Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 478, 2019 г.

В. Р. Романовский

ГОМОЛОГИИ СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ КОЛЕЦ ЛИ

§1. Введение

Для группы G через $\gamma_n(G)$ мы обозначаем n-ый член нижнего центрального ряда, который определяется по рекурсии

$$\gamma_1(G) = G \quad \text{и} \quad \gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G].$$

Если группа понятна из контекста, мы используем упрощенное обозначение $\gamma_n := \gamma_n(G)$. Напомним, что группа называется нильпотентной ступени N, если $\gamma_{N+1} = 1$. Например, абелевы группы – это нильпотентные группы ступени 1. Свободная нильпотентная группа ступени N – это фактор группа свободной группы по γ_{N+1}. Иначе говоря, свободная нильпотентная группа ступени N – это свободная группа в многообразии нильпотентных групп ступени N. Алгебра Ли над $\mathbb{Z}$ называется кольцом Ли. Аналогично определяются нижний центральный ряд и понятие нильпотентности для колец Ли, а также свободное нильпотентное кольцо Ли ступени N.

Гомологии свободных нильпотентных групп и алгебр Ли представляют большой интерес (см. [2, 1]). Гомологии конечно порождённых абелевых групп хорошо известны, но совсем по-другому дело обстоит с гомологиями конечно порождённых нильпотентных групп. Даже для случая свободных нильпотентных групп ступени 2 они не известны полностью. Неожиданностью для исследователей оказался тот факт, что в четвёртых гомологиях 4-порождённой свободной нильпотентной группы ступени 2 возникает 3-кручение ([3], смотри также [6])

$$\mathbb{Z}/3 \hookrightarrow H_4(F(x_1, x_2, x_3, x_4)/\gamma_3).$$

Это было неожиданно потому, что гомологии свободных в том или ином смысле объектов обычно свободны от каких-либо соотношений

Ключевые слова: гомологии, комплекс Шевалле–Эйленберга, свободная нильпотентная алгебра Ли, сбободное нильпотентное кольцо Ли.

Работа поддержана грантом Правительства РФ государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых, соглашение 14.W03.31.0030 от 15.02.2018.

и не имеют кручения. Кроме того, известно, что во вторых и третьих гомологиях свободных нильпотентных групп нет кручения. Так же его нет и в четвёртых гомологиях, если число образующих меньше четырёх. Ещё одной неожиданностью оказалось то, что возникло именно 3-кручение, а не 2-кручение. В подобных вопросах обычно кручения возникают последовательно от меньших к большим. Например, p-кручение в гомотопических группах $\pi_n(S^2)$ впервые возникает при $n = 2p$.

Это 3-кручение в четвёртых гомологиях возникает, когда количество образующих больше или равно 4, но кручения нет, когда количество образующих равно двум или трём, если мы рассматриваем свободные нильпотентные группы ступени 2. Остаётся открытым вопрос, есть ли кручение в гомологиях свободных нильпотентных групп от двух или трёх образующих, если мы рассматриваем нильпотентные группы большей ступени.

Хорошо известно, что теория гомологий колец Ли во многом похожа на теорию гомологий групп. Более того, в [6] построен изоморфизм целочисленных гомологий

$$H_n(G) \cong H_n(\mathscr{G}),$$

где G – свободная нильпотентная группа ступени 2, а $\mathscr{G}$ – свободное нильпотентное кольцо Ли ступени 2 с тем же числом свободных образующих. Преимуществом колец Ли является то, что их гомологии гораздо проще для вычислений. Поэтому мы решили заняться поиском кручения в гомологиях свободных нильпотентных колец Ли с малым числом образующих.

Наша работа посвящена созданию алгоритма для вычисления целочисленных гомологий свободных нильпотентных колец Ли и вычислению $H_4(L(x_1,\dots,x_r)/\gamma_{N+1})$ с помощью вычислительной системы GAP. Здесь мы через $L(x_1,\dots,x_r)$ обозначаем свободное кольцо Ли, порождённое $x_1,\dots,x_r$. Наиболее интересным результатом нашей работы является следующая теорема.

Теорема. *Четвёртые гомологии* 2*-порождённого свободного нильпотентного кольца Ли ступени* 5 *имеют* 7*-кручение и не имеют никакого другого кручения. Более того, имеет место изоморфизм*

$$H_4(L(x,y)/\gamma_6) \cong \mathbb{Z}^{85} \oplus \mathbb{Z}/7.$$

Причём вторые и третьи гомологии этого кольца не имеют кручения, а также нет кручения в четвёртых гомологиях, если ступень нильпотентности меньше пяти.

Таким образом, мы показываем, что для колец Ли ступени нильпотентности пять достаточно всего двух образующих, чтобы возникло кручение. Этот результат нам кажется ещё более интересным, чем результат о 3-кручении в случае групп, потому что кручение возникает ещё более непоследовательно. Первым возникло не 2-кручение, не 3-кручение и даже не 5-кручение, а 7-кручение.

Также мы получили аналог теоремы про 3-кручение для нильпотентных групп в случае колец Ли, т.е. в $H_4(L(x_1, x_2, \dots, x_r)/\gamma_3)$ при $r \geqslant 4$ есть 3-кручение. Более того, нам удается явно выписать элемент, порождающий кручение. Кроме того, обнаруживается 2-кручение в $H_4(L(x_1, x_2, x_3)/\gamma_4)$, для которого также выписывается порождающий. Для группы $H_4(L(x_1, \dots, x_r)/\gamma_{N+1})$ результаты нашей работы коротко могут быть представлены следующей таблицей.

	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
$r = 2$	0	$\mathbb{Z}^7$	$\mathbb{Z}^{16}$	$\mathbb{Z}^{85} \oplus \mathbb{Z}/7$
$r = 3$	$\mathbb{Z}^3$	$\mathbb{Z}^{171} \oplus (\mathbb{Z}/2)^3$	-	-
$r = 4$	$\mathbb{Z}^{84} \oplus (\mathbb{Z}/3)^4$	-	-	-

Мы ведём вычисления при помощи комплекса Шевалле–Эйленберга. Поэтому все элементы гомологий, которые мы вычисляем, имеют представителей во внешних степенях. Например, 3-кручение в $H_4(L(x_1, x_2, x_3, x_4)/\gamma_3)$ имеет очень простого представителя:

$$x_1 \wedge [x_2 x_3] \wedge [x_2 x_4] \wedge [x_3 x_4].$$

К сожалению, простейший представитель 7-кручения в $H_4(L(x, y)/\gamma_6)$, который мы смогли найти, выглядит следующим образом

$$\begin{gathered}
[x] \wedge [xxxyy] \wedge [xxyy] \wedge [xyyy] - [x] \wedge [xxyxy] \wedge [xxyy] \wedge [xyyy] \\
-[xxxy] \wedge [xxyy] \wedge [xxyyy] \wedge [y] + [xxxy] \wedge [xxyy] \wedge [xy] \wedge [xyyy] \\
-[xxxy] \wedge [xxyyy] \wedge [xy] \wedge [xyy] + [xxxyy] \wedge [xxy] \wedge [xy] \wedge [xyyy] \\
+[xxy] \wedge [xxyxy] \wedge [xy] \wedge [xyyy],
\end{gathered}$$

где через $[w]$ мы обозначаем элемент базиса Ширшова–Линдона, соответствующий слову Линдона w.

Далее в нашей работе мы описываем подробно методы, которые мы используем для вычислений, и непосредственно алгоритм вычисления. Полный текст программы может быть найден по следующей ссылке:

`github.com/vrromanovskii/GAP-code/blob/master/test%20(2).g`

§2. Методы вычислений

Изучение гомологий колец Ли оказывается проще, чем в случае групп, благодаря комплексу Шевалле–Эйленберга, построение которого мы сейчас напомним. Известно (см. [5]), что если L – кольцо Ли, которое является свободной абелевой группой по сложению, то его гомологии могут быть вычислены как гомологии данного комплекса:

$$\ldots \longrightarrow \Lambda^n L \xrightarrow{\partial_n} \Lambda^{n-1} L \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_3} \Lambda^2 L \xrightarrow{\partial_2} L,$$

где дифференциал ∂_n задан формулой

$$\partial_n(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{i+j-1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_i \wedge \ldots \wedge \hat{x}_j \wedge \ldots \wedge x_n.$$

На практике этот комплекс оказывается гораздо меньше, чем все остальные комплексы, при помощи которых можно вычислить гомологии кольца Ли. Это можно проиллюстрировать следующим замечанием: если ранг аддитивной абелевой группы L равен n, то длина этого комплекса равна n.

Все вычисления велись при помощи базиса Ширшова–Линдона. Напомним, его определение. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ – некоторое множество, которое мы будем называть алфавитом. Упорядочим это множество следующим образом $x_1 < \cdots < x_r$ и рассмотрим лексикографический порядок на моноиде всех слов в этом алфавите. Если слово w представляется в виде произведения $w = uv$, то v называется **суффиксом** w. Суффикс называется **собственным**, если $v \neq w$. Слово w называется **словом Линдона**, если оно меньше любого своего собственного суффикса в лексикографическом порядке. Например, слово $xxyxy$ является словом Линдона, где $x = x_1$ и $y = x_2$. Множество слов Линдона мы обозначаем через $\mathsf{Lyn}(X)$.

Стандартным разложением слова Линдона w, длина которого больше единицы, называется разложение $w = uv$, где v – наименьший собственный суффикс w. В этом случае u и v тоже слова Линдона. Это определение эквивалентно следующему. Стандартное разложение – это такое разложение в произведение слов Линдона $w = uv$, что u имеет наименьшую возможную длину.

Обозначим через $L(X)$ свободное кольцо Ли, порождённое множеством X. Тогда каждому слову Линдона можно сопоставить элемент из $L(X)$ по следующему правилу. Мы зададим отображение

$$[-] : \mathsf{Lyn}(X) \longrightarrow L(X)$$

по рекурсии. Для слов Линдона длины 1 мы зададим его следующим образом $[x] := x$. Для слова Линдона w, длина которого больше 1, мы рассмотрим его стандартное разложение $w = uv$ и положим

$$[w] := [[u],[v]].$$

Например,

$$[xxyxy] = [[x,[x,y]],[x,y]].$$

Тогда множество таких элементов, соответствующих словам Линдона

$$\{\ [w] \in L(X) \mid w \in \mathsf{Lyn}(X)\ \}$$

является базисом аддитивной абелевой группы $L(X)$, который называется **базисом Ширшова–Линдона** [4].

Поскольку это множество образует базис, то для любых двух слов Линдона u, v коммутатор соответствующих элементов $[u], [v]$ как-то раскладывается по этому базису с некоторыми структурными константами $c^w_{u,v} \in \mathbb{Z}$

$$[[u],[v]] = \sum_{w \in \mathsf{Lyn}(X)} c^w_{u,v}[w].$$

Явное описание этих структурных констант является открытым вопросом. Но нам удалось построить алгоритм, который вычисляет эти константы для конкретных u, v. Для этого мы прибегаем к вложению свободного кольца Ли в свободное ассоциативное кольцо. А именно, мы используем тот факт, что $L(X)$ изоморфно подкольцу Ли кольца некоммутативных многочленов $\mathbb{Z}\langle X\rangle$, порождённого X [4].

Обозначим через $\mathsf{Lyn}_{\leqslant N}(X)$ множество слов Линдона, длина которых меньше или равна N. Тогда легко проверить, что множество

$$\{\ [w] \in L(X) \mid w \in \mathsf{Lyn}_{\leqslant N}(X)\ \}$$

является базисом свободного нильпотентного кольца Ли $L(X)/\gamma_{N+1}$. Этот базис мы активно используем в наших вычислениях.

Основная часть соответствующего исследования состояла в написании алгоритма, позволяющего вычислить гомологии кольца $L(X)/\gamma_{N+1}$

хотя бы для небольших чисел N и множества X. Для больших значений параметров N и $|X|$ возникают вопросы оптимизации алгоритма и вычислительных мощностей, которые мы не затрагиваем.

Знание базиса кольца $L(X)/\gamma_{N+1}$ позволяет нам вычислять гомологии, поскольку в таком случае мы также знаем и базис внешней степени $\Lambda^n L$, это множество $\{[w_{i_1}] \wedge [w_{i_2}] \wedge \ldots \wedge [w_{i_n}] | \ w_{i_1} < w_{i_2} < \ldots < w_{i_n}\}$. Так как дифференциал является линейным отображением, мы можем составить его матрицу в наших базисах. Проблема в том, что такие матрицы оказываются настолько больших размеров, что с ними невозможно работать вручную. Однако на помощь приходят компьютерные вычисления. В нашей работе мы пользуемся системой вычислительной алгебры GAP.

§3. Описание алгоритма

В этом разделе мы подробно опишем алгоритм, который использовался для вычислений.

Для начала опишем функцию, которая по слову w выдаёт стандартное разложение $w = uv$, если w является словом Линдона. Назовём эту функцию StandardDecomposition. Построим вспомогательные функции ListOfSuffixes и IsLyndonWord. Функция ListOfSuffixes по всякому слову l выдаёт набор всех собственных суффиксов слова l. Функция IsLyndonWord проверяет, является ли слово l словом Линдона, сравнивая его со всеми элементами ListOfSuffixes(l), т.е. со всеми собственными суффиксами слова l. Если l меньше всех своих суффиксов, то l объявляется словом Линдона и IsLyndonWord(l):= "true", иначе IsLyndonWord(l):= "false". Теперь без труда строим

$$\text{StandardDecomposition(w)}.$$

Сначала проверяем, верно ли, что

$$\text{IsLyndonWord(w)=true}.$$

Если это верно, то задаём $v = \text{minimum}(\text{ListOfSuffixes}(w))$, а в качестве u берём оставшийся преффикс.

Функция lyn_comm(l) – скобка Линдона, построена рекурсивно. Если l – слово Линдона единичной длины, то lyn_comm(l):=l, иначе берём коммутатор скобок Линдона от u и v, где l= uv – стандартное разложение слова Линдона.

Функция LyndonShirhovBasis(p) – разложение некоммутативного многочлена $p(x, y) \in L(x, y)$ по базису Ширшова–Линдона, устроена так: берём некоммутативный многочлен p, выбираем в нём минимальный моном w, затем вычитаем из p скобку Линдона $[w]$ минимального монома с подходящим коэффициентом и получаем либо нулевой многочлен, либо многочлен, слагаемые которого увеличились, однако остались прежних длин. Поскольку длина слагаемых не меняется, за конечное число повторений данной операции получим нулевой многочлен. Так получаем разложение некоммутативного многочлена p по базису Ширшова–Линдона $\{[w]|w \in \mathsf{Lyn}_{\leqslant N}(X)\}$.

Следующая функция, Homology(B, A) – одна из основных функций нашего кода, считает n-е гомологии, если B это матрица $n+1$-го дифференциала, а A – матрица n-го дифференциала. Итак, для двух данных матриц A и B функция Homology(B, A) сначала проверяет, верно ли, что $A * B = 0$. Затем, если это оказалось верно, выписывает базис ядра $\mathrm{Ker}(A)$. Поскольку $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$, то столбцы матрицы B можно разложить по базису $\mathrm{Ker}(A)$. Так сформируем матрицу B_1, столбцы которой это столбцы B в базисе $\mathrm{Ker}(A)$. После чего положим B_2 = SmithNormalFormIntegerMat(B_1) – нормальная форма Смита матрицы B_1. Заметим, что B_1 матрица отображения из $\mathbb{Z}^k = \mathrm{Ker}A$ в $\mathbb{Z}^m$, как и матрица B_2. Заметим, что B_2 диагональная и несёт в себе всю информацию о гомологиях, поскольку, если $(a_1, a_2, \ldots, a_{min\{k,m\}})$ главная диагональ матрицы B_2, то $\mathrm{Ker}(A)/\mathrm{Im}(B) = \mathbb{Z}^k/\mathrm{Im}(B_2) \cong \mathbb{Z}/a_1 \oplus \mathbb{Z}/a_2 \oplus \ldots \mathbb{Z}/a_{min\{k,m\}}$.

Функция LyndonWordsLengthN(N) выдаёт список слов Линдона длины N, состоящих из двух букв. Строится индуктивно, для слов единичной длины это набор $[[1],[2]] = [[x],[y]]$, дальше для всех i от единицы до $k-1$ собирается список слов Линдона длины k из двух списков слов Линдона длины i и $k-i$ путём конкатенации (если u и v слова Линдона и $u < v$, то uv тоже слово Линдона).

Аналогично строятся функции LyndonWordsLengthNon3letters(N) и LyndonWordsLengthNon4letters(N), формирующие списки слов Линдона длины N на трёх и четырёх буквах.

Функция LyndonWordsLengthLessOrEqualN(N) формирует список слов Линдона длины не больше N на двух буквах.

Функция BasisOfExteriorPower(n, N) выводит базис n-ой внешней степени кольца Ли на множестве $\{x, y\}$ ступени нильпотентности N.

Функция Differential(l, N) вычисляет значение дифференциала

$$\partial_n(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{i+j-1}[x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_i \ldots \wedge \hat{x}_j \ldots \wedge x_n.$$

на базисном элементе для ступени нильпотентности N.

Функция MatrixOfDiff(n,N) строит матрицу n-го дифференциала для ступени нильпотентнности N стандартным образом: берём базис n-ой внешней степени и базис $n-1$-ой внешней степени, вычисляем значение дифференциала на k-ом базисном элементе n-ой внешней степени, записываем коэффициенты этого значения в базисе $n-1$-ой внешней степени в k-ый столбец матрицы.

Так мы получили необходимые функции для вычисления гомологий комплекса Шевалле–Эйленберга. Основные результаты вычислений записаны в таблице во введении. Функция SmithIntMatLLLTrans(A) пакета EDIM выводит не только нормальную форму Смита матрицы A, но и матрицы преобразований, т.е. набор $[S, L, R]$, где $S = LAR$ – нормальная форма Смита матрицы . Знание матриц L и R позволяет нам явно найти порождающие элементы для кручений в гомологиях. Например, в $H_4(L(x,y)/\gamma_6)$ 7-кручение порождено классом элемента $[\mathrm{x}] \wedge [\mathrm{xxxyy}] \wedge [\mathrm{xxyy}] \wedge [\mathrm{xyyy}] - [\mathrm{x}] \wedge [\mathrm{xxyxy}] \wedge [\mathrm{xxyy}] \wedge [\mathrm{xyyy}] - [\mathrm{xxxy}] \wedge [\mathrm{xxyy}] \wedge [\mathrm{xxyyy}] \wedge [\mathrm{y}] + [\mathrm{xxxy}] \wedge [\mathrm{xxyy}] \wedge [\mathrm{xy}] \wedge [\mathrm{xyyy}] - [\mathrm{xxxy}] \wedge [\mathrm{xxyyy}] \wedge [\mathrm{xy}] \wedge [\mathrm{xyy}] + [\mathrm{xxxyy}] \wedge [\mathrm{xxy}] \wedge [\mathrm{xy}] \wedge [\mathrm{xyyy}] + [\mathrm{xxy}] \wedge [\mathrm{xxyxy}] \wedge [\mathrm{xy}] \wedge [\mathrm{xyyy}]$.

Другой пример: в $H_4(L(a,b,c)/\gamma_4)$ одно из трёх 2-кручений порождено классом элемента $-[\mathrm{a}] \wedge [\mathrm{abc}] \wedge [\mathrm{acb}] \wedge [\mathrm{bcc}] - [\mathrm{a}] \wedge [\mathrm{acb}] \wedge [\mathrm{acc}] \wedge [\mathrm{bbc}] - [\mathrm{ab}] \wedge [\mathrm{abc}] \wedge [\mathrm{ac}] \wedge [\mathrm{bcc}] - [\mathrm{ab}] \wedge [\mathrm{abc}] \wedge [\mathrm{acc}] \wedge [\mathrm{bc}] - [\mathrm{ab}] \wedge [\mathrm{ac}] \wedge [\mathrm{acb}] \wedge [\mathrm{bcc}] + [\mathrm{abb}] \wedge [\mathrm{abc}] \wedge [\mathrm{acc}] \wedge [\mathrm{c}] + [\mathrm{abb}] \wedge [\mathrm{acb}] \wedge [\mathrm{acc}] \wedge [\mathrm{c}] - [\mathrm{abc}] \wedge [\mathrm{ac}] \wedge [\mathrm{acb}] \wedge [\mathrm{bc}]$.

В $H_4(L(a,b,c,d)/\gamma_3)$ одно из четырёх 3-кручений порождено классом элемента $[a] \wedge [bc] \wedge [bd] \wedge [cd]$.

Список литературы

1. J. Huebschmann, *Cohomology of nilpotent groups of class 2.* — J. Algebra **126** (1989), 400–450.
2. K. Igusa, K. E. Orr, *Links, pictures and the homology of nilpotent groups.* — Topology **40** (2001), 1125–1166.
3. L. Lambe, *Cohomology of principal G-bundles over a torus when H(BG; R) is polynomial.* — Bull. Soc. Math. de Belg. **38** (1986), 247–264.
4. C. Reutenauer, *Free Lie algebras*, Vol. 7 of London Mathematical Society Monographs, Oxford: Clarendon Press, 1993
5. А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра*, 1960.
6. Ю. В. Кузьмин, Ю. С. Семенов, *О гомологиях свободной нильпотентной группы класса 2.* — Матем. сб. **189**, No. 4 (1998), 49–82.

Romanovskiĭ V. R. Homology of free nilpotent Lie rings.

This paper presents the results of calculations of integer homology of free nilpotent Lie algebras $H_i(L(x_1, \ldots, x_r)/\gamma_{N+1})$ in the system of computational algebra GAP. Our attention was focused on the occurrence of unexpected torsion in these homology, similar to the one that arises for 4-generated free nilpotent groups of class 2. The main result is that even for two generators torsion occurs in the fourth integer homology when the nilpotency class is 5. Moreover, only a 7-torsion occurs, and no others. Namely, there is an isomorphism $H_4(L(x_1, x_2)/\gamma_6) \cong \mathbb{Z}^{85} \oplus \mathbb{Z}/7$.

Лаборатория “Современная алгебра и приложения”, 14 линия В.О. 29Б,
199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Romanovskiy.vladislav.00@mail.ru

Поступило 13 мая 2019 г.