Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 479, 2019 г.

В. Г. Журавлев

ДВОЙСТВЕННЫЕ ДИОФАНТОВЫ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Введение

0.1. Унимодулярные модульные матрицы. Рассмотрим произвольное алгебраическое поле $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ – алгебраическое расширение степени $d+1 \geqslant 2$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Обозначим через $\mathcal{E}$ группу единиц поля $\mathbb{F}$, не являющихся корнями из 1. Единицу $\zeta \in \mathcal{E}$ назовем максимальной, если deg $\mathbb{Q}(\zeta) = d+1$, где слева указана степень $\deg \mathbb{Q}(\zeta) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ расширения $\mathbb{Q}(\zeta)$ над полем $\mathbb{Q}$. Если единица ζ максимальная, то $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(\alpha)$. В предложении 1.1 доказано существование унимодулярной матрицы $\mathrm{P}_\alpha \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, для которой столбец

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}$$

является собственным

$$\mathrm{P}_\alpha \widehat{\alpha} = \lambda \cdot \widehat{\alpha} \tag{0.1}$$

с собственным значением $\lambda = \zeta^\nu$, где ν –целая степень. Матрица P_α называется унимодулярной модульной матрицей или кратко – $\mathcal{E}$-матрицей.

0.2. $\mathcal{L}$-алгоритм. В работе рассматривается некоторый алгоритм ($\mathcal{L}$-алгоритм), с помощью которого точке α и единице ζ ставится в соответствие тройка

$$\mathcal{L} : \{\alpha, \zeta\} \Rightarrow \{\mathrm{P}_\alpha, \mathcal{F}^\perp, \mathcal{F}^{*\perp}\}, \tag{0.2}$$

содержащая $\mathcal{E}$-матрицу P_α из (0.1) и пространства $\mathcal{F}^\perp, \mathcal{F}^{*\perp}$ двойственных линейных форм с вещественными коэффициентами. Размерности данных пространств $k^\perp$ и $k^{*\perp}$ связаны равенством $k^\perp + k^{*\perp} = d+1$ и зависят от распределения сопряженных значений $\zeta^{(i)}$ единицы ζ на

Ключевые слова: диофантовы приближения линейных форм, наилучшие приближения, $\mathcal{L}$-алгоритм.

два класса: $|\zeta^{(i_+)}| > 1$ и $|\zeta^{(i_-)}| < 1$. В каждом из пространств $\mathcal{F}^{\perp}$ и $\mathcal{F}^{*\perp}$ выделим по системе линейных форм

$$\mathcal{S}: \begin{cases} F_1(x) = \alpha^{\perp}_{1,1}x_1 + \ldots + \alpha^{\perp}_{1,d+1}x_{d+1}, \\ \quad\ldots \\ F_{k^{\perp}}(x) = \alpha^{\perp}_{k^{\perp},1}x_1 + \ldots + \alpha^{\perp}_{k^{\perp},d+1}x_{d+1} \end{cases} \tag{0.3}$$

и

$$\mathcal{S}^*: \begin{cases} F^*_1(x) = \alpha^{*\perp}_{1,1}x_1 + \ldots + \alpha^{*\perp}_{1,d+1}x_{d+1}, \\ \quad\ldots \\ F^*_{k^{*\perp}}(x) = \alpha^{*\perp}_{k^{*\perp},1}x_1 + \ldots + \alpha^{*\perp}_{k^{*\perp},d+1}x_{d+1}, \end{cases} \tag{0.4}$$

каждая из которых образует базис в содержащем ее пространстве. Таким образом, системы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$ имеют $k = d+1-k^{\perp}$ и $k^* = d+1-k^{*\perp}$ свободных переменных.

0.3. Основной результат. В теореме 4.1 доказано следующее утверждение.

Пусть в пространствах $\mathcal{F}^{\perp}$ и $\mathcal{F}^{*\perp}$ заданы произвольные двойственные системы вещественных линейных форм (0.3) *и* (0.4). *Тогда существуют такие рекуррентные соотношения, определяемые $\mathcal{E}$-матрицей P_α из* (0.2)*, что порождаемые ими бесконечные последовательности целочисленных точек $p_a = (p_{a,1}, \ldots, p_{a,d+1})$ и $p^*_a = (p^*_{a,1}, \ldots, p^*_{a,d+1})$ обладают следующими свойствами.*

1. *Выполняются двойственные системы неравенств*

$$\mathcal{S}: \begin{cases} |F_1(p_a)| \leqslant \frac{C}{|p_a|_s^{\theta-\varrho}}, \\ \quad\ldots \\ |F_{k^{\perp}}(p_a)| \leqslant \frac{C}{|p_a|_s^{\theta-\varrho}} \end{cases} \tag{0.5}$$

и

$$\mathcal{S}^*: \begin{cases} |F^*_1(p^*_a)| \leqslant \frac{C}{|p^*_a|_s^{\theta^*-\varrho}}, \\ \quad\ldots \\ |F^*_{k^{*\perp}}(p^*_a)| \leqslant \frac{C}{|p^*_a|_s^{\theta^*-\varrho}} \end{cases} \tag{0.6}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь $|p_a|_s = |p_{a,1}| + \ldots + |p_{a,d+1}|$ и $|p^*_a|_s = |p^*_{a,1}| + \ldots + |p^*_{a,d+1}|$; показатели θ и θ^* равны $\theta = \frac{k}{k^{\perp}}$, $\theta^* = \frac{k^*}{k^{*\perp}}$ и отклонение $\varrho > 0$ от этих показателей можно сделать сколь угодно малым за счет подходящего выбора единицы ζ в (0.2)*; константа C в неравенствах* (0.5) *и* (0.6) *не зависит от номера итерации a.*

2. *Величины* $|p_a|_s$ *и* $|p_a^*|_s$ *имеют экспоненциальный рост при* $a \to +\infty$.

0.4. Комментарии. Сделаем несколько кратких пояснений к приведенному выше утверждению. Единицы ζ, приводящие по $\mathcal{L}$-алгоритму (0.2) к малым значениям отклонения ϱ в оценках (0.5) и (0.6), называются локализованными $\mathcal{L}$-единицами. Указанные единицы ζ характеризуются следующим свойством: модули их сопряженных значений $\zeta^{(i)}$, разбитые, как уже отмечалось, на два класса $|\zeta^{(i_+)}| > 1$ и $|\zeta^{(i_-)}| < 1$, локализованы в каждом классе около соответствующего значения $\zeta_+ > 1$ и $0 < \zeta_- < 1$. В [1] был построен симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби. Данный алгоритм позволяет находить $\mathcal{L}$-единицы. В случае локализованных единиц ζ унимодулярная матрица P_α в (0.1) становится $\mathcal{L}$-матрицей. Именно для них рекуррентные соотношения порождают последовательности точек p_a и p_a^* с малыми отклонениями ϱ в неравенствах (0.5) и (0.6).

0.5. История вопроса. По одному из следствий теоремы Дирихле ([2, с. 30]) существует бесконечно много целочисленных решений p_a системы неравенств $\mathcal{S}$ из (0.5) с показателем $\theta = \frac{k}{k^\perp}$ и отклонением $\varrho = 0$. В [3] был предложен $\mathcal{L}$-алгоритм построения таких решений. В настоящей работе мы модифицируем данный алгоритм, распространяя его по схеме (0.2) также и на двойственные системы неравенств $\mathcal{S}^*$ из (0.6). Указанный алгоритм опирается на метод локализации единиц алгебраических числовых полей [4, 5]. Ранее [4] первоначальный вариант $\mathcal{L}$-алгоритма – обратный симплекс-модульный алгоритм – был применен к системам неравенств (0.5) частного вида, когда $k^\perp = 1$. Среди многочисленных исследований по диофантовым приближениям линейных форм выделим работы [6, 7], где для тернарных форм были построены наилучшие приближения.

§1. Модульные $\mathcal{E}$-матрицы

1.1. Единицы и модули. Рассмотрим произвольное алгебраическое поле

$$\mathbb{F} \subset \mathbb{C} \tag{1.1}$$

— алгебраическое расширение степени $d + 1 = r + 2c$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, где r и $2c$ обозначают число вещественных и комплексных сопряжений соответственно (подробности см., например, в [8]).

Обозначим через $\mathcal{E}$ *группу единиц* поля $\mathbb{F}$, не являющихся корнями из 1. Данная группа имеет *ранг*

$$\operatorname{rank}\mathcal{E} = t, \tag{1.2}$$

где $t = r + c - 1$, т.е. порождается t свободными образующими.

Единицу $\zeta \in \mathcal{E}$ назовем *максимальной*, если

$$\deg \mathbb{Q}(\zeta) = d + 1, \tag{1.3}$$

где слева указана *степень* $\deg \mathbb{Q}(\zeta) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ расширения $\mathbb{Q}(\zeta)$ над полем $\mathbb{Q}$. Если единица ζ максимальная, то $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{F}$ в силу (1.3). Поэтому ее степени $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и *модуль*

$$\mathcal{M}_\zeta = \mathbb{Z}[1, \zeta, \ldots, \zeta^d] \tag{1.4}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$ будет *полным*, т.е. числа $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ образуют базис поля $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим линейное отображение

$$\mathcal{M}_\zeta \xrightarrow{\zeta} \mathcal{M}_\zeta : x \mapsto \zeta \cdot x. \tag{1.5}$$

Из определения (1.4) вытекает, что отображение (1.5) задает автоморфизм модуля $\mathcal{M}_\zeta$. Поскольку $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ – базис модуля $\mathcal{M}_\zeta$, то найдется квадратная целочисленная матрица U_ζ размера $d+1$, удовлетворяющая условию

$$U_\zeta \widehat{\zeta} = \zeta \cdot \widehat{\zeta}, \tag{1.6}$$

где слева записано произведение матрицы U_ζ и столбца

$$\widehat{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^d \\ \vdots \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

высоты $d + 1$. Более того, матрица U_ζ принадлежит *унимодулярной группе* $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ± 1. Матрица U_ζ называется *матрицей предствления* элемента ζ в базисе $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$.

1.2. Матрица перехода T. Пусть

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d] \tag{1.8}$$

– произвольный полный модуль над кольцом $\mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{F}$. Точку $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и соответствующий набор чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$, обладающие свойством (1.8), будем называть *полными*. Для полной точки α характерно выполнение соотношения

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha) \tag{1.9}$$

между $\mathbb{Q}[\alpha]$ – модулем (1.8) и $\mathbb{Q}(\alpha)$ — расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Из (1.8) и (1.9), в частности, следует иррациональность точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и равенство $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{F}$, а значит, полная точка α имеет *степень*

$$\deg \alpha = d + 1, \tag{1.10}$$

где по определению $\deg \alpha = \deg\ \mathbb{Q}(\alpha)$. Вектор или точку α назовем *иррациональными*, если выполняется условие:

$$\text{числа } 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \ \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

Далее, пусть T – *матрица перехода*

$$\widehat{\alpha} = T\widehat{\zeta} \tag{1.12}$$

от базиса полного модуля $\mathcal{M}_\zeta$ к базису модуля $\mathcal{M}_\alpha$. Здесь столбец $\widehat{\alpha}$ определяется по модулю $\mathcal{M}_\alpha$ добавлением единицы

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Матрица перехода T имеет рациональные коэффициенты. Кроме того, поскольку модуль $\mathcal{M}_\alpha$ также полный, то матрица T обратима и, значит, $T \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q})$ — группе невырожденных рациональных матриц.

1.3. Модульные матрицы. Воспользуемся (1.12) и подставим $\widehat{\zeta} = T^{-1}\widehat{\alpha}$ в равенство (1.6). Имеем

$$U_\zeta T^{-1}\widehat{\alpha} = \zeta \cdot T^{-1},$$

откуда для столбца $\widehat{\alpha}$ выводим равенство

$$M_\alpha \widehat{\alpha} = \zeta \cdot \widehat{\alpha} \tag{1.14}$$

с рациональной матрицей $M_\alpha = TU_\zeta T^{-1}$, сопряженной унимодулярной матрице U_ζ. Для модуля $\mathcal{M}_\alpha$ из (1.8) матрицу, обладающую свойством (1.14), назовем *модульной матрицей*.

1.4. Унимодулярные модульные матрицы. *Уровень*

$$l(T)=t \tag{1.15}$$

невырожденной рациональной матрицы T определяется как наименьшее натуральное число t с условием, что $T^*=t\cdot T^{-1}$ – целочисленная матрица.

Нам потребуется еще *показатель* $\nu_a(U_\zeta)=\nu$ унимодулярной матрицы U_ζ по модулю t – это такое наименьшее натуральное число ν, для которого выполняется сравнение

$$U_\zeta^\nu \equiv E \bmod t,$$

где $E=E_{d+1}$ – единичная матрица размера $d+1$. Указанное число ν существует и не превышает порядка конечной группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})$ матриц над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ с определителем $\det\equiv\pm1 \bmod t$.

В [3] доказано следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Если* $\mathcal{M}_\alpha$ *– произвольный полный модуль* (1.8) *из поля* $\mathbb{F}$, t *– уровень* (1.15) *матрицы* T *и* ν *– показатель* (3.9) *унимодулярной матрицы* U_ζ *по модулю* t, *то справедливы следующие утверждения*:

1) *матрица*

$$\mathrm{P}_\alpha = M_\alpha^\nu \tag{1.16}$$

является унимодулярной;

2) *имеет место равенство*

$$\mathrm{P}_\alpha\widehat{\alpha}=\lambda\cdot\widehat{\alpha}, \tag{1.17}$$

где $\widehat{\alpha}$ *– столбец* (1.13) *и собственное значение*

$$\lambda=\zeta^\nu \tag{1.18}$$

является единицей из множества $\mathcal{E}$.

Матрицу P_α из (1.16) назовем *унимодулярной модульной матрицей* или кратко – *$\mathcal{E}$-матрицей.*

§2. Оценки линейных форм

2.1. Разложение модульной $\mathcal{E}$-матрицы. Для столбцов $\widehat{\alpha}$ из (1.13) и $\widehat{\zeta}$ из (1.7) определим квадратные матрицы

$$A=(\widehat{\alpha}^{(1)}\ldots\widehat{\alpha}^{(d+1)}),\quad Z=(\widehat{\zeta}^{(1)}\ldots\widehat{\zeta}^{(d+1)}) \tag{2.1}$$

– порядка $d+1$, где $*^{(i)}$ обозначают сопряжения в поле $\mathbb{F}$ из (1.1). Матрица Z невырождена и в силу равенства (1.12) можем записать $A = TZ$. Поэтому матрица A также невырождена и, следовательно, ее столбцы образуют базис (A-базис) в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть P_α – модульная $\mathcal{E}$-матрица (1.16). Из (1.17) получаем

$$\mathrm{P}_\alpha A = (\lambda^{(1)}\widehat{\alpha}^{(1)} \dots \lambda^{(d+1)}\widehat{\alpha}^{(d+1)}) = A\Lambda,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda^{(d+1)} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Отсюда для матрицы P_α выводим разложение

$$\mathrm{P}_\alpha = A\Lambda A^{-1}. \tag{2.3}$$

2.2. Итерации целочисленных векторов. Определим векторы p_a и p_a^* для $a = 0, 1, 2, \dots$, записанные в виде столбцов

$$p_a = \begin{pmatrix} p_{a1} \\ \vdots \\ p_{a,d+1} \end{pmatrix}, \quad p_a^* = \begin{pmatrix} p_{a1}^* \\ \vdots \\ p_{a,d+1}^* \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

через итерации

$$p_a = \mathrm{P}_\alpha p_{a-1}, \quad p_a^* = \mathrm{P}_\alpha^* p_{a-1}^*, \tag{2.5}$$

где $p_0 = p_0^*$ – произвольный ненулевой целочисленный вектор и $\mathrm{P}_\alpha^* = \mathrm{P}_\alpha^{-1}$. Повторяя (2.5) несколько раз, получаем

$$p_a = \mathrm{P}_\alpha^a p_0, \quad p_a^* = \mathrm{P}_\alpha^{*\,a} p_0^*. \tag{2.6}$$

Из (2.2), (2.3) и (2.6) следует явное представление

$$p_a = \begin{pmatrix} {\lambda^{(1)}}^a a_{1,1} + \dots + {\lambda^{(d+1)}}^a a_{1,d+1} \\ \vdots \\ {\lambda^{(1)}}^a a_{d+1,1} + \dots + {\lambda^{(d+1)}}^a a_{d+1,d+1} \end{pmatrix}$$

с некоторыми коэффициентами a_{ij}, не зависящими от a. Отсюда выводим неравенства

$$|p_{ai}| \leqslant |\lambda^{(1)}|^a |a_{i,1}| + \dots + |\lambda^{(d+1)}|^a |a_{i,d+1}| \tag{2.7}$$

для $i = 1, \dots, d+1$.

Лемма 2.1. *Пусть векторы p_a и p_a^* определены формулой* (2.6)*. Тогда для них имеют место неравенства*

$$|p_a|_s \leqslant c_{\alpha,p_0}\,\lambda_{\max}^a, \quad |p_a^*|_s \leqslant c^*_{\alpha,p_0^*}\,\lambda_{\max}^{*\,a} \tag{2.8}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь обозначили

$$|p_a|_s = |p_{a,1}| + \ldots + |p_{a,d+1}| \tag{2.9}$$

– s-метрику в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$,

$$\lambda_{\max} = \max_{1\leqslant i\leqslant d+1} |\lambda^{(i)}|, \quad \lambda^*_{\max} = \max_{1\leqslant i\leqslant d+1} |\lambda^{*\,(i)}| \tag{2.10}$$

где $\lambda^* = \lambda^{-1}$, и c_{α,p_0}, c^*_{α,p_0^*} – константы, не зависящие от номера итерации a.

Доказательство. Первое неравенство в (2.8) непосредственно вытекает из неравенств (2.7), а второе получается по симметрии. □

2.3. Линейные формы. Для сопряжений $*^{(i)}$ в поле $\mathbb{F}$ из (1.1) введем следующую нумерацию

$$\underbrace{\ldots,\zeta^{(i_+)},\ldots,\zeta^{(i_-)},\ldots,}_{r} \qquad \underbrace{\ldots,\zeta^{(j_+)},\ldots,\zeta^{(j_-)},\ldots}_{c} \tag{2.11}$$

в зависимости от значений единицы ζ с условием (1.3). Здесь слева обозначены r вещественных сопряжений, а справа c комплексных сопряжений, взятых по одному из каждой пары комплексно сопряженных. Индексы в $(i_\pm)$ и $(j_\pm)$ соответственно означают: $|\zeta^{(i_+)}| > 1$, $|\zeta^{(j_+)}| > 1$ и $|\zeta^{(i_-)}| < 1$, $|\zeta^{(j_-)}| < 1$.

Используя нумерацию (2.11), выделим в $\mathbb{R}^{d+1}$ два подпространства

$$\mathcal{A},\ \mathcal{A}^* \subset \mathbb{R}^{d+1}, \tag{2.12}$$

натянутые соответственно на векторы

$$\begin{aligned} &\widehat{\alpha}^{(i_+)}, && \widehat{\alpha}_+^{(j_+)}, && \widehat{\alpha}_-^{(j_+)},\\ &\widehat{\alpha}^{*\,(i_+)} = \widehat{\alpha}^{(i_-)}, && \widehat{\alpha}_+^{*\,(j_+)} = \widehat{\alpha}_+^{(j_-)}, && \widehat{\alpha}_-^{*\,(j_+)} = \widehat{\alpha}_-^{(j_-)}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где

$$\widehat{\alpha}_+^{(j)} = \frac{1}{2}(\widehat{\alpha}^{(j)} + \overline{\widehat{\alpha}}^{(j)}), \quad \widehat{\alpha}_-^{(j)} = \frac{1}{2i}(\widehat{\alpha}^{(j)} - \overline{\widehat{\alpha}}^{(j)}) \tag{2.14}$$

– вещественные векторы. Так как столбцы матрицы A из (2.1) образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$, то векторы (2.13) являются базисами подпространств $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$, которые, в свою очередь, разлагают пространство $\mathbb{R}^{d+1}$ в прямую сумму

$$\mathbb{R}^{d+1} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^*.$$

Обозначим через

$$\mathcal{A}^{\perp},\ \mathcal{A}^{*\perp} \subset \mathbb{R}^{d+1} \tag{2.15}$$

подпространства, ортогональные $\mathcal{A}^{\perp}\ \perp \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{*\perp}\ \perp \mathcal{A}^*$ к подпространствам из (2.12) относительно обычного (покоординатного) скалярного произведения.

От комплексной матрицы A перейдем к *вещественной матрице*

$$A_{\mathbb{R}} = (\ldots \widehat{\alpha}^{(i)} \ldots \widehat{\alpha}_{+}^{(j)} \widehat{\alpha}_{-}^{(j)} \ldots), \tag{2.16}$$

столбцы которой образуют базис вещественного пространства $\mathbb{R}^{d+1}$. Разложим вектор p_0 из (2.4) по этому базису

$$p_0 = A_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{d+1} \end{pmatrix} = \ldots + x_i \widehat{\alpha}^{(i)} + \ldots + (\widehat{\alpha}_{+}^{(j)} \widehat{\alpha}_{-}^{(j)}) X_j + \ldots, \tag{2.17}$$

где $X_j = \begin{pmatrix} x_j \\ x_j' \end{pmatrix}$.

Если $\lambda^{(j)} = |\lambda^{(j)}|\,(\cos\varphi_j + i \sin\varphi_j)$, то по (2.6) находим

$$p_a = \mathrm{P}_{\alpha}^{a}\, p_0 = \ldots + x_i {\lambda^{(i)}}^a \widehat{\alpha}^{(i)} + \ldots + |\lambda^{(j)}|^a X_j(a\varphi_j) + \ldots, \tag{2.18}$$

где

$$X_j(a\varphi_j) = (\widehat{\alpha}_{+}^{(j)}\ \widehat{\alpha}_{-}^{(j)}) \begin{pmatrix} x_j(a\varphi_j) \\ x_j'(a\varphi_j) \end{pmatrix},$$

при этом

$$\begin{pmatrix} x_j(a\varphi_j) \\ x_j'(a\varphi_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a\varphi_j) & -\sin(a\varphi_j) \\ \sin(a\varphi_j) & \cos(a\varphi_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ x_j' \end{pmatrix}.$$

Из (2.15) и (2.18) для любого вектора $\alpha^{\perp} \in \mathcal{A}^{\perp}$ имеем

$$p_a \cdot \alpha^{\perp} = \ldots + x_{i_-} {\lambda^{(i_-)}}^a \widehat{\alpha}^{(i_-)} \cdot \alpha^{\perp} + \ldots + |\lambda^{(j_-)}|^a X_{j_-}(a\varphi_{j_-}) \cdot \alpha^{\perp} + \ldots, \tag{2.19}$$

где

$$X_{j_-}(a\varphi_{j_-}) \cdot \alpha^{\perp} = (\widehat{\alpha}_{+}^{(j_-)} \cdot \alpha^{\perp} \quad \widehat{\alpha}_{-}^{(j_-)} \cdot \alpha^{\perp}) \begin{pmatrix} x_j(a\varphi_{j_-}) \\ x_j'(a\varphi_{j_-}) \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.2. *Для произвольных векторов* $\alpha^{\perp} \in \mathcal{A}^{\perp}$ *и* $\alpha^{*\perp} \in \mathcal{A}^{*\perp}$ *из пространств* (2.12) *определим линейные формы*

$$\begin{aligned} F_{\alpha^{\perp}}(x) &= \alpha_1^{\perp} x_1 + \ldots + \alpha_{d+1}^{\perp} x_{d+1}, \\ F_{\alpha^{*\perp}}(x) &= \alpha_1^{*\perp} x_1 + \ldots + \alpha_{d+1}^{*\perp} x_{d+1} \end{aligned} \tag{2.20}$$

с вещественными коэффициентами $\alpha_i^{\perp}$, $\alpha_i^{*\perp}$, *равными координатам векторов* $\alpha^{\perp}$, $\alpha^{*\perp}$. *Тогда значение форм* $F_{\alpha^{\perp}}(p_a)$, $F_{\alpha^{*\perp}}(p_a^*)$ *в точках* p_a, p_a^* *из* (2.6) *оценивается как*

$$\begin{aligned} |F_{\alpha^{\perp}}(p_a)| &\leqslant c_{\alpha,\alpha^{\perp},p_0}\ \lambda_{\max_-}^{a}, \\ |F_{\alpha^{*\perp}}(p_a^*)| &\leqslant c_{\alpha,\alpha^{*\perp},p_0^*}\ \lambda_{\max_-}^{*\,a}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Здесь константы $c_{\alpha,\alpha^{\perp},p_0}$, $c_{\alpha,\alpha^{*\perp},p_0^*}$ *не зависят от номера* a, *и* $0 < \lambda_{\max_-} < 1$, $0 < \lambda_{\max_-}^* < 1$ *определяются равенствами*

$$\begin{aligned} \lambda_{\max_-} &= \max_{1 \leqslant i_-, j_- \leqslant d+1} \{|\lambda^{(i_-)}|, |\lambda^{(j_-)}|\}, \\ \lambda_{\max_-}^* &= \max_{1 \leqslant i_-, j_- \leqslant d+1} \{|\lambda^{*\,(i_-)}|, |\lambda^{*\,(j_-)}|\} \end{aligned} \tag{2.22}$$

с учетом нумерации (2.11) *и равенства* $\lambda^* = \lambda^{-1}$.

Доказательство. Так как по определению (2.20) линейной формы $F_{\alpha^{\perp}}(x)$ можем записать

$$F_{\alpha^{\perp}}(p_a) = p_a \cdot \alpha^{\perp}, \tag{2.23}$$

то первое неравенство в (2.21) вытекает из разложения (2.19) для скалярного произведения $p_a \cdot \alpha^{\perp}$ в (2.23) и определения множителя $\lambda_{\max_-}$. Второе неравенство в (2.21) симметрично первому. □

§3. Локализация единиц алгебраических полей

3.1. Единицы алгебраических полей. Пусть $\mathbb{F}$ – алгебраическое поле (1.1) степени $d + 1 = r + 2c$, где r и $2c$ – число вещественных и комплексных сопряжений соответственно. Выберем в поле $\mathbb{F}$ некоторую *полную систему единиц*

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t, \tag{3.1}$$

где $t = r + c - 1$. Отметим, что система единиц (3.1) не обязана порождать всю группу единиц поля $\mathbb{F}$. Требуется лишь, чтобы единицы из (3.1) были свободными образующими порождаемой ими *группы единиц* $\mathcal{E}$ и данная группа имела бы максимально возможный *ранг* t.

Зададим отображение

$$\varepsilon \mapsto x(\varepsilon) = (\ln|\varepsilon^{(1)}|, \ldots, \ln|\varepsilon^{(r)}|, 2\ln|\varepsilon^{(r+1)}|, \ldots, 2\ln|\varepsilon^{(r+c)}|) \qquad (3.2)$$

множества единиц $\mathcal{E}$ в пространство $\mathbb{R}^{t+1}$, где $\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(r)}$ – вещественные сопряженные значения для ε и $\varepsilon^{(r+1)}, \ldots, \varepsilon^{(r+c)}$ – комплексные. Отображение (3.2) будет вложением $x : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathbb{R}^{t+1}$ группы $\mathcal{E}$ в векторное пространство $\mathbb{R}^{t+1}$ с сохранением в них операций

$$x(\varepsilon \cdot \varepsilon') = x(\varepsilon) + x(\varepsilon'). \qquad (3.3)$$

3.2. Локализация. Из определения отображения (3.2) следует, что образ $\mathcal{L} = x(\mathcal{E})$ группы единиц $\mathcal{E}$ содержится в гиперплоскости

$$P = \{x \in \mathbb{R}^{t+1};\ \mathbf{n} \cdot x = 0\}, \qquad (3.4)$$

где $\mathbf{n} \cdot x$ – скалярное произведение x с вектором $\mathbf{n} = (1, \ldots, 1)$ размерности $t + 1$. Подмножество $\mathcal{L} \subset P$ предствляет собою *полную решетку* в пространстве (3.4) с $\mathbb{Z}$-*базисом* $x(\varepsilon_1), \ldots, x(\varepsilon_t)$. Данное множество также образует базис подпространства P, но уже относительно $\mathbb{R}$.

Пусть

$$k = k_r + 2k_c, \qquad (3.5)$$

где $0 \leqslant k_r \leqslant r$ и $0 \leqslant k_c \leqslant c$ — целые числа, удовлетворяет неравенствам

$$1 \leqslant k \leqslant d. \qquad (3.6)$$

Определим вектор

$$\mu_k = \mu_{k_r,k_c} = (\underbrace{\ldots, \mu, \ldots, -1, \ldots}_{r}, \underbrace{\ldots, 2\mu, \ldots, -2, \ldots}_{c}) \qquad (3.7)$$

с координатами μ или -1 на первых r местах и соответственно координатами 2μ или -2 на остальных c местах. При этом количество координат μ равно k_r, а 2μ равно k_c. Будем предполагать, что вектор (3.7) принадлежит

$$\mu_k \in P \qquad (3.8)$$

– гиперплоскости (3.4). Тогда μ в (3.7) должно быть равным

$$\mu = \frac{k^\perp}{k}, \qquad (3.9)$$

где $k^\perp = d - k + 1$ и, таким образом, выполняется равенство $k + k^\perp = d + 1$. При этом дробь μ в силу (3.6) будет удовлетворять неравенствам

$$\frac{1}{d} \leqslant \mu \leqslant d. \qquad (3.10)$$

Из включения (3.8) следует, что вектор μ_k разложим

$$\mu_k = \beta_1 x(\varepsilon_1) + \ldots + \beta_t x(\varepsilon_t) \tag{3.11}$$

по базису решетки $\mathcal{L}$ с некоторыми вещественными коэффициентами $\beta_1, \ldots, \beta_t$. Теперь воспользуемся одним результатом из [4].

Следствие 3.1. *Пусть $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$ – любой вещественный вектор и $\eta > 0$ – произвольное наперед заданное сколь угодно малое число. Тогда найдется такое натуральное число q, что будет выполняться неравенство*

$$||q\beta||_s = ||q\beta_1|| + \ldots + ||q\beta_t|| \leqslant \eta, \tag{3.12}$$

где $||x||$ обозначает расстояние от x до ближайшего целого числа.

Замечание 3.1. В [1] был построен симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби, Указанный алгоритм позволяет находить натуральные числа q с условием (3.12).

По следствию 3.1 для любого произвольного наперед заданного сколь угодно малого числа $\eta > 0$ найдутся такие целые числа $q \geqslant 1$ и $p_1, \ldots, p_t$, что будет выполняться неравенство

$$|q\beta - p|_s = |q\beta_1 - p_1| + \ldots + |q\beta_t - p_t| \leqslant \eta \tag{3.13}$$

в метрике $|x|_s = |x_1| + \ldots + |x_t|$ для $x = (x_1, \ldots, x_t)$ из $\mathbb{R}^t$.

Выберем единицу

$$\zeta = \varepsilon_1^{p_1} \cdots \varepsilon_t^{p_t}. \tag{3.14}$$

Для нее, согласно свойству (3.3), имеем

$$x(\zeta) = p_1 x(\varepsilon_1) + \ldots + p_t x(\varepsilon_t). \tag{3.15}$$

Из (3.7) и (3.11) следует равенство

$$q\mu_k = q\beta_1 x(\varepsilon_1) + \ldots + q\beta_t x(\varepsilon_t),$$

из которого и (3.15) находим разность

$$q\mu_k - x(\zeta) = (q\beta_1 - p_1)x(\varepsilon_1) + \ldots + (q\beta_t - p_t)x(\varepsilon_t).$$

Запишем векторы

$$x(\varepsilon_i) = (x_1(\varepsilon_i), \ldots, x_{t+1}(\varepsilon_i))$$

в координатах пространства $\mathbb{R}^{t+1}$. Тогда разность векторов $q\mu_k - x(\zeta)$ в силу (3.13) оценивается как

$$|q\mu_k - x(\zeta)|_s \leqslant \eta', \tag{3.16}$$

где справа обозначили $\eta' = \eta\,(t+1)\mathrm{max}_\varepsilon$ и

$$\mathrm{max}_\varepsilon = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant t\\ 1\leqslant j\leqslant t+1}} |x_j(\varepsilon_i)|. \tag{3.17}$$

Если ввести обозначение

$$\varrho = (\varrho_1, \ldots, \varrho_{t+1}) = x(\zeta) - q\mu_k,$$

то для вектора $x(\zeta)$ получим представление

$$x(\zeta) = q\mu_k + \varrho, \tag{3.18}$$

при этом координаты вектора ϱ по (3.16) удовлетворяют неравенствам

$$|\varrho_1| \leqslant \eta',\ \ldots,\ |\varrho_t| \leqslant \eta'. \tag{3.19}$$

По определению (3.2) записываем

$$x(\zeta) = (\underbrace{\ln|\zeta^{(1)}|, \ln|\zeta^{(2)}|, \ldots, \ln|\zeta^{(r)}|}_{r},\ \underbrace{2\ln|\zeta^{(r+1)}|), \ldots, 2\ln|\zeta^{(r+c)}|}_{c}), \tag{3.20}$$

а по (3.7) имеем

$$q\mu_k = (\underbrace{\ldots, q\mu, \ldots, -q, \ldots}_{r},\ \underbrace{\ldots, 2q\mu, \ldots, -2q, \ldots}_{c}). \tag{3.21}$$

Для сопряженных значений $\zeta^{(i)}$ единицы ζ в (3.20) введем нумерацию

$$\underbrace{\ldots, \zeta^{(i_+)}, \ldots, \zeta^{(i_-)}, \ldots}_{r},\ \underbrace{\ldots, \zeta^{(j_+)}, \ldots, \zeta^{(j_-)}, \ldots}_{c} \tag{3.22}$$

в соответствии с координатами вектора (3.21). Ниже мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях нумерации (2.11) и (3.22) совпадают. В нумерации (3.22) сравнивая координаты векторов (3.20), (3.21) и используя разложение (3.18), приходим к следующим формулам

$$\begin{aligned} \ln|\zeta^{(i_+)}| &= q\mu + \varrho_{i_+}, \quad \ln|\zeta^{(i_-)}| = -q + \varrho_{i_-},\\ \ln|\zeta^{(j_+)}| &= q\mu + \varrho_{j_+}, \quad \ln|\zeta^{(j_-)}| = -q + \varrho_{j_-}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Сделав замену

$$\ln\zeta_+ = q\mu \tag{3.24}$$

в формулах (3.23), имеем

$$\begin{aligned} \ln|\zeta^{(i_+)}| &= \ln\zeta_+ + \varrho_{i_+}, \quad \ln|\zeta^{(i_-)}| = \ln\zeta_+^{-1/\mu} + \varrho_{i_-}, \\ \ln|\zeta^{(j_+)}| &= \ln\zeta_+ + \varrho_{j_+}, \quad \ln|\zeta^{(j_-)}| = \ln\zeta_+^{-1/\mu} + \varrho_{j_-} \end{aligned}$$

или без логарифмов –

$$\begin{aligned} |\zeta^{(i_+)}| &= \zeta_+^{1+\theta_{i_+}}, \quad |\zeta^{(i_-)}| = \zeta_+^{-1/\mu+\theta_{i_-}}, \\ |\zeta^{(j_+)}| &= \zeta_+^{1+\theta_{j_+}}, \quad |\zeta^{(j_-)}| = \zeta_+^{-1/\mu+\theta_{j_-}}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

где

$$\theta_i = \varrho_i/\ln\zeta_+,$$

при этом ϱ_i удовлетворяют неравенствам (3.19).

Предложение 3.1. *Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t\}$ – некоторая полная система единиц (3.1) алгебраического поля $\mathbb{F}$ из (1.1) степени $d+1$, ζ – единица (3.14), зависящая от $\eta > 0$, и $\zeta^{(i)}$ – ее сопряженные; и пусть параметр k из (3.5) удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant k \leqslant d$. Тогда существует такая константа $\eta_\varepsilon > 0$, зависящая от выбора системы единиц ε, что для*

$$0 < \eta < \eta_\varepsilon, \tag{3.26}$$

выполняются следующие свойства.

1) *Модули сопряженных $\zeta^{(i)}$ вычисляются по формулам (3.25) с показателями*

$$|\theta_i| \leqslant c_\varepsilon \eta, \tag{3.27}$$

где константа $c_\varepsilon > 0$ не зависит от выбора параметра η из (3.26).

2) *Сопряженные $\zeta^{(i)}$ распределяются по группам*

$$\begin{aligned} |\zeta^{(i_+)}| > 1, \quad |\zeta^{(i_-)}| < 1, \\ |\zeta^{(j_+)}| > 1, \quad |\zeta^{(j_-)}| < 1 \end{aligned} \tag{3.28}$$

и, следовательно, нумерации (2.11) и (3.22) сопряженных $\zeta^{(i)}$ совпадают.

Доказательство. В силу уже выведенных формул (3.25) для доказательства первого утверждения нужно проверить выполнимость неравенств (3.27). Принимая во внимание определение $\theta_i = \varrho_i/\ln\zeta_+$ и неравенства (3.19), записываем

$$|\theta_i| \leqslant \frac{\eta'}{\ln\zeta_+} \leqslant c_\varepsilon \eta, \tag{3.29}$$

где константа

$$c_\varepsilon = \frac{(t+1)\max_\varepsilon}{\ln\zeta_+}$$

не зависит от η.

Для доказательства второго утверждения заметим, что из (3.10) (3.24) следует $\zeta_+ > 1$, поэтому в силу формул (3.25) неравенства (3.24) будут выполняться при достаточно малом $\eta_\varepsilon > 0$ в условии (3.26). $\square$

3.3. Локализованные единицы. Числа

$$\zeta = \zeta_{k,\eta} \tag{3.30}$$

будем называть *локализованными единицами* с параметрами k из (3.5), (3.6) и η из интервала (3.26). Их основное свойство состоит в том, что их сопряженные $\zeta^{(i)}$ распределяются по группам (3.28) и модули $|\zeta^{(i)}|$ содержатся соответственно в двух окрестностях

$$\begin{gathered}\zeta_+ - \delta_\eta \leqslant |\zeta^{(i_+)}| \leqslant \zeta_+ + \delta_\eta, \ \ \zeta_+ - \delta_\eta \leqslant |\zeta^{(j_+)}| \leqslant \zeta_+ + \delta_\eta,\\ \zeta_+^{-1/\mu} - \delta_\eta \leqslant |\zeta^{(i_-)}| \leqslant \zeta_+^{-1/\mu} + \delta_\eta, \ \ \zeta_+^{-1/\mu} - \delta_\eta \leqslant |\zeta^{(j_-)}| \leqslant \zeta_+^{-1/\mu} + \delta_\eta,\end{gathered} \tag{3.31}$$

где $\zeta_+ > 1$ не зависит от выбора параметра η из (3.26) и величена отклонения $\delta_\eta \downarrow 0$, если $\eta \to 0$. Свойство локализации (3.31) единиц ζ вытекает из формул (3.25) и неравенств (3.26), (3.27).

Обозначим через

$$\mathcal{E}_{k,\eta} \subset \mathcal{E} \tag{3.32}$$

подмножество всех единиц ζ из группы $\mathcal{E}$, удовлетворяющих условию (3.28). Из свойства (3.3) следует замкнутость множества $\mathcal{E}_{k,\eta}$ относительно умножения $\zeta \cdot \zeta' \in \mathcal{E}_{k,\eta}$ для любых $\zeta, \zeta' \in \mathcal{E}_{k,\eta}$. Поэтому множество $\mathcal{E}_{k,\eta}$ образует *полугруппу* без единицы, поскольку 1 не обладает свойством (3.28).

Пусть элемент α принадлежит алгебраическому полю $\mathbb{F}$ из (1.1) и k – параметр (3.5), (3.6). Предположим, что α имеет степень $\deg(\alpha) < d{+}1$.

Тогда найдутся такие $l \neq m$, что имеет место равенство

$$\alpha^{(l)} = \alpha^{(m)}. \tag{3.33}$$

Кроме того предположим, что сопряженные $\alpha^{(i)}$ для α распределяются по группам

$$\begin{aligned} &|\alpha^{(i_+)}| > 1, \quad |\alpha^{(i_-)}| < 1, \\ &|\alpha^{(j_+)}| > 1, \quad |\alpha^{(j_-)}| < 1 \end{aligned} \tag{3.34}$$

аналогично (3.28). Скажем, что элемент α *согласован* с параметром k, если свойства (3.33) и (3.34) не противоречат друг другу для всех $l \neq m$.

Предложение 3.2. *Если выполнены условия предложения* 3.1 *и ранг* $t \geqslant 1$, *то*

1) *полугруппа* $\mathcal{E}_{k,\eta} \neq \emptyset$;

2) *любая единица* $\zeta \in \mathcal{E}_{k,\eta}$, *несогласованная с параметром* k, *имеет степень*

$$\deg(\zeta) = d + 1. \tag{3.35}$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из предложения 3.1. Второе докажем от противного: предположим, что степень

$$\deg(\zeta) < d + 1.$$

Тогда из этого неравенства и несогласованости ζ с параметром k следует, что найдутся $l \neq m$, для которых будут выполняться противоречащие друг другу свойства (3.33) и (3.34) для $\alpha = \zeta$. □

Обозначим через

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{k,\eta} \subset \mathcal{E}_{k,\eta} \tag{3.36}$$

подмножество всех единиц ζ из полугруппы (3.32), несогласованных с параметром k, и назовем их *$\mathcal{L}$-единицами*. Если $\zeta \in \mathcal{L}$, то по предложению 3.2 ее степени $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому алгебраическое поле $\mathbb{Q}(\zeta)$ совпадает

$$\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{F} \tag{3.37}$$

с полем (1.1).

Начиная с этого места, будем полагать, что единица ζ в (1.18) является $\mathcal{L}$-единицей, т.е. ζ принадлежит множеству $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{k,\eta}$ из (3.36). В этом случае унимодулярную модульную матрицу P_α из (1.16) назовем *модульной $\mathcal{L}$-матрицей* или кратко – *$\mathcal{L}$-матрицей*.

Теорема 3.1. *Пусть* $F_{\alpha^\perp}(x)$ *и* $F_{\alpha^{*\perp}}(x)$ *— линейные формы* (2.20) *и целочисленные векторы* p_a *и* p_a^* *определяются формулой* (2.6)*, где* P_α *является* $\mathcal{L}$*-матрицей. Тогда выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} |F_{\alpha^\perp}(p_a)| &\leqslant \frac{C}{|p_a|_s^{1/\mu-\varrho}}, \\ |F_{\alpha^{*\perp}}(p_a^*)| &\leqslant \frac{C}{|p_a^*|_s^{\mu-\varrho}} \end{aligned} \tag{3.38}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ *Здесь* $\frac{1}{d} \leqslant \mu \leqslant d$ *вычисляется по формуле* (3.9)*; показатель* ϱ *удовлетворяет неравенствам*

$$0 < \varrho \leqslant C_\varepsilon \eta, \tag{3.39}$$

где константа $C_\varepsilon > 0$ *не зависит от параметра* η *из* (3.26)*, который можно выбирать сколь угодно малым; константа* C *не зависит от номера итерации* a.

Доказательство. Объединяя (3.25) и (1.18) можем записать

$$\begin{aligned} |\lambda^{(i_+)}| &= \lambda_+^{1+\theta_{i_+}}, \quad |\lambda^{(i_-)}| = \lambda_+^{-1/\mu+\theta_{i_-}}, \\ |\lambda^{(j_+)}| &= \lambda_+^{1+\theta_{j_+}}, \quad |\lambda^{(j_-)}| = \lambda_+^{-1/\mu+\theta_{j_-}}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

где $\lambda_+ = \zeta_+^\nu > 1$ и показатели θ_i, θ_j удовлетворяют неравенствам (3.27). Из (2.22) и (3.40) получаем

$$\lambda_{\max_-} = \lambda_+^{-1/\mu-\theta_{\max_-}} \tag{3.41}$$

с показателем

$$\theta_{\max_-} = -\max_{1\leqslant i_-, j_- \leqslant d+1} \{\theta_{i_-}, \theta_{j_-}\} \tag{3.42}$$

и неравенство (2.21) примет вид

$$|F_{\alpha^\perp}(p_a)| \leqslant c_{\alpha,\alpha^\perp,p_0}\, \lambda_+^{-a(1/\mu+\theta_{\max_-})}. \tag{3.43}$$

С другой стороны, согласно (2.10) и (3.40) находим

$$\lambda_{\max} = \lambda_+^{1+\theta_{\max_+}}, \tag{3.44}$$

где

$$\theta_{\max_+} = \max_{1\leqslant i_+, j_+ \leqslant d+1} \{\theta_{i_+}, \theta_{j_+}\}. \tag{3.45}$$

Поэтому подставляя (3.44) в (2.8), приходим к неравенству

$$|p_a|_s \leqslant c_{\alpha,p_0}\, \lambda_+^{a(1+\theta_{\max_+})}, \tag{3.46}$$

однородному с (3.43). Теперь неравенство (3.38) следует из (3.43) и (3.46), а неравенства (3.39) из (3.27).

При переходе от ζ к единице $\zeta^* = \zeta^{-1}$ происходит замена $k^* = k^\perp$, $k^{*\perp} = k$ с сохранением равенства $k^* + k^{*\perp} = d + 1$. Поэтому в силу (3.9) имеет место соотношение

$$\mu^* = \frac{k^{*\perp}}{k^*} = \frac{1}{\mu} \tag{3.47}$$

и для μ^* снова выполняются неравенства

$$\frac{1}{d} \leqslant \mu^* \leqslant d.$$

Повторяя рассуждения (3.40)-(3.46) и применяя лемму 2.1 и соотношение (3.47) видим, что второе неравенство в (3.38) доказывается аналогично первому. □

§4. Оценка приближений систем линейных форм

4.1. Оценка снизу. Ранее в лемме 2.1 была получена верхняя оценка для величин $|p_a|_s$ и $|p_a^*|_s$. Далее нам потребуется также и нижняя оценка.

Лемма 4.1. *Пусть векторы p_a и p_a^* определены формулой* (2.6). *Тогда для них имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} |p_a|_s &\geqslant c_{p_0,A}\ \lambda_{\min_+}^a, \\ |p_a^*|_s &\geqslant c_{p_0,A}\ \lambda_{\min_+}^{*\,a} \end{aligned} \tag{4.1}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots,$ где

$$\begin{aligned} \lambda_{\min_+} &= \min_{1 \leqslant i_+, j_+ \leqslant d+1} \{|\lambda^{(i_+)}|, |\lambda^{(j_+)}|\} > 1, \\ \lambda_{\min_+}^* &= \min_{1 \leqslant i_+, j_+ \leqslant d+1} \{|\lambda^{*(i_+)}|, |\lambda^{*(j_+)}|\} > 1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

и константа $c_{p_0,A} > 0$ не зависит от номера итерации a.

Доказательство. Первое неравенство в (4.1) было доказано в [3], а второе согласно нумерации (2.13) симметрично ему. □

4.2. Рекуррентные последовательности. Из матричных итерационных формул (2.5) выведем рекуррентные формулы для координат

$$p_a = \begin{pmatrix} p_{a1} \\ \vdots \\ p_{a,d+1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad p_a^* = \begin{pmatrix} p_{a1}^* \\ \vdots \\ p_{a,d+1}^* \end{pmatrix}$$

целочисленных точек (2.4). Пусть $\mathcal{L}$-матрица P_α имеет характеристический многочлен

$$ch_{P_\alpha}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \ldots - b_1 x - b_0. \tag{4.3}$$

Чтобы найти характеристический многочлен $ch_{P_\alpha^*}(x)$ обратной матрицы $P_\alpha^* = P_\alpha^{-1}$, воспользуемся формулой

$$ch_{P_\alpha^*}(x) = |P_\alpha|^{-1}(-x)^{d+1} ch_{P_\alpha}\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Используя ее и равенство (4.3), с точностью до множителя

$$|P_\alpha|^{-1}(-1)^{d+1} = \pm 1,$$

так как согласно предложения 1.1 матрица P_α унимодулярная, получаем с точностью до множителя ± 1 формулу

$$ch_{P_\alpha^*}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha^*) \sim x^{d+1} - b_d^* x^d - \ldots - b_1^* x - b_0^* \tag{4.4}$$

с коэффициентами

$$b_d^* = -\frac{b_1}{b_0}, \ \ldots, \ b_1^* = -\frac{b_d}{b_0}, \ b_0^* = \frac{1}{b_0}. \tag{4.5}$$

Из равенства (4.3) следует $b_0 = -\det(-\mathrm{P}_\alpha) = \pm 1$, поэтому все коэффициенты (4.5) целые.

В [9] было доказано следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Столбцы p_a и p_a^* удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$\begin{aligned} p_{a+d+1} &= b_d\, p_{a+d} + \ldots + b_1\, p_{a+1} + b_0\, p_a, \\ p_{a+d+1}^* &= b_d^*\, p_{a+d}^* + \ldots + b_1^*\, p_{a+1}^* + b_0^*\, p_a^* \end{aligned} \tag{4.6}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$ При этом начальные условия

$$\begin{aligned} p_d &= \mathrm{P}_\alpha^d\, p_0, \ \ldots, \ p_1 = \mathrm{P}_\alpha\, p_0, \ p_0 \\ p_d^* &= \mathrm{P}_\alpha^{*d}\, p_0^*, \ \ldots, \ p_1^* = \mathrm{P}_\alpha^*\, p_0^*, \ p_0^* \end{aligned} \tag{4.7}$$

задаются $\mathcal{L}$-матрицей P_α из (1.16), $\mathcal{L}$-матрицей $P_\alpha^* = P_\alpha^{-1}$ и начальным столбцом $p_0 = p_0^*$, определенным в (2.5) и (2.6).

4.3. Основная теорема. Согласно (3.5) и (3.7) пространства $\mathcal{A}^{\perp}, \mathcal{A}^{*\perp}$ из (2.15) имеет размерности, равные

$$\begin{aligned} k^{\perp} &= \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}^{\perp} = d+1-k, \\ k^{*\perp} &= \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}^{*\perp} = d+1-k^{*}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

При этом согласно определению (2.12) и (2.13) между размерностями имеют место соотношения двойственности

$$k = k^{*\perp}, \quad k^{\perp} = k^{*}. \tag{4.9}$$

Выберем в пространствах $\mathcal{A}^{\perp}$, $\mathcal{A}^{*\perp}$ произвольные базисы

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\perp} &= (\alpha_{1,1}^{\perp}, \ldots, \alpha_{1,d+1}^{\perp}), \ \ldots, \ \alpha_{k^{\perp}}^{\perp} = (\alpha_{k^{\perp},1}^{\perp}, \ldots, \alpha_{k^{\perp},d+1}^{\perp}) \\ \alpha_1^{*\perp} &= (\alpha_{1,1}^{*\perp}, \ldots, \alpha_{1,d+1}^{*\perp}), \ \ldots, \ \alpha_{k^{*\perp}}^{*\perp} = (\alpha_{k^{*\perp},1}^{*\perp}, \ldots, \alpha_{k^{*\perp},d+1}^{*\perp}) \end{aligned} \tag{4.10}$$

и, несколько упрощая правило (2.20), поставим базисам (4.10) в соответствие *системы линейных форм*

$$\mathcal{S} : \begin{cases} F_1(x) = \alpha_{1,1}^{\perp} x_1 + \ldots + \alpha_{1,d+1}^{\perp} x_{d+1}, \\ \qquad \ldots \\ F_{k^{\perp}}(x) = \alpha_{k^{\perp},1}^{\perp} x_1 + \ldots + \alpha_{k^{\perp},d+1}^{\perp} x_{d+1} \end{cases} \tag{4.11}$$

и

$$\mathcal{S}^{*} : \begin{cases} F_1^{*}(x) = \alpha_{1,1}^{*\perp} x_1 + \ldots + \alpha_{1,d+1}^{*\perp} x_{d+1}, \\ \qquad \ldots \\ F_{k^{*\perp}}^{*}(x) = \alpha_{k^{*\perp},1}^{*\perp} x_1 + \ldots + \alpha_{k^{*\perp},d+1}^{*\perp} x_{d+1} \end{cases} \tag{4.12}$$

с вещественными коэффициентами. Из определения следует, что линейные формы (4.11) образуют базис в *пространстве* $\mathcal{F}^{\perp}$ всех линейных форм $F_{\alpha^{\perp}}(x)$, где $\alpha^{\perp} \in \mathcal{A}^{\perp}$, а формы (4.12) – соответственно в *пространстве* $\mathcal{F}^{*\perp}$ линейных форм $F_{\alpha^{*\perp}}(x)$, где $\alpha^{*\perp} \in \mathcal{A}^{*\perp}$. Системы форм (4.11) и (4.12) назовем *двойственными.* Из равенств (4.8) и (4.9) вытекает связь

$$k^{\perp} + k^{*\perp} = d+1, \tag{4.13}$$

где $1 \leqslant k^{\perp} \leqslant d$ и $1 \leqslant k^{*\perp} \leqslant d$, между числом форм в двойственных системах (4.11) и (4.12).

Теорема 4.1. *Пусть в пространствах* $\mathcal{F}^{\perp}$ *и* $\mathcal{F}^{*\perp}$ *заданы произвольные двойственные системы вещественных линейных форм* (4.11) *и* (4.12); *и пусть целочисленные точки* $p_a = (p_{a,1}, \ldots, p_{a,d+1})$ *и* $p_a^{*} = (p_{a,1}^{*}, \ldots, p_{a,d+1}^{*})$ *определяются рекуррентными соотношениями* (4.6) *с начальными условиями* (4.7). *Тогда в обозначениях теоремы* 3.1 *справедливы следующие утверждения.*

1. *Выполняются двойственные системы неравенств*

$$\mathcal{S}: \begin{cases} |F_1(p_a)| \leqslant \frac{C}{|p_a|_s^{\theta-\varrho}}, \\ \quad \dots \\ |F_{k^\perp}(p_a)| \leqslant \frac{C}{|p_a|_s^{\theta-\varrho}} \end{cases} \tag{4.14}$$

и

$$\mathcal{S}^*: \begin{cases} |F_1^*(p_a^*)| \leqslant \frac{C}{|p_a^*|_s^{\theta^*-\varrho}}, \\ \quad \dots \\ |F_{k^{*\perp}}^*(p_a^*)| \leqslant \frac{C}{|p_a^*|_s^{\theta^*-\varrho}} \end{cases} \tag{4.15}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$ *Здесь показатели* θ *и* θ^* *равны*

$$\theta = \frac{k}{k^\perp}, \quad \theta^* = \frac{k^*}{k^{*\perp}}, \tag{4.16}$$

при этом $\frac{k^*}{k^{*\perp}} = (\frac{k}{k^\perp})^{-1}$, *где параметры* k, $k^\perp$, k^* *и* $k^{*\perp}$ *связаны соотношениями* (4.9) *и* (4.13); *отклонение* $\varrho > 0$ *от показателей* θ *и* θ^* *можно сделать сколь угодно малым за счет подходящего выбора локализованной* $\mathcal{L}$*-единицы* ζ *из множества* (3.36); *константа* C *в неравенствах* (4.14) *и* (4.15) *не зависит от номера итерации* a.

2. *Величины* $|p_a|_s$ *и* $|p_a^*|_s$ *в* s*-метрике* (2.9) *имеют экспоненциальный рост при* $a \to +\infty$.

Доказательство. Неравенства (4.14) и (4.15) вытекают из теоремы 3.1 и предложения 4.1. Согласно леммам 2.1 и 4.1 величины $|p_a|_s$ и $|p_a^*|_s$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} c'\,\lambda_{\min_+}^a &\leqslant |p_a|_s \leqslant c''\,\lambda_{\max}^a, \\ c'\,\lambda_{\min_+}^{*a} &\leqslant |p_a^*|_s \leqslant c''\,\lambda_{\max}^{*a}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

с константами $c' > 0$, $c'' > 0$ и $1 < \lambda_{\min_+} \leqslant \lambda_{\max}$, $1 < \lambda_{\min_+}^* \leqslant \lambda_{\max}^*$ по определениям (2.10) и (4.2). Из неравенств (4.17) следует второе утверждение теоремы. □

Замечание 4.1. Алгоритм построения целочисленных решений $p_a = (p_{a,1}, \dots, p_{a,d+1})$ и $p_a^* = (p_{a,1}^*, \dots, p_{a,d+1}^*)$ систем линейных неравенств вида (4.14) и (4.15) называется $\mathcal{L}$*-алгоритмом* [3]. Как мы видели, данный алгоритм опирается на:

1) метод локализации единиц $\zeta \in \mathcal{L}$ алгебраических числовых полей $\mathbb{F}$, изложенный в п. 3;

2) модульные $\mathcal{L}$-матрицы P_α из предложения 1.1, определяемых через локализованные единицы ζ;

3) рекуррентные соотношения из предложения 4.1, порождаемые характеристическими многочленами $ch_{P_\alpha}(x)$ и $ch_{P^*_\alpha}(x)$ для $\mathcal{L}$-матрицы P_α и ее обратной матрицы $P^*_\alpha = P^{-1}_\alpha$.

§5. Пример линейных систем от четырех переменных

5.1. Выбор локализованной единицы. В качестве одного из корней уравнения четвертой степени

$$x^4 + 2 = 0 \tag{5.1}$$

выберем

$$\varrho = r\varepsilon, \quad \text{где} \quad r = \sqrt[4]{2}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{5.2}$$

Поле $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\varrho)$ является *тотально комплексным* расширением поля $\mathbb{Q}$ степени $d+1=4$, имеющим $r=0$ вещественных и $2c=4$ комплексных сопряжений. Поле $\mathbb{F}$ допускает четыре автоморфизма, которые пронумеруем следующим образом:

$$\varrho = r\varepsilon \to \varrho^{(1)} = r\varepsilon, \quad \overline{\varrho}^{(1)} = r\overline{\varepsilon}, \quad \varrho^{(2)} = -r\varepsilon, \quad \overline{\varrho}^{(2)} = -r\overline{\varepsilon}. \tag{5.3}$$

Так как $t = r + c - 1 = 1$, то группа единиц $\mathcal{E}$ поля $\mathbb{F}$ имеет ранг $\operatorname{rank}\mathcal{E} = t = 1$ и поэтому данная группа порождается одним элементом. Нетрудно убедиться, что элемент

$$\zeta = 1 - \varrho^2 - \varrho^3 \tag{5.4}$$

содержится в $\mathcal{E}$. Действительно, ζ — целое число поля $\mathbb{F}$ с нормой

$$\operatorname{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta) = \zeta^{(1)} \cdot \overline{\zeta}^{(1)} \cdot \zeta^{(2)} \cdot \overline{\zeta}^{(2)} = |\zeta^{(1)}|^2 \cdot |\zeta^{(2)}|^2 = 1. \tag{5.5}$$

В соответствии с нумерацией (3.22) имеем

$$\underbrace{\ldots\ldots}_{r=0}, \quad \underbrace{\zeta^{(+)}, \zeta^{(-)},}_{c=2} \tag{5.6}$$

где, согласно (5.3), обозначили

$$\begin{aligned} \zeta^{(+)} &= \zeta = 1 - \varrho^2 - \varrho^3, \quad |\zeta^{(+)}| = 3.401 > 1, \\ \zeta^{(-)} &= \zeta^{(2)} = 1 - \varrho^2 + \varrho^3, \quad |\zeta^{(-)}| = 0.293 < 1. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Замечание 5.1. Группа единиц $\mathcal{E}$ имеет ранг $\operatorname{rank}\mathcal{E} = 1$ только для следующих трех типов алгебраических числовых полей $\mathbb{F}$.

$\mathbb{SF}^2$ – вещественные квадратичные поля: $r = 2$, $c = 0$, $k = 1$, $k^{\perp} = 1$;

$\mathbb{SF}^3$ – комплексные кубические поля: $r = 1$, $c = 1$, $k = 1$, $k^{\perp} = 2$;

$\mathbb{SF}^4$ – тотально комплексные поля четвертой степени: $r = 0$, $c = 2$, $k = 2$, $k^{\perp} = 2$.

Все единицы $\varepsilon \in \mathcal{E}$ таких полей являются *суперлокализованными*, т.е. параметр η в предложении 3.1 для единиц ε можно положить равным $\eta = 0$. Для рассматриваемого выше поля $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\varrho)$ это в силу (5.5) и (5.7) следует из равенства

$$|\zeta^{(+)}| \cdot |\zeta^{(-)}| = |\zeta^{(1)}| \cdot |\zeta^{(2)}| = 1.$$

По этой причине в случае суперлокализованных единиц $\varepsilon \in \mathcal{E}$ отклонение ϱ в неравенствах (4.14) и (4.15) будет

$$\varrho = 0. \tag{5.8}$$

5.2. Нахождение двойственных систем линейных форм. Чтобы избежать большого объема вычислений, в качестве $\widehat{\alpha}$ из (1.13) выберем вектор

$$\widehat{\alpha} = \widehat{\zeta}, \tag{5.9}$$

где ζ — единица (5.4). Учитывая соглашение (5.9), начнем с поиска базиса подпространства $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^4$, определенного в (2.12). С этой целью, используя (5.2) и (5.7), вычисляем степени

$$\begin{aligned}
\zeta^{(+)} &= 1 - \varrho^2 - \varrho^3, & \zeta^{(-)} &= 1 - \varrho^2 + \varrho^3, \\
\zeta^{(+)2} &= -1 - 4\varrho - 4\varrho^2 - 2\varrho^3, & \zeta^{(-)2} &= -1 + 4\varrho - 4\varrho^2 + 2\varrho^3, \\
\zeta^{(+)3} &= -17 - 16\varrho - 7\varrho^2 + 3\varrho^3, & \zeta^{(-)3} &= -17 + 16\varrho - 7\varrho^2 - 3\varrho^3.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Далее по формулам (2.14) вычисляем отвечающие степеням (5.10) вещественные векторы

$$
\begin{aligned}
\widehat{\zeta}_+ &= \begin{pmatrix} \zeta^{(+)3} \\ \zeta^{(+)2} \\ \zeta^{(+)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17-3r-8r^3 \\ -1+2r-2r^3 \\ 1+r \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\widehat{\zeta}_- &= \begin{pmatrix} \zeta^{(-)3} \\ \zeta^{(-)2} \\ \zeta^{(-)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r-7r^2-8r^3 \\ -2r-4r^2-2r^3 \\ -r-r^2 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Согласно замечанию 5.1 пространство $\mathcal{A}$ имеет размерность $k = 2$ и, значит, векторы (5.11) образуют базис $\mathcal{A}$.

Размерность пространства $\mathcal{A}^{\perp}$, ортогонального к $\mathcal{A}$, по формуле (4.8) равна $k^{\perp} = d + 1 - k = 2$. В качестве базиса пространства $\mathcal{A}^{\perp}$ выберем следующую совокупность векторов

$$
\begin{aligned}
\alpha_1^{\perp} &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{\perp} \\ \alpha_{12}^{\perp} \\ \alpha_{13}^{\perp} \\ \alpha_{14}^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r-r^2 \\ 0 \\ -3r+7r^2+8r^3 \\ -32-30r-24r^2-18r^3 \end{pmatrix}, \\
\alpha_2^{\perp} &= \begin{pmatrix} \alpha_{21}^{\perp} \\ \alpha_{22}^{\perp} \\ \alpha_{23}^{\perp} \\ \alpha_{24}^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r-r^2 \\ 2r+4r^2+2r^3 \\ -8-7r-5r^2-4r^3 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

ортогональных векторам (5.11). После этого можем выписать систему линейных форм (4.11):

$$
\mathcal{S}: \begin{cases} F_1(x) = \alpha_{11}^{\perp} x_1 + \alpha_{12}^{\perp} x_2 + \alpha_{13}^{\perp} x_3 + \alpha_{14}^{\perp} x_4, \\ F_2(x) = \alpha_{21}^{\perp} x_1 + \alpha_{22}^{\perp} x_2 + \alpha_{23}^{\perp} x_3 + \alpha_{24}^{\perp} x_4 \end{cases}
\tag{5.13}
$$

с коэффициентами из столбцов (5.12).

В соответствии с соотношением (4.9) двойственная к (5.13) система линейных форм (4.12) также состоит из $k^{*\perp} = k = 2$ форм

$$
\mathcal{S}^*: \begin{cases} F_1^*(x) = \alpha_{11}^{*\perp} x_1 + \alpha_{12}^{*\perp} x_2 + \alpha_{13}^{*\perp} x_3 + \alpha_{14}^{*\perp} x_4, \\ F_2^*(x) = \alpha_{21}^{*\perp} x_1 + \alpha_{22}^{*\perp} x_2 + \alpha_{23}^{*\perp} x_3 + \alpha_{24}^{*\perp} x_4. \end{cases}
\tag{5.14}
$$

Коэффициенты двойственной системы (5.14) можно найти, не повторяя еще раз тот путь, который привел нас к системе (5.13). Это можно сделать, если воспользоваться одним автоморфизмом (5.3) поля $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\varrho)$. Заметим, что вещественное поле $\mathbb{Q}(r)$, где $r = \sqrt[4]{2}$, имеет автоморфизм

$$\iota : \ r \to -r. \tag{5.15}$$

Указанный автоморфизм переводит первую пару сопряжений из (5.3) во вторую. Отсюда будет следовать, что векторы $\alpha_1^{*\perp}$ и $\alpha_2^{*\perp}$ — суть образы векторов $\alpha_1^{\perp}$ и $\alpha_2^{\perp}$ из (5.12) относительно автоморфизма (5.15), а именно:

$$\begin{gathered}
\alpha_1^{*\perp} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{*\perp} \\ \alpha_{12}^{*\perp} \\ \alpha_{13}^{*\perp} \\ \alpha_{14}^{*\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - r^2 \\ 0 \\ 3r + 7r^2 - 8r^3 \\ -32 + 30r - 24r^2 + 18r^3 \end{pmatrix}, \\
\alpha_2^{*\perp} = \begin{pmatrix} \alpha_{21}^{*\perp} \\ \alpha_{22}^{*\perp} \\ \alpha_{23}^{*\perp} \\ \alpha_{24}^{*\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r - r^2 \\ -2r + 4r^2 - 2r^3 \\ -8 + 7r - 5r^2 + 4r^3 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{5.16}$$

5.3. Модульная $\mathcal{L}$-матрица. В соответствии с соглашением (5.9), формула (1.17) примет вид

$$\mathrm{P}_\zeta \, \widehat{\zeta} = \lambda \cdot \widehat{\zeta}, \tag{5.17}$$

где согласно замечанию 5.1 собственное значение $\lambda = \zeta$ является $\mathcal{L}$-единицей из множества (3.36), а значит, матрица представления P_ζ будет модульной $\mathcal{L}$-матрицей. Чтобы найти матрицу P_ζ, нам потребуется для единицы ζ ее минимальный многочлен

$$\begin{aligned}
f_\zeta(x) &= (x - \zeta^{(1)})(x - \overline{\zeta}^{(1)})(x - \zeta^{(2)})(x - \overline{\zeta}^{(2)}) \\
&= x^4 - 4x^3 + 10x^2 + 4x + 1.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Вспоминая, что $\widehat{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^3 \\ \zeta^2 \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix}$ и используя явный вид многочлена $f_\zeta(x)$, можем записать указанную матрицу

$$\mathrm{P}_\zeta = \begin{pmatrix} 4 & -10 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Матрица представления (5.19) является в нашем случае матрицей Фробениуса.

5.4. Рекуррентное соотношение. Выведем рекуррентные формулы для координат

$$p_a = \begin{pmatrix} p_{a1} \\ p_{a2} \\ p_{a3} \\ p_{a4} \end{pmatrix}, \quad p_a^* = \begin{pmatrix} p_{a1}^* \\ p_{a2}^* \\ p_{a3}^* \\ p_{a4}^* \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

целочисленных точек из (2.4). Для этого нужно знать характеристический многочлен (4.3) для $\mathcal{L}$-матрицы P_ζ. Используя (5.19), получаем многочлен

$$ch_{\mathrm{P}_\zeta}(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 + 4x + 1 \tag{5.21}$$

с коэффициентами $b_3 = 4$, $b_2 = -10$, $b_1 = -4$, $b_0 = -1$. Поэтому по предложению 4.1 столбцы (5.20) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$p_{a+4} = 4p_{a+3} - 10p_{a+2} - 4p_{a+1} - p_a \tag{5.22}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$ Осталось найти начальные условия (4.7). Согласно (2.5), (2.6) столбец p_0 должен быть целочисленным и ненулевым. Если положить

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то в силу формул (4.7) начальными условиями для p_a будут следующие точки

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

Характеристический многочлен для $\mathcal{L}$-матрицы P_ζ^* находим

$$ch_{\mathrm{P}_\zeta^*}(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 - 4x + 1 \tag{5.24}$$

по формулам (4.4) и (4.5). Теперь коэффициенты $b_3^* = -4$, $b_2^* = -10$, $b_1^* = 4$, $b_0^* = -1$, и поэтому двойстенные точки p_a^* из (5.20) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$p_{a+4}^* = -4p_{a+3}^* - 10p_{a+2}^* + 4p_{a+1}^* - p_a^* \tag{5.25}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$ Чтобы получить начальные условия для точек p_a^*, положим

$$p_0^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и тогда по вторым формулам из (4.7) будем иметь

$$p_0^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad p_3^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}. \tag{5.26}$$

5.5. Аппроксимация двойственных систем линейных форм.

Предложение 5.1. *Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$ – двойственные системы вещественных линейных форм определенные формулами* (5.12), …, (5.16); *и пусть целочисленные точки*

$$p_a = (p_{a1}, p_{a2}, p_{a3}, p_{a4}) \quad \text{и} \quad p_a^* = (p_{a1}^*, p_{a2}^*, p_{a3}^*, p_{a4}^*)$$

определяются рекуррентными соотношениями (5.22), (5.25) *с начальными условиями* (5.23), (5.26). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Выполняются двойственные системы неравенств*

$$\mathcal{S}: \begin{cases} |F_1(p_a)| \leqslant \frac{C}{|p_a|_s}, \\ \\ |F_2(p_a)| \leqslant \frac{C}{|p_a|_s} \end{cases} \tag{5.27}$$

и

$$\mathcal{S}^*: \begin{cases} |F_1^*(p_a^*)| \leqslant \frac{C^*}{|p_a^*|_s}, \\ \\ |F_2^*(p_a^*)| \leqslant \frac{C^*}{|p_a^*|_s} \end{cases} \tag{5.28}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots,$ *где константы* $C \leqslant 10^2$ *и* $C^* \leqslant 1$ *не зависят от номера итерации* a.

2. *Величины* $|p_a|_s = |p_{a1}| + \ldots + |p_{a4}|$ *и* $|p_a^*|_s = |p_{a1}^*| + \ldots + |p_{a4}^*|$ *имеют экспоненциальный рост при* $a \to +\infty$.

Доказательство. По теореме 4.1 знаменатели дробей в правых частях неравенств (5.27) и (5.28) имеют показатели

$$\begin{aligned} \theta - \varrho &= \frac{k}{k^{\perp}} - \varrho = 1 - \varrho, \\ \theta^* - \varrho &= \frac{k^*}{k^{*\perp}} - \varrho = 1 - \varrho, \end{aligned} \tag{5.29}$$

так как $k = k^{\perp} = 2$ и $k^* = k^{*\perp} = 2$. Единица ζ, определенная в (5.4), является суперлокализованной (см. Замечание 5.1). Для таких единиц в силу (5.8) ϱ в равенствах (5.29) можно положить равным $\varrho = 0$, что доказывет оценки (5.27) и (5.28). Неравенства для констант $C \leqslant 10^2$ и $C^* \leqslant 1$ получаются прямым вычислением. Второе утверждение вытекает из второй части теоремы 4.1. □

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби.* — Современные проблемы математики, МИАН **299** (2017), 283–303.
2. В. Шмидт, *Диофантовы приближения.* Москва, Мир (1983).
3. В. Г. Журавлев, *$\mathcal{L}$-алгоритм аппроксимации диофантовых систем линейных форм.* — Алгебра и анализ (2018), 1–22. (в печати).
4. В. Г. Журавлев, *Локализованные матрицы Пизо и совместные приближения алгебраических чисел.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **458**, No. 33 (2017), 104–134.
5. В. Г. Журавлев, *Диофантовы приближения линейных форм.* — Алгебра и анализ (2018), 1–17. (в печати).
6. T. W. Cusick, *Diophantine Approximation of Ternary Linear Forms.* — Mathematics of computation **25** (1971), No. 113, 163–180.

7. T. W. Cusick, *Diophantine Approximation of Ternary Linear Forms.* II. — Mathematics of computation **26** (1972), No. 120, 977–993.
8. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* Москва, Наука, изд. третье (1985).
9. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.

Zhuravlev V. G. Dual Diophantine systems of linear inequalities.

A modified version of the $\mathcal{L}$-algorithm is proposed. Using this algorithm anyone can build an infinite sequence of integer solutions for dual systems of linear inequalities $\mathcal{S}$ and $\mathcal{S}^*$ of $d+1$ variables, consisting respectively of $k^{\perp}$ and $k^{*\perp}$ inequalities, where $k^{\perp}+k^{*\perp}=d+1$. Solutions are obtained by using two recurrence relations of the order $d+1$. Approximations in the systems of inequalities $\mathcal{S}$ and $\mathcal{S}^*$ is carried out with Diophantine exponents $\frac{d+1-k^{\perp}}{k^{\perp}}-\varrho$ and $\frac{d+1-k^{*\perp}}{k^{*\perp}}-\varrho$, where the deviation $\varrho>0$ can be made arbitrarily small due to a suitable choice of the recurrence relations. The $\mathcal{L}$-algorithm is based on a method of localizing units in algebraic number fields.

Владимирский государственный университет
600024, Владимир, Строителей, 11, Россия
E-mail: `vzhuravlev@mail.ru`

Поступило 18 апреля 2019 г.