Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 479, 2019 г.

В. Г. Журавлев

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ МНОГОМЕРНЫМИ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ

Введение

0.1. Ядерно-модульный алгоритм. В настоящей статье предлагается *ядерно-модульный алгоритм* ($\mathcal{KM}$-*алгоритм*)

$$\mathcal{KM} : \frac{P_a}{Q_a} \longrightarrow \alpha \ \text{ при } \ a \to +\infty \tag{0.1}$$

разложения алгебраических чисел $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ в многомерные цепные дроби – последовательности рациональных чисел $\frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_1^a}{Q^a}, \ldots, \frac{P_d^a}{Q^a}\right)$ из $\mathbb{Q}^d$ с числителями $P_1^a, \ldots, P_d^a \in \mathbb{Z}$ и общим знаменателем $Q^a = 1, 2, 3, \ldots$ $\mathcal{KM}$-алгоритм (0.1) относится к классу настраиваемых алгоритмов. Он основывается на построении *локализованных единиц Пизо* $\zeta > 1$, для которых модули всех сопряженных $\zeta^{(i)} \neq \zeta$ содержатся в некоторой окрестности

$$\zeta^{-1/d-\theta} \leqslant |\zeta^{(i)}| \leqslant \zeta^{-1/d+\theta}, \tag{0.2}$$

где параметр $\theta > 0$ может принимать произвольное фиксированное значение. Алгоритм локализации единиц Пизо был ранее получен в [1].

В теореме 9.1 доказано, что если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ – вещественная полная точка степени $\deg(\alpha) = d + 1$, то $\mathcal{KM}$-алгоритм позволяет получить следующую аппроксимацию

$$\left|\alpha - \frac{P_a}{Q_a}\right| \leqslant \frac{c}{Q_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \tag{0.3}$$

для всех $a \geqslant a_{\alpha,\theta}$, где константы $a_{\alpha,\theta} > 0$ и $c = c_{\alpha,\theta} > 0$ не зависят от a. Здесь $|*|$ – какая-то метрика в $\mathbb{R}^d$ и дроби $\frac{P_a}{Q_a} \in \mathbb{Q}^d$ вычисляются с помощью некоторого рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами, определяемые выбором локализованной единицы ζ.

Ключевые слова: многомерные цепные дроби, наилучшие приближения, локализованные единицы Пизо.

0.2. Многомерные подходящие дроби и наилучшие приближения. Более того, в теореме 8.1 показано, что дроби $\frac{P_a}{Q_a}$ из (0.3) обладают *свойством минимальности*, означающим существование выпуклых d-мерных многогранников $\mathbf{T}^0, \mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2, \ldots$ таких, что для всех $a \geqslant c_\alpha$ выполняются следующие условия:

1) если $\frac{P}{Q}$ – рациональная точка с числителями $P \in \mathbb{Z}^d$ и знаменателем $1 \leqslant Q < \mathbf{m}^a$, где $Q = 1, 2, 3, \ldots$ и $\mathbf{m}^0 < \mathbf{m}^1 < \mathbf{m}^2 < \ldots$ – некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, то

$$\mathbf{v} \notin \mathbf{T}^{a\,\mathrm{int}}, \quad \text{если} \quad 1 \leqslant Q < \mathbf{m}^a, \tag{0.4}$$

где $\mathbf{v} = P - Q\alpha$ и $\mathbf{T}^{a\,\mathrm{int}}$ обозначает внутреннюю часть многогранника $\mathbf{T}^a$;

2) единственной принадлежащей многограннику $\mathbf{T}^a$ точкой

$$\mathbf{v}^a \in \mathbf{T}^{a\,\mathrm{int}} \quad \text{с коэффициентом} \quad Q = \mathbf{m}^a \tag{0.5}$$

является точка $\mathbf{v}^a = P_a - Q_a\alpha$.

Свойство минимальности (0.4), (0.5) и отмеченная выше рекуррентная порождаемость последовательности дробей в неравенствах (0.3) позволяют назвать $\frac{P_a}{Q_a}$ *многомерными подходящими дробями* для точки α или более точно – *d-мерными подходящими дробями* по аналогии с обычными подходящими дробями в теории цепных дробей (см., например, [2]). Заметим, что минимальность (0.4), (0.5) равносильна свойству дробей $\frac{P_a}{Q_a}$ быть *наилучшими приближениями* для алгебраической точки α относительно нормирующей последовательности многогранников $\mathbf{T}^0, \mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2, \ldots$ с объемами

$$\operatorname{vol}\mathbf{T}^0 > \operatorname{vol}\mathbf{T}^1 > \operatorname{vol}\mathbf{T}^2 > \ldots, \tag{0.6}$$

экспоненциально стремящимися к 0. Важно отметить, что при любом выборе локализованной единицы Пизо ζ $\mathcal{KM}$-алгоритм (0.1) позволяет получить наилучшие рациональные приближения $\frac{P_a}{Q_a}$ для алгебраической точки α степени $\deg(\alpha) = d + 1$ относительно стягивающейся (0.6) последовательности многогранников $\mathbf{T}^a$. Конкретный выбор единицы ζ определяет экспоненту θ и, следовательно, скорость приближения в (0.3). Если иррациональность α является вещественной квадратичной или комплексной кубической, т.е. имеющей комплексное сопряжение, то в неравнствах (0.3) можно положить $\theta = 0$.

0.3. Точки Фарея и подходящие дроби. Многогранники $\mathbf{T}^a$ строятся по звездам $\mathbf{r}^a$, представляющим собой некоторые наборы из $d + 1$

векторов. Сумма вершин многогранников $\mathbf{T}^a$, отвечающих звездам $\mathbf{r}^a$, – это и есть точки $\mathbf{v}^a = P_a - Q_a\alpha$ из (0.5), реализующие наилучшие приближения (0.3) для α. Аппроксимирующие многогранники $\mathbf{T}^a$ являются ядрами (karyon) $\mathbf{T}^a = \mathrm{Kr}\,\mathcal{T}^a$ [4] делящихся разбиений $\mathcal{T}_\alpha^a$ тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Последнее означает, что $\mathbf{T}^a$ представляют собою развертки тора $\mathbb{T}^d$ и, следовательно, они будут параллелоэдрами – многогранниками, разбивающими пространство $\mathbb{R}^d$ с помощью параллельных переносов. Сказанное объясняет первую часть в названии *ядерно-модульного* алгоритма (0.1). Вторая часть ассоциирована с алгебраическими модулями $\mathcal{M}_\zeta = \mathbb{Z}[1, \zeta, \ldots, \zeta^d]$ и $\mathcal{M}_\alpha = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d]$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, входящими в конструкцию алгоритма.

Также имеется двойственный подход [5], на основе которого строится *симплекс-ядерный* алгоритм, использующий вместо параллелоэдров $\mathbf{T}^a$ симплексы $\mathbf{s}^a$ с рациональными вершинами, суммы Фарея которых есть точки Фарея $\frac{P_a}{Q_a}$ – подходящие дроби в неравнствах (0.3). Сумма Фарея рациональных точек из $\mathbb{Q}^d$ определяется так же, как сумма Фарея обычных рациональных дробей (см., например, [3]). В многомерном случае вместо разбиений Фарея отрезка появляются указанные выше разбиения $\mathcal{T}_\alpha^a$ тора $\mathbb{T}^d$. Симплекс-ядерный алгоритм применим к любым вещественным числам $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$, не обязательно алгебраическим. Указанный метод был, в частности, протестирован на последовательности кубических точек $\alpha = (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2})$, где $2 \leqslant a \leqslant 10^3$ – натуральное число, отличное от полного куба. В этом случае среднее значение экспоненты θ в неравенствах (0.3) оказалось $\theta \approx 0.156$, что приводит к оценкам

$$\left|\sqrt[3]{a} - \frac{P_{a1}}{Q_a}\right| + \left|\sqrt[3]{a^2} - \frac{P_{a2}}{Q_a}\right| \leqslant \frac{c}{Q_a^\Theta} \tag{0.7}$$

с показателем $\Theta \approx 1.344$, где $P_{a1}, P_{a2} \in \mathbb{Z}$ и $Q_a = 1, 2, 3, \ldots$ Предлагаемый в настоящей работе $\mathcal{KM}$-алгоритм (0.1) позволяет получить в неравенствах (0.7) наилучшее возможное значение показателя $\Theta = 1.5$ для всех чисел $\alpha = (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2})$ с отличным от полного куба a.

Необходимо отметить другие направления [6]–[12], также использующее симплексы. Важное отличие нашего подхода состоит в том, что в $\mathcal{KM}$-алгоритм составной частью входит возможность оценки скорости приближения (0.3) подходящими дробями $\frac{P_a}{Q_a}$ через настраивающийся параметр θ, содержащийся в условии локализации (0.2).

§1. Единицы алгебраических полей

1.1. Основные единицы. Рассмотрим вещественное алгебраическое поле

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\theta) \subset \mathbb{R} \tag{1.1}$$

– алгебраическое расширение степени $d+1 = r+2c$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, где $r \geqslant 1$ и $2c$ обозначают число вещественных и комплексных сопряжений соответственно (подробности см., например, [13]). Выберем в $\mathbb{F}$ некоторую *полную систему основных единиц* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$, где $t = r + c - 1$. Они являются свободными образующими порождаемой ими *группы единиц* $\mathcal{E}$, имеющей максимально возможный *ранг* t. Заметим, что группа $\mathcal{E}$ не обязана совпадать с группой всех основных единиц $\mathcal{E}_{\max}$ поля $\mathbb{F}$. Требуется лишь конечность индекса $[\mathcal{E}_{\max} : \mathcal{E}] < \infty$.

Зададим отображение

$$\varepsilon \mapsto x(\varepsilon) = \bigl(\ln|\varepsilon^{(1)}|, \ldots, \ln|\varepsilon^{(r)}|, 2\ln|\varepsilon^{(r+1)}|\bigr), \ldots, 2\ln|\varepsilon^{(r+c)}|) \tag{1.2}$$

множества единиц $\mathcal{E}$ в пространство $\mathbb{R}^{t+1}$, где $\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(r)}$ – вещественные сопряженные значения для ε и $\varepsilon^{(r+1)}, \ldots, \varepsilon^{(r+c)}$ – комплексные, при этом полагаем $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon$. Отображение (1.2) будет вложением $x : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathbb{R}^{t+1}$ группы $\mathcal{E}$ в векторное пространство $\mathbb{R}^{t+1}$ с сохранением в них операций

$$x(\varepsilon \cdot \varepsilon') = x(\varepsilon) + x(\varepsilon'). \tag{1.3}$$

1.2. Единицы Пизо. Единицу $\zeta \in \mathcal{E}$ назовем *единицей Пизо*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\zeta = \zeta^{(1)} > 1 \quad \text{и} \quad |\zeta^{(i)}| < 1 \quad \text{для остальных сопряжений} \quad i > 1. \tag{1.4}$$

Обозначим через $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ подмножество всех единиц Пизо ζ из группы $\mathcal{E}$. Из определения (1.4) следует замкнутость множества $\mathcal{P}$ относительно умножения $\zeta \cdot \zeta' \in \mathcal{P}$ для любых $\zeta, \zeta' \in \mathcal{P}$. Поэтому множество $\mathcal{P}$ образует полугруппу без единицы, поскольку 1 не является единицей Пизо (1.4).

Предложение 1.1. 1. *Если ранг $t \geqslant 1$, то группа единиц $\mathcal{E}$ содержит единицу Пизо* (1.4) *и, значит, $\mathcal{P} \neq \varnothing$.*

2. *Любая единица Пизо $\zeta \in \mathcal{P}$ имеет степень*

$$\deg(\zeta) = d + 1. \tag{1.5}$$

Здесь степень $\deg(\zeta)$ числа ζ определяется равенством

$$\deg(\zeta) = \deg \mathbb{Q}(\zeta),$$

где справа указана степень $\deg \mathbb{Q}(\zeta) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ *расширения* $\mathbb{Q}(\zeta)$ *над полем* $\mathbb{Q}$.

Доказательство. См. [1]. □

1.3. Локализованные единицы Пизо. Из [14], п. 2.3 можно вывести следующее

Предложение 1.2. *Пусть* $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t\}$ *– некоторая фундаментальная система единиц вещественного алгебраического поля* $\mathbb{F}$ *из* (1.1) *степени* $d+1$,

$$\zeta = \varepsilon_1^{p_1} \cdots \varepsilon_t^{p_t} \tag{1.6}$$

– произвольная единица; и пусть $\zeta^{(i)}$ *– сопряженные единицы* ζ. *Тогда для любого фиксированного* $\theta > 0$ *найдутся такие целыми показателями* $p_1, \dots, p_t$ *в* (1.6)*, что будут выполняться следующие свойства*:

1) *число* ζ *является единицей Пизо* (1.4);

2) *модули всех ее сопряженных* $\zeta^{(i)}$ *содержатся в некоторой окрестности*

$$\zeta^{-1/d-\theta} \leqslant |\zeta^{(i)}| \leqslant \zeta^{-1/d+\theta} \tag{1.7}$$

для $2 \leqslant i \leqslant t+1$.

3) *если поле* $\mathbb{F}$ *является вещественным квадратичным или комплексным кубическим, т.е. имеющим комплексное сопряжение, то в неравнствах* (1.7) *можно положить* $\theta = 0$.

Единицы $\zeta > 1$, удовлетворяющие условию (1.7), будем называть *локализованными единицами Пизо.*

§2. Модульные матрицы Пизо

2.1. Модули. Пусть $\zeta \in \mathcal{P}$ – единица Пизо (1.4). По предложению 1.1 ее степени $1, \zeta, \dots, \zeta^d$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому алгебраическое поле $\mathbb{Q}(\zeta)$ совпадает

$$\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{F} \tag{2.1}$$

с полем (1.1) и *модуль*

$$\mathcal{M}_\zeta = \mathbb{Z}[1, \zeta, \dots, \zeta^d] \tag{2.2}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$ будет *полным*, т.е. числа $1, \zeta, \dots, \zeta^d$ образуют базис поля $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим линейное отображение

$$\mathcal{M}_\zeta \xrightarrow{\zeta} \mathcal{M}_\zeta : \ x \mapsto \zeta \cdot x. \tag{2.3}$$

Из определения (2.2) вытекает, что отображение (2.3) задает автоморфизм модуля $\mathcal{M}_\zeta$. Поскольку $1, \zeta, \dots, \zeta^d$ – базис модуля $\mathcal{M}_\zeta$, то найдется квадратная целочисленная матрица U_ζ размера $d+1$, удовлетворяющая условию

$$U_\zeta \widehat{\zeta} = \zeta \cdot \widehat{\zeta}, \tag{2.4}$$

где слева записано произведение матрицы U_ζ и столбца

$$\widehat{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^d \\ \vdots \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

высоты $d+1$. Матрица U_ζ называется *матрицей предствления* элемента ζ в базисе $1, \zeta, \dots, \zeta^d$.

2.2. Матрица перехода T. Пусть

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_d] \tag{2.6}$$

– произвольный полный модуль над кольцом $\mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{F}$. Точку $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и соответствующий набор чисел $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$, обладающие свойством (2.6), будем называть *полными*. Для полной точки α характерно выполнение соотношения

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha) \tag{2.7}$$

между $\mathbb{Q}[\alpha]$ – модулем (2.6) и $\mathbb{Q}(\alpha)$ – расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_d$.

Точку $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ назовем *иррациональной*, если выполняется условие:

$$\textit{числа} \;\; 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d \;\; \textit{линейно независимы над кольцом} \;\; \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Из (2.1) и (2.6), в частности, следует иррациональность (2.8) точки α, а из (2.7) – равенство $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{F}$. Определим для точки α ее *степень*

$$\deg \alpha = \deg \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \tag{2.9}$$

над полем $\mathbb{Q}$. Если α – полная точка, то из (2.1) и (2.6) следует $\deg \alpha = d+1$.

Далее, пусть T – *матрица перехода*

$$\widehat{\alpha} = T \widehat{\zeta} \tag{2.10}$$

от базиса полного модуля $\mathcal{M}_\zeta$ к базису модуля $\mathcal{M}_\alpha$. Здесь столбец $\widehat{\alpha}$ определяется по модулю $\mathcal{M}_\alpha$ добавлением единицы

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Матрица перехода T имеет рациональные коэффициенты. Кроме того, поскольку модуль $\mathcal{M}_\alpha$ также полный, то матрица T обратима и, значит, она принадлежит группе матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q})$, состоящей из рациональных квадратных матриц U размерности $d+1$ с определителем $\det T \neq 0$.

2.3. Модульные матрицы. Воспользуемся (2.10) и подставим $\widehat{\zeta} = T^{-1}\widehat{\alpha}$ в равенство (2.4). Имеем

$$U_\zeta T^{-1}\widehat{\alpha} = \zeta \cdot T^{-1},$$

откуда для столбца $\widehat{\alpha}$ выводим равенство

$$M_\alpha \widehat{\alpha} = \zeta \cdot \widehat{\alpha} \tag{2.12}$$

с рациональной матрицей

$$M_\alpha = T U_\zeta T^{-1}, \tag{2.13}$$

сопряженной унимодулярной матрице U_ζ. Для модуля $\mathcal{M}_\alpha$ из (2.6), матрицу, обладающую свойством (2.12), назовем *модульной матрицей.*

2.4. Унимодулярные модульные матрицы. *Уровень*

$$l(T) = t \tag{2.14}$$

невырожденной рациональной матрицы T определяется как наименьшее натуральное число t с условием, что $T^* = t \cdot T^{-1}$ – целочисленная матрица.

Нам потребуется еще *показатель* $\nu_a(U_\zeta) = \nu$ унимодулярной матрицы U_ζ по модулю t – это такое наименьшее натуральное число ν, для которого выполняется сравнение

$$U_\zeta^\nu \equiv E \bmod t, \tag{2.15}$$

где $E = E_{d+1}$ – единичная матрица размера $d+1$. Указанное число ν существует и не превышает порядка конечной группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})$ матриц над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ с определителем $\det \equiv \pm 1 \bmod t$.

В [1] доказано следующее утверждение.

Предложение 2.1. 1. *Пусть* t *– уровень* (2.14) *матрицы* T *и* ν *– показатель унимодулярной матрицы* U_ζ *по модулю* t. *Тогда матрица*

$$\mathrm{P}_\alpha = M_\alpha^\nu \tag{2.16}$$

является унимодулярной.

2. *Пусть* $\mathcal{M}_\alpha$ *– произвольный полный модуль* (2.6) *из поля* $\mathbb{F}$. *Тогда имеет место равенство*

$$\mathrm{P}_\alpha \widehat{\alpha} = \lambda \cdot \widehat{\alpha}, \tag{2.17}$$

где $\widehat{\alpha}$ *– столбец* (2.11) *и*

$$\lambda = \zeta^\nu > 1 \tag{2.18}$$

– единица Пизо (1.4).

Матрицу P_α из (2.16) назовем *модульной матрицей Пизо* или кратко – *матрицей Пизо*. Если ζ является локализованной единицей Пизо (1.7), то P_α будем также называть *локализованной матрицей Пизо*.

Чтобы избежать рассмотрения вырожденных случаев, далее будем предполагать, что $\alpha \in \mathbb{R}^d$ является полной точкой степени $\deg(\alpha) = d+1$.

§3. Симплексы

3.1. Линейные унимодулярные преобразования. Основной областью для нас будет замкнутый d-мерный *единичный симплекс* $\triangle_\varepsilon = \triangle_\varepsilon^d$ с вершинами в точках

$$\varepsilon_0 = (0,\dots,0),\ \ \varepsilon_1 = (1,\dots,0),\ \ \dots,\ \ \varepsilon_d = (0,\dots,1) \tag{3.1}$$

из пространства $\mathbb{R}^d$.

Выделим в группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ с определителем ± 1 *подгруппу* $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$ из матриц

$$U = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$$

– произвольный целочисленный столбец. Определим действие группа G_0 на точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$U\alpha = V\alpha + L, \tag{3.3}$$

при этом α рассматривается как столбец

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}.$$

Таким образом, группа G_0, состоящая из матриц (3.2) и с представлением (3.3), соответствует целочисленным унимодулярным аффинным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$.

3.2. Базисный симплекс и суперсимплекс.

Предложение 3.1. *Если α – иррациональная точка, то существует такая матрица $U \in G_0$, что выполняется включение*

$$\alpha \in \triangle, \tag{3.4}$$

где через $\triangle$ обозначен симплекс $U\triangle^d_\varepsilon$.

Доказательство. См. [1]. □

Симплекс $\triangle$ из (3.4) назовем *базисным.* Его основное свойство состоит в том, что он является *унимодулярным*: векторы, выходящие из одной его вершины во все остальные вершины, образуют *унимодулярный базис*, т.е. некоторый базис d-мерной решетки $\mathbb{Z}^d$.

Условимся и далее под терминами *унимодулярный базис*, *унимодулярная матрица* и т.д. понимать базис решетки $\mathbb{Z}^d$, матрицу с целыми коэффициентами и определителем ± 1.

Базисный симплекс $\triangle$ имеет целочисленные вершины

$$v_i = Ue_i = \frac{P_i}{Q_i}, \tag{3.5}$$

где полагаем $Q_i = 1$ для всех $i = 0, 1, \dots, d$. Векторы

$$v'_i = v_i - v_0 = V\varepsilon_i \tag{3.6}$$

для $i = 1, \dots, d$ с матрицей $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ образуют унимодулярный базис. Поэтому симплекс (3.4) имеет объем

$$\operatorname{vol}\triangle = \frac{1}{d!}. \tag{3.7}$$

Далее выходящие из начала координат векторы и их концы будем отождествлять.

Определим следующий *суперсимплекс*

$$\widehat{\triangle} \subset \mathbb{R}^{d+1}. \tag{3.8}$$

Он имеет $d+2$ вершины: $d+1$ целочисленную вершину

$$\widehat{v}_i = \widehat{U}e_i = \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

с индексами $i = 0, 1, \dots, d$ и еще одну вершину в начале координат $0 \in \mathbb{R}^{d+1}$. Из (3.6) и (3.9) следует, что векторы $\widehat{v}_i = \widehat{v}_i - 0$ для $i = 0, 1, \dots, d$ образуют унимодулярный базис и поэтому суперсимплекс (3.8) имеет объем

$$\operatorname{vol}\widehat{\triangle} = \frac{1}{(d+1)!}. \tag{3.10}$$

§4. Центрированные унимодулярные базисы и звезды

4.1. Центрированный унимодулярный базис. Как уже было сказано, множество ребер

$$\widehat{V} = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_d\} \tag{4.1}$$

суперсимплекса $\widehat{\triangle}$ из (3.8) образуют унимодулярный базис в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$. Базисный симплекс $\triangle$ из (3.4) является гранью суперсимплекса $\widehat{\triangle}$ и этот симплекс $\triangle$ содержит в качестве внутренней точку α.

Такой $\widehat{\triangle}$ назовем *центрированным унимодулярным суперсимплексом* или кратко – *CU-суперсимплексом.* Ему отвечает *центрированный унимодулярный базис* $\widehat{V}$ из (4.1) (*CU-базис*), центрированный лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$. Последнее означает, что внутренняя область *конуса* $\mathbb{R}_+\widehat{V}$ содержит *луч* $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$.

4.2. Пространства. Введем следующие понятия:

$$\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}, \;\; \mathbf{K} = \mathbb{R}^{d} \tag{4.2}$$

– *суперпространство* и *ядерное пространство* (*karyon space*), вложенное

$$\mathbf{K} \;\hookrightarrow\; \mathbf{K}_0 \subset \mathbf{S} \tag{4.3}$$

в $\mathbf{S}$ как гиперплоскость

$$\mathbf{K}_0 = \{(x,0): \;\; x \in \mathbf{K}\} \tag{4.4}$$

– *ядерная гиперплоскость*.

4.3. Проекции. Определим следующие проекции:

$$\mathbf{S} \;\xrightarrow{\mathrm{pr}_0}\; \mathbf{K}_0 \;\xrightarrow{\kappa_0}\; \mathbf{K}, \tag{4.5}$$

где

$$\mathrm{pr}_0: \;\; (x_1,\ldots,x_d,x_{d+1}) \;\mapsto\; (x_1-\alpha_1 x_{d+1},\ldots,x_d-\alpha_d x_{d+1},0) \tag{4.6}$$

– параллельная проекция вдоль вектора $\widehat{\alpha}$ из (2.11) и

$$\kappa_0: \;\; (x_1,\ldots,x_d,0) \;\mapsto\; (x_1,\ldots,x_d) \tag{4.7}$$

– изоморфизм. Обозначим через

$$\kappa = \kappa_0 \circ \mathrm{pr}_0 \tag{4.8}$$

композицию отображений (4.6) и (4.7).

4.4. Звезды. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1,k_2\}$ из множества индексов $\{0,1,\ldots,d\}$. Пусть r_0, $r_1,\ldots,r_d$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$ и $\sigma' = \{k'_1,\ldots,k'_{d-1}\}$ – дополнительное к σ сочетение в $\{0,1,\ldots,d\}$. Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие $\sigma \Leftrightarrow \sigma'$. Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{r_0,r_1,\ldots,r_d\}$.

Определение 4.1. *Пусть любые $d-1$ вектора из $\{r_0,r_1,\ldots,r_d\}$ линейно независимы. Обозначим через $H_{\sigma'}$ гиперплоскость, проходящую через начало координат и содержащую векторы $r_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ'. Тогда такое множество векторов $\{r_0,r_1,\ldots,r_d\}$ назовем* звездой, *если для всех σ', когда $\sigma = \{k_1,k_2\}$ пробегает Σ, векторы r_{k_1}, r_{k_2} из $\{r_0,r_1,\ldots,r_d\}$ не принадлежат гиперплоскости $H_{\sigma'}$ и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H^+_{\sigma'}$ и $H^-_{\sigma'}$.*

Непосредственно из определения звезды следует, что любые d вектора из $r = \{r_0, r_1, \dots, r_d\}$ будут линейно независимы.

Объяснением названия звезды может служить следующий критерий.

Критерий 4.1. Обозначим через $\Delta(r)$ натянутый на векторы звезды r замкнутый симплекс, и пусть $\Delta^{\text{int}}(r)$ – внутренняя часть симплекса. Тогда условие на множество векторов r быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\text{int}}(r). \tag{4.9}$$

Пусть $\widehat{V}$ – центрированный унимодулярный базис (CU-базис), определенный в (4.1). Его проекция (4.8)

$$\kappa: \ \widehat{V} \ \to \ r \tag{4.10}$$

представляет собою множество $r = \{r_0, r_1, \dots, r_d\}$, состоящее из векторов

$$r_i = \kappa(\widehat{v}_i) = v_i - \alpha \tag{4.11}$$

для $i = 0, 1, \dots, d$ в ядерном пространстве $\mathbf{K}$ из (4.2), (4.3).

Предложение 4.1. *Если α – иррациональная точка* (2.8) *и $\widehat{V}$ – центрированный унимодулярный базис* (4.1)*, то множество векторов r из* (4.10) *образует звезду.*

Доказательство. См. [5]. □

§5. Проекция унимодулярного базиса

5.1. Произвольный центрированный унимодулярный базис. Пусть

$$\widehat{\mathbf{V}} = \{\widehat{\mathbf{v}}_0, \widehat{\mathbf{v}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{v}}_d\} \tag{5.1}$$

– произвольный центрированный лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}_-$ унимодулярный базис (CU-базис). Базис (5.1) образован векторами $\widehat{\mathbf{v}}_i$ с целыми координатами

$$\widehat{\mathbf{v}}_0 = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \\ Q_0 \end{pmatrix}, \ \widehat{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \\ Q_1 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \widehat{\mathbf{v}}_d = \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \\ Q_d \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Далее будем предполагать выполненным условие

$$Q_0 \geqslant 1, \ \ Q_1 \geqslant 1, \dots, \ \ Q_d \geqslant 1. \tag{5.3}$$

По определению CU-базиса, составленная из координат векторов (5.2) квадратная матрица

$$S = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \dots & P_{d1} \\ & & \dots & \\ P_{0d} & P_{1d} & \dots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

размера $d+1$ унимодулярна. Назовем S *матрицей базиса* $\widehat{\mathbf{V}}$ из (5.1).

5.2. Звезда как проекция унимодулярного базиса. Рассмотрим проекцию

$$\mathrm{pr}_0 : \ \widehat{\mathbf{V}} \ \to \ \mathbf{r} \tag{5.5}$$

относительно отображения (4.6). Множество $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_d\}$ состоит из векторов

$$\mathbf{r}_i = \mathrm{pr}_0(\widehat{\mathbf{v}}_i) = (P_i - Q_i\alpha, 0) \tag{5.6}$$

для $i = 0, 1, \dots, d$, расположенных в ядерной гиперплоскости $\mathbf{K}_0$ из (4.4), где

$$P_0 = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \end{pmatrix}, \ P_1 = \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \end{pmatrix}, \ \dots, \ P_d = \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

По предложению 4.1 множество $\mathbf{r}$ представляет собою звезду. Звезду $\mathbf{r}$, состоящую из лучей вида (5.6), будем называть *унимодулярной*.

5.3. Перекладывающиеся параллелоэдры. Определим для $m = 0, 1, \dots, d$ замкнутые d-мерные параллелепипеды

$$\mathbf{T}_m = \ \{\lambda_{k_1}\mathbf{r}_{k_1} + \dots + \lambda_{k_d}\mathbf{r}_{k_d}; \quad 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{5.8}$$

где $k_1, \dots, k_d$ – дополнительные к m индексы в $\{0, 1, \dots, d\}$. Если множество векторов $\mathbf{r}$ является звездой (см. определение 4.1), то объединение

$$\mathbf{T} = T(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_0 \cup \mathbf{T}_1 \cup \dots \cup \mathbf{T}_d \tag{5.9}$$

параллелепипедов (5.8) образует *параллелоэдр* [15] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} \mathbf{T}[l] \tag{5.10}$$

с помощью параллельных переносов $\mathbf{T}[l] = \mathbf{T} + l$ на векторы l некоторой полной решетки L. Причем различные многогранники $\mathbf{T}[l]$ из

(5.10) не имеют общих внутренних точек. Поэтому параллелоэдр $\mathbf{T}$ является разверткой некоторого d-мерного тора.

Для $d = 2$ параллелоэдр $\mathbf{T}$ из (5.9) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $d = 3$ – ромбододекаэдром Федорова [16], а для $d = 4$ – параллелоэдром Вороного [17].

Поскольку многогранник $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ порождается звездой $\mathbf{r}$, то будем называть его *r-параллелоэдром.*

Параллелоэдр $\mathbf{T}$ является *перекладывающимся* многогранником с векторами перекладывания $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d$. Это означает, что выполняются следующие свойства:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{T}_0 + \mathbf{r}_0) \cup (\mathbf{T}_1 + \mathbf{r}_1) \cup \ldots \cup (\mathbf{T}_d + \mathbf{r}_d), \tag{5.11}$$

при этом

$$(\mathbf{T}_i + \mathbf{r}_i)^{\text{int}} \cap (\mathbf{T}_j + \mathbf{r}_j)^{\text{int}} = \varnothing \text{ для любых } i \neq j. \tag{5.12}$$

Векторы $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d$ имеют *порядки*

$$\mathbf{m}_0 = Q_0, \;\; \mathbf{m}_1 = Q_1, \; \ldots, \;\; \mathbf{m}_d = Q_d, \tag{5.13}$$

определяемые коэффициентами Q_i в представлении (5.6), а сумма

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \ldots + \mathbf{m}_d \tag{5.14}$$

будет *порядком* r-параллелоэдра $\mathbf{T}$ из (5.9). Как и звезду $\mathbf{r}$ из (5.6), параллелоэдр $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ также будем называть *унимодулярным.*

В [18] доказано следующее свойство параллелоэдров $\mathbf{T}$.

Предложение 5.1. *Пусть $\mathbf{T}^{\text{int}}$ – внутренняя часть параллелоэдра $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ из* (5.9),

$$\widehat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ Q \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

– произвольный $(d+1)$-мерный вектор с целыми координатами $*, \ldots, Q \in \mathbb{Z}$; и пусть

$$\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}} = \widehat{\mathbf{v}}_0 + \widehat{\mathbf{v}}_1 + \ldots + \widehat{\mathbf{v}}_d = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_d \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

– сумма всех векторов CU-базиса $\widehat{\mathbf{V}} = \{\widehat{\mathbf{v}}_0, \widehat{\mathbf{v}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{v}}_d\}$ *из* (5.1)*, удовлетворяющего условию* (5.3)*. Тогда параллелоэдр* $\mathbf{T}$ *обладает следующим свойством:*

$$\mathbf{v} \notin \mathbf{T}^{\text{int}}, \quad \textit{если } 1 \leqslant Q < \mathbf{m}, \tag{5.17}$$

где $\mathbf{v} = \mathrm{pr}_0 \, \widehat{\mathbf{v}}$ *– проекция* (5.5) *вектора* $\widehat{\mathbf{v}}$ *на ядерную гиперплоскость* $\mathbf{K}_0$ *и* $\mathbf{m}$ *– порядок* (5.14) *развертки тора* $\mathbf{T}$*; единственным вектором* $\mathbf{v} = \mathrm{pr}_0 \, \widehat{\mathbf{v}}$ *с условием*

$$\mathbf{v} \in \mathbf{T}^{\text{int}} \quad \textit{и} \quad Q = \mathbf{m} \tag{5.18}$$

является вектор $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathbf{m}} = \mathrm{pr}_0 \, \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}}$.

Назовем $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}}$ из (5.16) *вектором Фарея* базиса $\widehat{\mathbf{V}} = \{\widehat{\mathbf{v}}_0, \widehat{\mathbf{v}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{v}}_d\}$. По определению, вектор $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}}$ имеет *порядок* $\mathbf{m}$.

Поставим звезде $\mathbf{r}$ из (5.5) в соответствие квадратную матрицу

$$s: \ \mathbf{r} \ \mapsto \ S = s(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \dots & P_{d1} \\ & & \dots & \\ P_{0d} & P_{1d} & \dots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

размера $d+1$ и назовем $S = s(\mathbf{r})$ *матрицей звезды* $\mathbf{r}$. Она совпадает с матрицей (5.4) базиса $\widehat{\mathbf{V}}$. Согласно (5.4) матрица (5.19) унимодулярна $S = s(\mathbf{r}) \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

Таким образом, в результате проекции (5.5) центрированного унимодулярного базиса $\widehat{\mathbf{V}}$ на ядерную гиперплоскость $\mathbf{K}_0$ из (4.4) получается унимодулярный r-параллелоэдр $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$. Как показано в [18], именно унимодулярность и обеспечивает выполнимость свойства минимальности (5.17), (5.18) параллелоэдра $\mathbf{T}$.

§6. Собственные подпространства

6.1. Разложение модульной матрицы Пизо. Для столбцов $\widehat{\alpha}$ из (2.11) и $\widehat{\zeta}$ из (2.5) определим квадратные матрицы

$$A = (\widehat{\alpha}^{(1)} \dots \widehat{\alpha}^{(d+1)}), \quad Z = (\widehat{\zeta}^{(1)} \dots \widehat{\zeta}^{(d+1)}) \tag{6.1}$$

порядка $d+1$. Матрица Z невырождена и, в силу равенства (2.10), имеем $A = TZ$. Поэтому матрица A также невырождена и, следовательно, ее столбцы образуют базис (A-базис) в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть P_α – модульная матрица Пизо (1.6). Из (2.16) получаем

$$\mathrm{P}_\alpha A \ = (\lambda^{(1)}\widehat{\alpha}^{(1)} \ \dots \ \lambda^{(d+1)}\widehat{\alpha}^{(d+1)}) \ = A\Lambda, \tag{6.2}$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda^{(d+1)} \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Отсюда для матрицы P_α выводим разложение

$$\mathrm{P}_\alpha = A\Lambda A^{-1}. \tag{6.4}$$

6.2. Собственные подпространства $\mathbf{E}_\pm$. Столбцы матрицы A из (6.1) упорядочим следующим образом

$$A = (\widehat{\alpha}^{(1)} \dots \widehat{\alpha}^{(i)} \dots \widehat{\alpha}^{(j)}\overline{\widehat{\alpha}}^{(j)} \dots), \tag{6.5}$$

где (i) – вещественные сопряжения, а (j) – комплексно сопряженные пары. Производя линейное преобразование

$$\widehat{\alpha}_+^{(j)} = \frac{1}{2}(\widehat{\alpha}^{(j)} + \overline{\widehat{\alpha}}^{(j)}), \;\; \widehat{\alpha}_-^{(j)} = \frac{1}{2i}(\widehat{\alpha}^{(j)} - \overline{\widehat{\alpha}}^{(j)}), \tag{6.6}$$

перейдем к *вещественной матрице*

$$A_{\mathbb{R}} = (\widehat{\alpha}^{(1)} \dots \widehat{\alpha}^{(i)} \dots \widehat{\alpha}_+^{(j)}\, \widehat{\alpha}_-^{(j)} \dots), \tag{6.7}$$

столбцы которой образуют базис вещественного суперпространства $\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}$. Разложим его в прямую сумму

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_+ \oplus \mathbf{E}_- \tag{6.8}$$

двух подпространств:

$$\mathbf{E}_+ = \mathbb{R}\,\widehat{\alpha}_-^{(1)} = \mathbb{R}\,\widehat{\alpha}_- \tag{6.9}$$

– *растягивающего* и

$$\mathbf{E}_- = \bigoplus_{i\neq 1} \mathbb{R}\widehat{\alpha}^{(i)} \oplus \bigoplus_j (\mathbb{R}\widehat{\alpha}_1^{(j)} \oplus \mathbb{R}\widehat{\alpha}_2^{(j)}) \tag{6.10}$$

– *сжимающего* (сжимающей гиперплоскости) с базисом из столбцов *урезанной* вещественной матрицы

$$A_{\mathbb{R},\geqslant 2} = (\dots\, \widehat{\alpha}^{(i)} \dots \widehat{\alpha}_1^{(j)}\widehat{\alpha}_2^{(j)} \dots). \tag{6.11}$$

6.3. Проекция на сжимающее подпространство. Разложим

$$\widehat{v} = A_{\mathbb{R}}\,\widehat{x} \tag{6.12}$$

произвольный вектор $\widehat{v}$ из суперпространства $\mathbf{S}$ по базису (6.7), где $\widehat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{d+1} \end{pmatrix}$ – координаты вектора $\widehat{v}$, записанные в виде столбца. Используя разложение $\mathbf{S} = \mathbf{E}_+ \oplus \mathbf{E}_-$ и представление (6.12), определим проекцию

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{E}_- \tag{6.13}$$

вдоль растягивающего подпространства $\mathbf{E}_+$ из (6.9) на пространство $\mathbf{E}_-$ из (6.10), полагая

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}(\widehat{v}) = \widehat{v}_-, \tag{6.14}$$

где $\widehat{v}_- = A_{\mathbb{R}}\,\widehat{x}_{\geqslant 2} = A_{\mathbb{R},\geqslant 2}\,x_{\geqslant 2}$, при этом

$$\widehat{x}_{\geqslant 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{d+1} \end{pmatrix}, \quad x_{\geqslant 2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{d+1} \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

Лемма 6.1. *Определенная в* (6.13) *проекция* $\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}$ *является линейным сюъективным отображением.*

Доказательство. Данная проекция в координатах (6.15) имеет вид $\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}(\widehat{x}) = \widehat{x}_{\geqslant 2}$, из которого вытекает утверждение леммы. □

6.4. Отображение $\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{S} & \xrightarrow{\mathrm{P}_\alpha} & \mathbf{S} & \\ \mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-} & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-} \\ & \mathbf{E}_- & \xrightarrow{\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}} & \mathbf{E}_- & \end{array} \tag{6.16}$$

в которой верхнее отображение задается унимодулярной матрицей P_α из (2.16), вертикальные стрелки обозначают сюръективную проекцию $\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}$ из (6.13), а нижнее отображение $\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}$ определим формулой

$$\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}\,\widehat{v}_- = \mathrm{P}_\alpha\,\widehat{v}_-, \tag{6.17}$$

где вектор $\widehat{v}_-$ принадлежит сжимающему пространству $\mathbf{E}_-$ из (6.10).

Лемма 6.2. 1. *Отображение* (6.17) *определено корректно.*

2. $\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}$ *является линейным изоморфизмом пространства* $\mathbf{E}_-$.

3. *Диаграмма* (6.16) *коммутативна, т.е. выполняется коммутационное соотношение*

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}(\mathrm{P}_\alpha\widehat{v}) = \mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}(\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}\widehat{v}) \tag{6.18}$$

для всех векторов $\widehat{v}$ *из суперпространства* $\mathbf{S}$.

Доказательство. Утверждения 1, 2. Используя разложение прямую сумму $\mathbf{S} = \mathbf{E}_+ \oplus \mathbf{E}_-$ из (6.8), любой вектор $\widehat{v}$ из $\mathbf{S}$ можно представить в виде $\widehat{v} = \widehat{v}_+ + \widehat{v}_-$, где $\widehat{v}_+ \in \mathbf{E}_+$, $\widehat{v}_- \in \mathbf{E}_-$. Согласно (6.2) подпространства $\mathbf{E}_+$, $\mathbf{E}_- \subset \mathbf{S}$ инвариантны

$$\mathrm{P}_\alpha\mathbf{E}_+ = \mathbf{E}_+, \quad \mathrm{P}_\alpha\mathbf{E}_- = \mathbf{E}_- \tag{6.19}$$

относительно линейного отображения P_α из диаграммы (6.16). Поэтому можем записать

$$\mathrm{P}_\alpha\widehat{v} = \mathrm{P}_\alpha\widehat{v}_+ + \mathrm{P}_\alpha\widehat{v}_-, \tag{6.20}$$

где $\mathrm{P}_\alpha\widehat{v}_+ \in \mathbf{E}_+$, $\mathrm{P}_\alpha\widehat{v}_- \in \mathbf{E}_-$. Отсюда следует корректность определения (6.17) отображения $\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}$ и линейность данного отображения. Утверждение о том, что $\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}$ является линейным изоморфизмом пространства $\mathbf{E}_-$, вытекает из простоты матрицы (6.3), т.е. различия ее собственных значений $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}$, если $i \neq j$.

Утверждение 3. Согласно (6.20), (6.14) и (6.19) имеем

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}(\mathrm{P}_\alpha\widehat{v}) = \mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}(\mathrm{P}_\alpha\widehat{v}_+ + \mathrm{P}_\alpha\widehat{v}_-) = \mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}(\mathrm{P}_\alpha\widehat{v}_-) = \mathrm{P}_\alpha\widehat{v}_-. \tag{6.21}$$

С другой стороны, по определениям (6.14) и (6.17) получаем

$$\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}(\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}\widehat{v}) = \mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}(\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}\widehat{v}_-) = \mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}\widehat{v}_- = \mathrm{P}_\alpha\,\widehat{v}_-. \tag{6.22}$$

Сравнивая (6.21) и (6.22) получаем (6.18). □

Согласно лемме 6.2 можем записать

$$\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}\mathbf{a} = \mathbf{a}M_{\mathbf{a}}, \tag{6.23}$$

где $\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}$ – ограничение на подпространство $\mathbf{E}_- \subset \mathbf{S}$ линейного отображения P_α из диаграммы (6.16), $\mathbf{a} = A_{\mathbb{R},\geqslant 2}$ – матрица размера $(d+1)\times d$, составленная из векторов матрицы (6.11), и $M_{\mathbf{a}}$ – матрица отображения $\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}$ в базисе $\mathbf{a}$. Заметим, что $M_{\mathbf{a}}$ является квадратной матрице размера d.

Если $\lambda^{(j)} = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$, то по (6.2) находим вещественную матрицу

$$M_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & 0 \\ & \lambda^{(i)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \Lambda^{(j)} & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{6.24}$$

с (2×2)-блоками

$$\Lambda^{(j)} = r_j \begin{pmatrix} \cos(a\varphi_j) & -\sin(a\varphi_j) \\ \sin(a\varphi_j) & \cos(a\varphi_j) \end{pmatrix}. \tag{6.25}$$

§7. Проекция на ядерное пространство

7.1. Проекция на ядерную гиперплоскость. Теперь определим проекцию

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}^{\mathbf{E}_-}: \quad \mathbf{E}_- \longrightarrow \mathbf{K}_0 \tag{7.1}$$

вдоль вектора $\widehat{\alpha}$ на ядерную гиперплоскость $\mathbf{K}_0$ из (4.4). Если воспользоваться координатами относительно единичного базиса

$$e_1 = (1,0,\dots,0),\ e_2 = (0,1,\dots,0),\ \dots,\ e_{d+1} = (0,0,\dots,1) \tag{7.2}$$

пространства $\mathbb{R}^{d+1}$, то по аналогии с (4.6) проекция $\mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}^{\mathbf{E}_-}$ примет вид

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}^{\mathbf{E}_-}: \quad (x_1,\dots,x_d,x_{d+1}) \mapsto (x_1-\alpha_1 x_{d+1},\dots,x_d-\alpha_d x_{d+1},0). \tag{7.3}$$

Поскольку вектор $\widehat{\alpha}$ не принадлежит гиперплоскостям $\mathbf{E}_-$ и $\mathbf{K}_0$, то справедлива следующая

Лемма 7.1. *Проекция* $\mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}^{\mathbf{E}_-}$ *из* (7.1) *задает линейный изоморфизм между сжимающей* $\mathbf{E}_-$ *и ядерной* $\mathbf{K}_0$ *гиперплоскостями.*

Замечание 7.1. Из определения (6.13) следует, что отображение $\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}$ также, как и отображение $\mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}^{\mathbf{E}_-}$, можно считать проекцией вдоль вектора $\widehat{\alpha}$.

7.2. Проекция на ядерное пространство. Зададим еще одно отображение

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}: \quad \mathbf{S} \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}} \mathbf{E}_- \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}^{\mathbf{E}_-}} \mathbf{K}_0 \tag{7.4}$$

на ядерную гиперплоскость $\mathbf{K}_0$ как композицию

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0} = \mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}^{\mathbf{E}_-} \circ \mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}. \tag{7.5}$$

Учитывая замечание 7.1 и определение (7.1), видим, что новое отображение $\mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}$ также является проекцией вдоль вектора $\widehat{\alpha}$.

Наконец, определим основное отображение

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{K}}: \quad \mathbf{S} \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}} \mathbf{K}_0 \xrightarrow{\kappa_0} \mathbf{K} \tag{7.6}$$

на ядерное пространство $\mathbf{K}$ из (4.2) или кратко –

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{K}} = \kappa_0 \circ \mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}, \tag{7.7}$$

где κ_0 – линейный изоморфизм (4.7).

7.3. Отображение P_0**.** Отобразим базисные векторы

$$\mathbf{a} = A_{\mathbb{R},\geqslant 2} = (\ldots \widehat{\alpha}^{(i)} \ldots \widehat{\alpha}_+^{(j)} \widehat{\alpha}_-^{(j)} \ldots)$$

пространства $\mathbf{E}_-$ на ядерную гиперплоскость $\mathbf{K}_0$ с помощью отображения (7.1). По лемме 7.1 получим базис

$$\pi\mathbf{a} = (\ldots\ \pi\widehat{\alpha}^{(i)}\ \ldots\ \pi\widehat{\alpha}_+^{(j)}\ \pi\widehat{\alpha}_-^{(j)}\ \ldots) \tag{7.8}$$

пространства $\mathbf{K}_0$, где воспользовались сокращением $\pi = \mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}^{\mathbf{E}_-}$ для отображения (7.1). Снова применяя лемму 7.1 можем определить линейное отображение P_0 с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{E}_- & \xrightarrow{\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}} & \mathbf{E}_- & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \pi \\ & \mathbf{K}_0 & \xrightarrow{\mathrm{P}_0} & \mathbf{K}_0 & \end{array} \tag{7.9}$$

Найдем матрицу $M_{\mathbf{e}_0}$ линейного отображения P_0:

$$\mathrm{P}_0\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0 M_{\mathbf{e}_0} \tag{7.10}$$

в базисе $\mathbf{e}_0 = (e_1\ \ldots\ e_d)$, составленном из первых d векторов базиса (7.2) пространства $\mathbb{R}^{d+1}$.

Лемма 7.2. 1. *Отображение* $\mathrm{P}_0 : \ \mathbf{K}_0 \longrightarrow \mathbf{K}_0$ *из диаграммы* (7.9) *является линейным изоморфизмом ядерной гиперплоскости* $\mathbf{K}_0$, *удовлетворяющим формуле коммутирования*

$$\pi(\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-} x) = \mathrm{P}_0(\pi x) \tag{7.11}$$

для всех векторов x *из пространства* $\mathbf{E}_-$.

2. *Для матрицы* $M_{\mathbf{e}_0}$ *из* (7.10) *имеет место формула*

$$M_{\mathbf{e}_0} = A_{\pi\mathbf{a}} M_{\mathbf{a}} A_{\pi\mathbf{a}}^{-1}, \tag{7.12}$$

при этом $M_{\mathbf{a}}$ – *диагональная матрица* (6.24) *и* $A_{\pi\mathbf{a}}$ – *матрица перехода от базиса* $\pi\mathbf{a}$ *из* (7.8) *к единичному базису* $\mathbf{e}_0$ *из* (7.10), *определяемая равенством*

$$\pi\mathbf{a} = \mathbf{e}_0\, A_{\pi\mathbf{a}}. \tag{7.13}$$

Доказательство. 1. Отображение P_0 – линейный изоморфизм в силу леммы 7.1 и второго свойства леммы 6.2, а формула коммутирования (7.11) вытекает из коммутативности диаграммы (7.9).

2. Линейное отображение P_0 в базисе $\pi\mathbf{a}$ из (7.8) имеет такую же матрицу $M_{\mathbf{a}}$ из (6.23), что и отображение $\mathrm{P}_\alpha|_{\mathbf{E}_-}$ в базисе $\mathbf{a} = A_{\mathbb{R},\geqslant 2}$. Отсюда и из (7.13) получаем формулу (7.12). $\square$

7.4. Преобразование Пизо ядерного пространства. Рассмотрим композицию коммутативных диаграмм (6.16) и (7.9). Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{S} & \xrightarrow{\mathrm{P}_\alpha} & \mathbf{S} & \\ \mathrm{pr}^{\mathbf{S}}_{\mathbf{K}_0} & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{pr}^{\mathbf{S}}_{\mathbf{K}_0} \\ & \mathbf{K}_0 & \xrightarrow{\mathrm{P}_0} & \mathbf{K}_0 & \end{array} \tag{7.14}$$

где $\mathrm{pr}^{\mathbf{S}}_{\mathbf{K}_0} = \pi \circ \mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}$.

Предложение 7.1. *Определим расширение*

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{S} & \xrightarrow{\mathrm{P}_\alpha} & \mathbf{S} & \\ \mathrm{pr}^{\mathbf{S}}_{\mathbf{K}} & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{pr}^{\mathbf{S}}_{\mathbf{K}} \\ & \mathbf{K} & \xrightarrow{\mathrm{P}} & \mathbf{K} & \end{array} \tag{7.15}$$

диаграммы (7.14) *с помощью изоморфизма* $\kappa_0 : \ \mathbf{K}_0 \longrightarrow \mathbf{K}$ *из* (4.7), *где*

$$\mathrm{pr}^{\mathbf{S}}_{\mathbf{K}} = \kappa_0 \circ \mathrm{pr}^{\mathbf{S}}_{\mathbf{K}_0}. \tag{7.16}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Отображение* P *является линейным изоморфизмом ядерного пространства* $\mathbf{K}$, *определенного в* (4.2), *а отображение* (7.16) *совпадает*

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{S}} = \kappa \tag{7.17}$$

с проекцией $\kappa : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{K}$ *вдоль вектора* $\widehat{\alpha}$ *из* (4.8).

2. *Выполняется формула коммутирования*

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{K}}(\mathrm{P}_\alpha x) = \mathrm{P}(\mathrm{pr}_{\mathbf{K}} x) \tag{7.18}$$

для всех векторов x *из суперпространства* $\mathbf{S}$.

3. *Матрица* $M_{\mathbf{e}}$ *линейного отображения* P:

$$\mathrm{P}\,\mathbf{e} = \mathbf{e} M_{\mathbf{e}} \tag{7.19}$$

в единичном базисе $\mathbf{e} = (e_1 \ \ldots \ e_d)$ *пространства* $\mathbf{K} = \mathbb{R}^d$ *вычисляется по формуле*

$$M_{\mathbf{e}} = A_{\pi\mathbf{a}} M_{\mathbf{a}} A_{\pi\mathbf{a}}^{-1}, \tag{7.20}$$

где $M_{\mathbf{a}}$ – *диагональная матрица* (6.24) *и* $A_{\pi\mathbf{a}}$ – *матрица из* (7.13).

Доказательство. Равенство (7.17) непосредственно вытекает из определений (6.13) и (7.1) проекций $\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_-}$ и $\mathrm{pr}_{\mathbf{K}_0}^{\mathbf{E}_-}$, а свойство отображению P быть линейным изоморфизмом пространства $\mathbf{K}$ и формула коммутирования (7.18) следуют из лемм 6.2 и 7.2.

Формула (7.20) для матрицы $M_{\mathbf{e}}$ есть ничто иное, как формула (7.12), сохраняющаяся при изоморфизме $\kappa_0 : \mathbf{K}_0 \longrightarrow \mathbf{K}$. □

Отображение P из диаграммы (7.15) назовем *преобразованием Пизо* ядерного пространства $\mathbf{K}$.

§8. Проекции базисов Пизо

8.1. Унимодулярные базисы Пизо $\widehat{V}_\alpha^a$. В качестве базиса $\widehat{\mathbf{V}}$ из (5.1) выберем базис $\widehat{V} = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_d\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$, определенный в (4.1). Множество (4.1) является унимодулярным базисом, центрированным лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$ и состоящим из векторов с целыми координатами

$$\widehat{v}_0 = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \\ Q_0 \end{pmatrix}, \ \widehat{v}_1 = \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \\ Q_1 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \widehat{v}_d = \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \\ Q_d \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

По определению составленная из координат квадратная матрица

$$S = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \dots & P_{d1} \\ & & \dots & \\ P_{0d} & P_{1d} & \dots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

размера $d+1$ унимодулярна. На базис (4.1) подействуем

$$\widehat{V}^a_\alpha = \mathrm{P}^a_\alpha \widehat{V} = \{\widehat{v}^a_0, \widehat{v}^a_1, \dots, \widehat{v}^a_d\} \tag{8.3}$$

матрицей Пизо P_α из (2.16) со степенями $a = 0, 1, 2, \dots$, где

$$\widehat{v}^a_i = \mathrm{P}^a_\alpha \widehat{v}_i \ \text{ для } \ i = 0, 1, \dots, d. \tag{8.4}$$

Поскольку матрица P_α невырождена, то $\widehat{V}^a_\alpha$ снова будут образовывать базисы в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$. Назовем их *базисами Пизо порядка a*. Данные базисы имеют унимодулярные матрицы

$$S^a = \begin{pmatrix} P^a_{01} & P^a_{11} & \dots & P^a_{d1} \\ & & \dots & \\ P^a_{0d} & P^a_{1d} & \dots & P^a_{dd} \\ Q^a_0 & Q^a_1 & \dots & Q^a_d \end{pmatrix}. \tag{8.5}$$

8.2. Звезды Пизо $\mathbf{r}^a$. Для каждого базиса $\widehat{V}^a_\alpha$ из (8.3) рассмотрим его проекцию

$$\kappa: \quad \widehat{V}^a_\alpha \ \to \ \mathbf{r}^a \tag{8.6}$$

относительно отображения (4.8). Множество $\mathbf{r}^a = \{\mathbf{r}^a_0, \mathbf{r}^a_1, \dots, \mathbf{r}^a_d\}$ состоит из векторов

$$\mathbf{r}^a_i = \kappa \widehat{v}^a_i = P^a_i - Q^a_i \alpha \tag{8.7}$$

для $i = 0, 1, \dots, d$, расположенных в ядерном пространстве $\mathbf{K}$ из (4.2), где

$$P^a_0 = \begin{pmatrix} P^a_{01} \\ \vdots \\ P^a_{0d} \end{pmatrix}, \quad P^a_1 = \begin{pmatrix} P^a_{11} \\ \vdots \\ P^a_{1d} \end{pmatrix}, \ \dots, \quad P^a_d = \begin{pmatrix} P^a_{d1} \\ \vdots \\ P^a_{dd} \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

– столбцы из (8.5). Как будет показано в предложении 8.1, множество $\mathbf{r}^a$ представляет собою звезду, а в силу унимодулярности матрицы (8.5) такая звезда $\mathbf{r}^a$ будет унимодулярной.

Предложение 8.1. 1. *При всех* $a = 0, 1, 2, \ldots$ *множество векторов* $\widehat{V}_\alpha^a$ *из* (8.3) *образует унимодулярный базис, центрированный лучом* $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$.

2. *Если степени* a *удовлетворяют неравенству*

$$a \geqslant l_\alpha(\triangle), \tag{8.9}$$

где граница $l_\alpha(\triangle) \geqslant 0$ *зависит от точки* α *и выбора базисного симплекса* $\triangle$ *в* (3.4), *то проекции*

$$\mathbf{r}^a = \kappa \widehat{V}_\alpha^a \tag{8.10}$$

образуют звезды.

Доказательство. 1. По определению (2.16) матрица Пизо P_α унимодулярна. А поскольку исходный базис $\widehat{V}_\alpha^0 = \widehat{V}$ также является унимодулярным, то отсюда вытекает унимодулярность всех аффинных образов $\widehat{V}_\alpha^a$ базиса $\widehat{V}$.

Условие центрированности базиса $\widehat{V}$ лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$ эквивалентно положительности $\nu_i > 0$ всех координат в разложении

$$\alpha = \nu_0\widehat{v}_0 + \nu_1\widehat{v}_1 + \ldots + \nu_d\widehat{v}_d. \tag{8.11}$$

Из разложения (8.11) и равенства (2.17) получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_\alpha^a\widehat{\alpha} = \lambda^a \cdot \widehat{\alpha} &= \nu_0\mathrm{P}_\alpha^a\widehat{v}_0 + \nu_1\mathrm{P}_\alpha^a\widehat{v}_1 + \ldots + \nu_d\mathrm{P}_\alpha^a\widehat{v}_d \\ &= \nu_0\widehat{v}_0^a + \nu_1\widehat{v}_1^a + \ldots + \nu_d\widehat{v}_d^a, \end{aligned}$$

откуда для вектора $\widehat{\alpha}$ следует еще одно разложение

$$\widehat{\alpha} = \frac{\nu_0}{\lambda^a}\,\widehat{v}_0^a + \frac{\nu_1}{\lambda^a}\,\widehat{v}_1^a + \ldots + \frac{\nu_d}{\lambda^a}\,\widehat{v}_d^a \tag{8.12}$$

относительно базиса $\widehat{V}_\alpha^a$ из (8.3) с координатами $\frac{\nu_i}{\lambda^a} > 0$ для $i = 0, 1, \ldots, d$, так как $\lambda > 1$ согласно (2.18). Из положительности координат в (8.12) вытекает центрированность лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$ базиса $\widehat{V}_\alpha^a$, что вместе с его унимодулярностью доказывет предложение 8.1.

2. Согласно [1] при соблюдении условия (8.9) будут выполняться неравенства

$$Q_0^a \geqslant 1, \;\; Q_1^a \geqslant 1, \ldots, \;\; Q_d^a \geqslant 1 \tag{8.13}$$

для координат Q_i^a из (8.5). Далее, учитывая (8.13), доказательство второго утверждения предложения проводится по схеме, приведенной в [5], предложение 3.1. □

Назовем степени a, для которых выполняется условие (8.9), *допустимыми.*

8.3. $\mathbf{r}^a$-параллелоэдры. Поскольку матрица S^a из (8.5) унимодулярна, то для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ звезда $\mathbf{r}^a$ из (8.6) также будет унимодулярной. Ей соответствует r-параллелоэдр

$$\mathbf{T}^a = T(\mathbf{r}^a) = \mathbf{T}_0^a \sqcup \mathbf{T}_1^a \sqcup \ldots \sqcup \mathbf{T}_D^a \tag{8.14}$$

– перекладывающаяся развертка тора с векторами перекладывания $\mathbf{r}_0^a, \mathbf{r}_1^a, \ldots, \mathbf{r}_D^a$ в (8.7). Согласно (8.7) данные векторы имеют порядки

$$\mathbf{m}_0^a = Q_0^a, \ \ \mathbf{m}_1^a = Q_1^a, \ldots, \ \ \mathbf{m}_d^a = Q_d^a \tag{8.15}$$

и их сумма

$$\mathbf{m}^a = \mathbf{m}_0^a + \mathbf{m}_1^a + \ldots + \mathbf{m}_d^a \tag{8.16}$$

будет *порядком* r-параллелоэдра $\mathbf{T}^a$ из (8.14).

Теорема 8.1. *Пусть $\mathbf{T}^{a\,\mathrm{int}}$ – внутренняя часть $\mathbf{r}^a$-параллелоэдра $\mathbf{T}^a$ из* (8.14)*, α – вещественная полная точка степени* $\deg(\alpha) = d + 1$*; и пусть $\mathbf{v} = P - Q\alpha$ – точка из ядерного пространства $\mathbf{K}$ с произвольными $P \in \mathbb{Z}^d$ и $Q = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ $\mathbf{r}^a$-параллелоэдры $\mathbf{T}^a$ удовлетворяют следующему свойству:*

$$\mathbf{v} \notin \mathbf{T}^{a\,\mathrm{int}}, \ \ \textit{если} \ 1 \leqslant Q < \mathbf{m}^a, \tag{8.17}$$

где a удовлетворяет неравенству $a \geqslant l_\alpha(\triangle)$ из (8.9) *и $\mathbf{m}^a$ – порядок* (8.16) *параллелоэдра $\mathbf{T}^a$; единственной принадлежащей параллелоэдру $\mathbf{T}^a$ точкой*

$$\mathbf{v}^a \in \mathbf{T}^{a\,\mathrm{int}} \ \ \textit{с коэффициентом} \ Q = \mathbf{m}^a \tag{8.18}$$

является точка

$$\mathbf{v}^a = \mathbf{r}_0^a + \mathbf{r}_1^a + \ldots + \mathbf{r}_d^a \ = P_a - Q_a\alpha, \tag{8.19}$$

где

$$Q_a = Q_0^a + Q_1^a + \ldots + Q_d^a = \mathbf{m}^a, \quad P_a = P_0^a + P_1^a + \ldots + P_d^a, \tag{8.20}$$

при этом Q_i^a – коэффициенты из (8.7) *и P_i^a – столбцы* (8.8).

2. *Параллелоэдры $\mathbf{T}^a$ связаны с начальным параллелоэдром $\mathbf{T}^0 = \mathbf{T}$ формулой*

$$\mathbf{T}^a = \mathrm{P}^a\mathbf{T}^0 = M_{\mathbf{e}}^a\mathbf{T}^0 \tag{8.21}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots,$ *где* P *– линейное отображение из диаграммы* (7.15), *а* $M_{\mathbf{e}}$ *– его матрица* (7.20).

Доказательство. 1. Для всех $a \geqslant l_\alpha(\triangle)$ будут выполняться неравенства (8.13) и, следовательно, для таких a будет выполняться условие (5.3), что позволяет применить предложение 7.1. Теперь свойства (8.17) и (8.18) будут следовать из предложения 5.1, если воспользоваться равенством (7.17) из предложения 7.1.

2. Первое равенство из (8.21) вытекает из коммутативной диаграммы (7.15) и формулы коммутирования (7.18). Второе равенство из (8.21) получается из равенства (7.19). □

Будем говорить, что r-параллелоэдр $\mathbf{T}^a$ обладает свойством *минимальности*, если он удовлетворяет условиям (8.17) и (8.18).

§9. Наилучшие приближения многомерными подходящими дробями

9.1. Оценка радиуса r-параллелоэдров. Определим *радиус* r-параллелоэдра $\mathbf{T}^a$, полагая

$$\varrho_a = \varrho(\mathbf{T}^a) = \max_{v \in \operatorname{ver} \mathbf{T}^a} |v|. \tag{9.1}$$

Здесь $\operatorname{ver} \mathbf{T}^a$ – множество вершин $\mathbf{T}^a$ и $|\cdot|$ обозначает *октаэдральную метрику*

$$|v| = |v_1| + \ldots + |v_d| \tag{9.2}$$

в пространстве $\mathbb{R}^d$, где $v = (v_1, \ldots, v_d)$. Укажем, что в обычных обозначениях метрика (9.2) есть ничто иное, как метрика $|v|_1$. Таким образом, по определению $\varrho_a = \varrho(\mathbf{T}^a)$ – это радиус минимального шара с центром в 0, содержащего параллелоэдр $\mathbf{T}^a$. Радиус шара измеряется в метрике (9.2).

Лемма 9.1. *Для всех* $a \geqslant l_\alpha(\triangle)$ *радиус* (9.1) *параллелоэдра* $\mathbf{T}^a$ *удовлетворяет неравенству*

$$\varrho_a = \varrho(\mathbf{T}^a) \leqslant c\,\lambda_{2,\max}^a, \tag{9.3}$$

в котором константа $c = c_\alpha > 0$ *не зависит от* $a = 0, 1, 2, \ldots$ *и* $0 < \lambda_{2,\max} < 1$ *определено равенством*

$$\lambda_{2,\max} = \max_{2 \leqslant j \leqslant d+1} |\lambda_j| = \max_{2 \leqslant j \leqslant d+1} |\lambda^{(j)}|. \tag{9.4}$$

Доказательство. Согласно (8.21) и (7.20) для $a \geqslant l_\alpha(\triangle)$ имеем $\mathbf{T}^a = M_{\mathbf{e}}^a \mathbf{T}^0$ с матрицей $M_{\mathbf{e}} = A_{\pi\mathbf{a}} M_{\mathbf{a}} A_{\pi\mathbf{a}}^{-1}$, подобной диагональной матрице $M_{\mathbf{a}}$ из (6.24). Поскольку собственные значения $\lambda^{(i)}$ матрицы $M_{\mathbf{a}}$ удовлетворяют неравенству $|\lambda^{(i)}| \leqslant \lambda_{2,\max}$, то отсюда получаем требуемое неравенство (9.3). $\square$

9.2. Рекуррентные последовательности. Пусть $\mathbf{v}_a$ – один из векторов унимодулярного базиса $\widehat{V}_\alpha^a$. Запишем его в виде целочисленного столбца

$$\mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} P_{a1} \\ \vdots \\ P_{ad} \\ Q_a \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Из определения (8.3) следует равенство

$$\mathbf{v}_a = \mathrm{P}_\alpha^a \mathbf{v}_0 \tag{9.6}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$, где $\mathbf{v}_0$ – соответствующий $\mathbf{v}_a$ вектор начального базиса $\widehat{V} = \widehat{V}_\alpha^0$ из (4.1). В [1] доказано, что столбцы $\mathbf{v}_a$ удовлетворяют рекуррентному соотношению.

Предложение 9.1. *Пусть матрица Пизо* P_α *имеет характеристический многочлен*

$$ch_{\mathrm{P}_\alpha}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \ldots - b_1 x - b_0. \tag{9.7}$$

Тогда столбцы $\mathbf{v}_a$ *из* (9.6) *удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$\mathbf{v}_{a+d+1} = b_d \mathbf{v}_{a+d} + \ldots + b_1 \mathbf{v}_{a+1} + b_0 \mathbf{v}_a \tag{9.8}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$ *Начальные условия*

$$\mathbf{v}_d = \mathrm{P}_\alpha^d \mathbf{v}_0, \ldots, \ \mathbf{v}_1 = \mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_0, \ \mathbf{v}_0 \tag{9.9}$$

задаются матрицей Пизо P_α *из* (2.16) *и столбцом* $\mathbf{v}_0$ *из* (9.5).

9.3. Рекуррентное соотношение для векторов Фарея. Для унимодулярного базиса $\widehat{V} = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_d\}$ из (4.1) определим его *вектор Фарея* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ как сумму

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} P_1^0 \\ \vdots \\ P_d^0 \\ Q^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \\ Q_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \\ Q_1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \\ Q_d \end{pmatrix} \tag{9.10}$$

всех векторов $\widehat{v}_i$ из $\widehat{V}$, где $Q = d+1$, так как по определению $Q_0 = Q_1 = \ldots = Q_d = 1$. Тогда соответствующий *вектор Фарея*

$$\mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} P_a \\ Q_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^a \\ \vdots \\ P_d^a \\ Q^a \end{pmatrix} = \widehat{v}_0^a + \widehat{v}_1^a + \ldots + \widehat{v}_d^a \tag{9.11}$$

базиса $\widehat{V}_\alpha^a = \mathrm{P}_\alpha^a \widehat{V} = \{\widehat{v}_0^a, \widehat{v}_1^a, \ldots, \widehat{v}_d^a\}$ из (8.3) будет получаться из вектора Фарея $\mathbf{v}_0$ базиса $\widehat{V}_\alpha^0$ с помощью матрицы Пизо P_α из (2.16):

$$\mathbf{v}_a = \mathrm{P}_\alpha^a \mathbf{v}_0 \tag{9.12}$$

согласно формуле (8.3). Следовательно, можем записать

$$\mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} P_a \\ Q_a \end{pmatrix} = \mathrm{P}_\alpha^a \begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \tag{9.13}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь в правой части равенства

$$P_0 = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \end{pmatrix} \tag{9.14}$$

– сумма всех вершин начального унимодулярного базисного симплекса $\triangle$ из (3.4) и

$$Q_0 = d+1 \tag{9.15}$$

Предложение 9.2. *Пусть матрица Пизо* P_α, *определенная в* (2.16), *имеет характеристический многочлен* $ch_{\mathrm{P}_\alpha}(x)$ *из* (9.7). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для всех* $a = 0, 1, 2, \ldots$ *столбцы* $\begin{pmatrix} P_a \\ Q_a \end{pmatrix}$ *из* (9.13) *имеют целые рациональные коэффициенты.*

2. *Данные столбцы удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$\begin{pmatrix} P_{a+d+1} \\ Q_{a+d+1} \end{pmatrix} = b_d \begin{pmatrix} P_{a+d} \\ Q_{a+d} \end{pmatrix} + \ldots + b_1 \begin{pmatrix} P_{a+1} \\ Q_{a+1} \end{pmatrix} + b_0 \begin{pmatrix} P_a \\ Q_a \end{pmatrix} \tag{9.16}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$ *с начальными условиями*

$$\begin{pmatrix} P_d \\ Q_d \end{pmatrix} = \mathrm{P}_\alpha^d \begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \mathrm{P}_\alpha \begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}, \tag{9.17}$$

задающимися матрицей Пизо P_α *и столбцом* $\begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}$ *из* (9.13)–(9.15).

Доказательство. 1. Целочисленность столбцов $\begin{pmatrix} P_a \\ Q_a \end{pmatrix}$ вытекает непосредственно из свойства целочисленности вершин базисного симплекса $\triangle$, формулы (9.13) и равенства (9.15).

2. Столбцы $\begin{pmatrix} P_a \\ Q_a \end{pmatrix}$ связаны между собою формулой (9.13). Поэтому мы можем применить предложение 9.1, из которого выводим рекуррентное соотношение (9.16) с начальными условиями (9.17). Характеристический многочлен $ch_{\mathrm{P}_\alpha}(x)$ в (9.7) имеет целые коэффициенты. Отсюда, (9.16) и (9.17) также следует целочисленность столбцов $\begin{pmatrix} P_a \\ Q_a \end{pmatrix}$. $\square$

9.4. Асимптотическое разложение для координат Q_a. . Применяя метод, использованный в [14] при доказательстве леммы 9.1, можно доказать следующий результат об асимптотическом поведении последних координат Q_a векторов $\mathbf{v}_a$ из (9.5).

Лемма 9.2. *Для координат Q_a имеет место асимптотическое разложение*

$$Q_a = k\lambda^a + \mathcal{O}(\lambda_{2,\max}^a) \tag{9.18}$$

при $a \to +\infty$. Здесь $\lambda > 1$ – единица Пизо (2.18)*, значение $\lambda_{2,\max}$, удовлетворяющее неравенству $|\lambda_{2,\max}| < 1$, определено равенством* (9.4) *и коэффициент $k > 0$ в разложении* (9.18) *не зависит от a.*

9.5. Основная теорема об аппроксимации. В теореме 8.1 было доказано, что r-параллелоэдры $\mathbf{T}^a$ обладают свойством минимальности (8.17) и (8.18). Используя включение (8.18), можно получить оценку скорости приближения точки α рациональными дробями $\frac{P_a}{Q_a}$ в терминах их знаменателей Q_a.

Теорема 9.1. *Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ – вещественная полная точка степени $\deg(\alpha) = d + 1$, то для любого фиксированного $\theta > 0$ существует такая локализованная матрица Пизо P_α из предложения* 2.1*, что выполняются неравенства*

$$\left|\alpha - \frac{P_a}{Q_a}\right| \leqslant \frac{c}{Q_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \tag{9.19}$$

для всех $a \geqslant a_{\alpha,\theta}$, где константы $a_{\alpha,\theta} > 0$ и $c = c_{\alpha,\theta} > 0$ не зависят от a. Здесь подходящие дроби $\frac{P_a}{Q_a}$ вычисляются с помощью рекуррентного соотношения (9.16).

Доказательство. Учитывая включение (8.18), можем записать

$$\left|\alpha - \frac{P_a}{Q_a}\right| \leqslant \frac{\varrho(\mathbf{T}^a)}{Q_a} = \frac{\varrho_a}{Q_a},$$

где a уловлетворяет неравенству $a \geqslant l_\alpha(\triangle)$. Отсюда и леммы 9.1 выводим неравенство

$$\left|\alpha - \frac{P_a}{Q_a}\right| \leqslant \frac{c_\alpha\, \lambda^a_{2,\max}}{Q_a}. \tag{9.20}$$

Согласно предложению 1.2 для любого фиксированного $\theta > 0$ существует такая локализованная матрица Пизо P_α, что выполняются неравенства (1.7). По определению (2.18) имеем $\lambda = \zeta^\nu > 1$ – единица Пизо (1.4). Поэтому, используя предложение 1.2, оцениваем значение $\lambda_{2,\max}$, определенное в (9.4):

$$\lambda_{2,\max} = \max_{2\leqslant i\leqslant d+1} |\lambda^{(i)}| \leqslant \lambda^{-1/d+\theta} \tag{9.21}$$

с любым фиксированным показателем $\theta > 0$. Теперь применяя (9.20), лемму 9.2 и формулу (9.21), приходим к нужному неравенству (9.19). □

Замечание 9.1. Описанный в теореме 9.1 способ нахождения наилучших приближений (9.19) алгебраической точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ через рациональные дроби $\frac{P_a}{Q_a} \in \mathbb{Q}^d$, вычисляемые с помощью рекуррентного соотношения (9.16), представляет собой тот самый *ядерно-модульный алгоритм* (*$\mathcal{KM}$-алгоритм*), речь о котором шла во введении (0.1).

9.6. Точки Фарея. Точку $\frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_1^a}{Q^a}, \dots, \frac{P_d^a}{Q^a}\right)$ назовем *точкой Фарея* r-параллелоэдра $\mathbf{T}^a$ по аналогии с [1]. Она вычисляется по коэффициентам точки $\mathbf{v}^a = P_a - Q_a\alpha$. Согласно (8.19) точка $\mathbf{v}^a$ получается как сумма вершин параллелоэдра $\mathbf{T}^a$, отвечающих звезде $\mathbf{r}^a$ из (8.6). Если перейти к неоднородной записи

$$\frac{\mathbf{v}^a}{Q_a} = \frac{P_a}{Q_a} - \alpha, \tag{9.22}$$

то выделяется дробь $\frac{P_a}{Q_a}$ и аппроксимируемая ею точка α. В [1] вместо параллелоэдров $\mathbf{T}^a$ используются симплексы $\mathbf{s}^a$ с рациональными вершинами, суммы Фарея которых есть точки Фарея $\frac{P_a}{Q_a}$ – подходящие дроби в неравнствах (9.19). Напомним, что операция *сложения Фарея* обычных дробей определяется следующим образом $\frac{a}{b} \widehat{+} \frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d}$ (см., например, [3]).

При переходе от параллелоэдров $\mathbf{T}^a$ к симплексам $\mathbf{s}^a$ или в алгебраических обозначениях (9.22) свойство минимальности (8.17), (8.18) переформулируется следующим образом. Точка $\frac{P_a}{Q_a}$ является единственной рациональной точкой из $\mathbb{Q}^d$, содержащейся внутри симплекса $\mathbf{s}^s$:

$$\frac{P_a}{Q_a} \in \mathbf{s}^{a\,\mathrm{int}} \text{ со знаменателем } \quad 1 \leqslant Q_a \leqslant \mathbf{m}^a, \tag{9.23}$$

где $\mathbf{m}^a$ – *порядок* симплекса $\mathbf{s}^s$, по определению равный порядку (8.16) параллелоэдра $\mathbf{T}^a_\alpha$. Точки Фарея $\frac{P_a}{Q_a}$ представляют собою *многомерные подходящие дроби*, вычисляемые с помощью рекуррентного соотношения (9.16). Для них, как и в одномерном случае (см., например, [2]), выполняется свойство минимальности (8.17), (8.18) или эквивалентное ему свойство (9.23).

9.7. Диофантова экспонента алгебраических точек. *Диофантову экспоненту* для вещественной точки $\alpha \in \mathbb{R}^d$ определим как супремум показателей Θ, для которых неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p_a}{q_a}\right| \leqslant \frac{1}{q_a^{1+\Theta}} \tag{9.24}$$

имеет беконечно много решений $p_a \in \mathbb{Z}^d$ и $q_a = 1, 2, 3, \dots$

Следствие 9.1. *Для вещественной полной точки* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ *степени* $\deg(\alpha) = d + 1$ *диофантова экспонента* Θ *из* (9.24) *равна*

$$\Theta = \frac{1}{d}. \tag{9.25}$$

Доказательство. Неравенство $\Theta \leqslant \frac{1}{d}$ хорошо известно (см., например, [19], гл. V-3). С другой стороны, оценка снизу $\Theta \geqslant \frac{1}{d} - \theta$, где $\theta > 0$ – любое фиксированное число, получается из теоремы 9.1, что приводит к равенству (9.25). □

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
2. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби.* 4-е изд. М., Наука, 1978.
3. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел.* 5-е изд. М., Наука, 1972.
4. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.

5. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби.* Современные проблемы математики, МИАН **299** (2017), 1–20.
6. V. Brun, *Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres.* — In Treizieme congres des mathematiciens scandinaves, tenu a Helsinki 18-23 aout (1957), 45–64. Mercators Tryckeri, Helsinki, 1958.
7. E. S. Selmer, *Continued fractions in several dimensions.* — Nordisk Nat. Tidskr. **9** (1961), 37–43.
8. A. Nogueira, The three-dimensional Poincare continued fraction algorithm. — Israel J. Math. **90**, No. 1-3 (1995), 373–401.
9. F. Schweiger, *Multidimensional Continued Fraction.* Oxford Univ. Press, New York, 2000.
10. V. Berthe, S. Labbe, *Factor complexity of S-adic words generated by the arnoux–rauzy–poincare algorithm.* — Advances in Applied Mathematics **63** (2015), 90–130.
11. P. Arnoux, S. Labbe, *On some symmetric multidimensional continued fraction algorithms.* — arXiv:1508.07814, August 2015.
12. J. Cassaigne, *Un algorithme de fractions continues de complexite lineaire.* — October 2015. DynA3S meeting, LIAFA, Paris, October 12th, 2015.
13. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* Второе изд. М.: Наука, 1972.
14. В. Г. Журавлев, *Локализованные единицы Пизо и совместные приближения алгебраических чисел.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **458** (2017), 104–134.
15. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
16. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах.* М., 1953.
17. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, том 2. Киев, 1952.
18. В. Г. Журавлев, *Унимодулярность индуцированных разбиений тора.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **469** (2018), 96–137.
19. Дж. В. С. Касселс, Введение в теорию диофантовых приближений, М.: Из-во иностранной литературы, 1961.

Zhuravlev V. G. The best approximation of algebraic numbers by multidimensional continued fractions.

A karyon-modular algorithm ($\mathcal{KM}$-algorithm) is proposed for decomposition of algebraic numbers $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ from $\mathbb{R}^d$ to multidimensional continued fractions, that are a sequence of rational numbers

$$\frac{P_a}{Q_a} = \Big(\frac{P_1^a}{Q^a}, \ldots, \frac{P_d^a}{Q^a}\Big), \qquad a = 1, 2, 3, \ldots,$$

from $\mathbb{Q}^d$ with numerators $P_1^a, \ldots, P_d^a \in \mathbb{Z}$ and the common denominator $Q^a = 1, 2, 3, \ldots$ The $\mathcal{KM}$-algorithm belongs to a class of tuning algorithms. It is based on the construction of localized Pisot units $\zeta > 1$,

for which the moduli of all conjugates $\zeta^{(i)} \neq \zeta$ are contained in the θ-neighbourhood of the number $\zeta^{-1/d}$, where the parameter $\theta > 0$ can take an arbitrary fixed value.

It is proved that if α is a real algebraic point of degree $\deg(\alpha) = d + 1$, then $\mathcal{KM}$ - algorithm allows to obtain the following approximation

$$\left|\alpha - \frac{P_a}{Q_a}\right| \leqslant \frac{c}{Q_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}}$$

for all $a \geqslant a_{\alpha,\theta}$, where the constants $a_{\alpha,\theta} > 0$ and $c = c_{\alpha,\theta} > 0$ do not depend on $a = 1, 2, 3, \ldots$ and the convergent fractions $\frac{P_a}{Q_a}$ are calculated by means of some recurrence relation with constant coefficients determined by the choice of the localized units ζ.

Владимирский государственный университет
улица Строителей 11,
600024, Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 18 апреля 2019 г.