анализ **13** (2001), No. 2, 69–92.
12. В. Г. Журавлев, *Разбиения Розы и множества ограниченного остатка*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.
13. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи*. — Изв. РАН. Сер. мат. **71**, No. 2, (2007), 287–321.
14. В. Г. Журавлев, А. В. Малеев, *Функция сложности и форсинг в двумерном квазипериодическом разбиении Розы*. — Кристаллография **52** (2007), No. 4, 610–616.
15. В. Г. Журавлев, *Параметризация двумерного квазипериодического разбиения Розы*. — Алгебра и анализ **22** (2010), No. 4, 21–56.
16. В. Г. Журавлев, *Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 99–122.
17. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
18. В. Г. Журавлев, *Множества ограниченного остатка*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 93–174.
19. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
20. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
21. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения кубических иррациональностей в цепные дроби*. — Математика и информатика, К 80-летию со дня рождения А. А. Карацубы, Современ. пробл. мат., Вып. 23, МИАН, М., 2016, с. 41–66.
22. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения единиц алгебраических полей в цепные дроби*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 84–129.
23. В. Г. Журавлев, *Ядерные разложения чисел Пизо в многомерные цепные дроби*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 130–167.

24. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*. — 4-е изд. М., Наука 1978.

Zhuravlev V. G. Local algorithm for constructing the derived tilings of two-dimensional torus.

The local structure of the derived tilings \mathcal{T} of two-dimensional torus \mathbb{T}^2 is investigated. Polygonal types of the stars in these tilings are classified. It is proved that in the nondegenerate case the tilings \mathcal{T} contain 7 different types of stars and all types are representable by the stars with inner vertices from the crown \mathbf{Cr} of the tiling \mathcal{T} . These sets the maximum principle being the basis of the *LLG* algorithm for layer-by-layer growth of the derived tilings \mathcal{T} .

Владимирский государственный университет
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 09 июля 2019 г.