Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 478, 2019 г.

Б. Б. Лурье

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЛАТОНОВА ТЕЛА ПО ЕГО РЕБРУ

**“Нельзя не впасть, к концу, как в ересь,
В неслыханную простоту”
Б. Пастернак. “Волны”**

Как известно, платоновыми телами называются правильные многогранники.[1] Таковых, как известно, пять – тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Наша задача состоит в том, чтобы построить правильный многогранник с **целыми** координатами, если известны координаты одного его ребра.

В работе показано, для каких многогранников это возможно, найдены необходимые и достаточные условия такой реализации и построены алгоритмы нахождения таких решений, определено их количество. Также решена и задача восстановления куба (с целыми координатами) по его диагонали.

Решение почти элементарно, хотя и требует привлечения некоторых простых фактов из алгебраической теории чисел.

§1. Необходимые условия

Заметим прежде всего, что икосаэдров и додекаэдров с целыми координатами вершин не существует. В самом деле, для любых целочисленных векторов квадрат косинуса угла между ними рационален, что неверно для правильного пятиугольника. Тем самым додекаэдр с целыми или рациональными координатами не существует. А икосаэдр двойственен додекаэдру – центры граней икосаэдра образуют додекаэдр и обратно.

Что касается других платоновых тел с целыми координатами, то они, разумеется, существуют. Это очевидно для куба в кубической решетке. Центры граней куба образуют октаэдр, а диагонали граней,

Ключевые слова: платоновы тела, эвклидовы кольца.

[1]Поэтому археологи и палеонтологи не получат здесь полезной профессиональной информации.

исходящих из одной вершины, порождают тетраэдр. С другой стороны, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – векторы, исходящие из одной вершины тетраэдра в другие, то векторы $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$, $\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$, $\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ попарно ортогональны и порождают куб. Ребра октаэдра равны половине диагоналей грани куба и паралельны этим диагоналям. Таким образом, задачи восстановления тетраэдра и октаэдра эквивалентны, что позволяет в дальнейшем задачу об октаэдре не рассматривать.

В дальнейшем мы будем использовать следующий результат, дающий необходимое условие существование куба с целыми координатами.

Теорема 1. *Если координаты куба целые, то его ребро – целое число.*

(Факт, наверняка, известен, но установить автора вряд ли возможно.)

Доказательство. Объем любого параллелепипеда есть (с точностью до знака) смешанное произведение векторов, исходящих из одной вершины, и поэтому является целым числом. Поэтому и куб ребра куба, и его квадрат – целые числа. Значит, длина ребра куба – число рациональное, а, значит целое. □

Замечание 1. *Тот же факт справедлив и в любом пространстве нечетной размерности.*

Таким образом, если вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ определяет ребро куба, то $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = l^2$, где l – целое. Соответственно, для вектора $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, определяющего диагональ грани (или ребро тетраэдра) имеем $\vec{b}^2 = b_1^2+b_2^2+b_3^2 = 2l^2$. Для вектора $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, определяющего диагональ куба, имеем $\vec{c}^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 3l^2$. Это – необходимые условия существования соответствующих многогранников. Далее мы покажем, что этого и достаточно.

Теперь сделаем следующую редукцию. Если сумма трех квадратов целых чисел делится на 4, то все слагаемые четные – это элементарно следует из сравнений по $\mod 4$. Но в таком случае все координаты многогранника – четные, и он подобен другому, меньшего размера. Это позволяет свести ситуацию к случаю, когда указанное число l (длина стороны куба) – число нечетное. Далее мы будем это предполагать. (Когда рассматривается диагональ куба, эта редукция существенна.)

§2. Построение куба по его ребру

Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – ребро куба, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = l^2$. Обозначим искомые векторы, исходящие из той же вершины $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, причем считаем тройку $(\vec{a}_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ правой, т.е. $[\vec{a}\vec{x}] = l\vec{y}$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{l} & \frac{a_2}{l} & \frac{a_3}{l} \\ \frac{x_1}{l} & \frac{x_2}{l} & \frac{x_3}{l} \\ \frac{y_1}{l} & \frac{y_2}{l} & \frac{y_3}{l} \end{pmatrix}$$

строго ортогональна (т.е. ее определитель равен 1). Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{l}\right)^2 = 1 - \left(\frac{a_1}{l}\right)^2 = \frac{a_2^2 + a_3^2}{l^2}, \\ \frac{x_1 x_2}{l^2} + \frac{y_1 y_2}{l^2} = -\frac{a_1 a_2}{l^2}, \\ \frac{x_1 y_2}{l^2} - \frac{x_2 y_1}{l^2} = \frac{a_3}{l}. \end{aligned}$$

Отсюда, рассматривая кольцо Гаусса $Z(i)$ получаем

$$(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1) = a_2^2 + a_3^3, (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = -a_1 a_2 - ia_3 l. \quad (2.1)$$

Значит, гауссово число $x_1 + iy_1$ – общий делитель чисел $a_2^2 + a_3^2$, $a_1 a_2 + ia_3 l$.

Рассмотрим сначала случай, когда координаты вектора $\vec{a}$ взаимно просты в совокупности.

Теорема 2. *Наибольший общий делитель гауссовских чисел $a_2^2 + a_3^2$, $a_1 a_2 + ia_3 l$ имеет норму $a_2^2 + a_3^2$.*

Доказательство. Пусть δ – какое-либо из этих чисел. Поскольку кольцо Гаусса эвклидово, δ представляется в виде линейной комбинации:

$$\delta = (a_2^2 + a_3^2)\alpha + (a_1 a_2 + ila_3)\beta, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}(i).$$

Умножая это равенство на $\bar{\delta}$, имеем

$$\delta\bar{\delta} = (a_2^2 + a_3^2)(\alpha\bar{\alpha} + (a_1 a_2 + ila_3))\bar{\alpha}\beta + (a_1 a_2 - ila_3)\alpha\bar{\beta} + (a_1^2 a_2^2 + l^2 a_3^2)\beta\bar{\beta}.$$

Но $a_1^2 a_2^2 + l^2 a_3^2 = (a_1^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2)$. Значит $\delta\bar{\delta}$ делится на $a_2^2 + a_3^2$. Пусть $\delta\bar{\delta} = (a_2^2 + a_3^2)m$, где m – натуральное. Поскольку δ – общий делитель, имеем

$$a_2^2 + a_3^2 = \delta\mu, \quad a_1 a_2 + ila_3 = \delta\nu,$$

где $\mu, \nu \in \mathbb{Z}(i)$. Далее, имеем, $(a_2^2+a_3^2)^2 = \delta\bar{\delta}\mu\bar{\mu} = (a_2^2+a_3^2)m\mu\bar{\mu}$, откуда $a_2^2+a_3^2 = m\mu\bar{\mu} = \delta\mu$, т.е. $a_2^2+a_3^2$ и $\delta = m\bar{\mu}$ делятся на m. Равенство $a_1a_2 + ila_3 = \delta\nu$ дает нам, что $a_1^2a_2^2 + l^2a_3^2 = (a_1^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2) = \delta\bar{\delta}\nu\bar{\nu} = m(a_2^2+a_3^2)\nu\bar{\nu}$, а это значит, что $a_1a_3 + ila_3$ и $a_1^2+a_3^2$ также делятся на m. Таким образом, m является общим делителем целых чисел $a_2^2+a_3^2$, $a_1^2+a_3^2$, a_1a_2, la_3. В силу взаимной простоты a_1, a_2, a_3 получаем, что $m = 1$, и $\delta\bar{\delta} = a_2^2 + a_3^2$. □

Взяв x_1, y_1, как вещественную и мнимую часть δ (определенного с точностью до обратимых элементов $\mathbb{Z}(i)$), вычислим x_2, y_2 из (2.1). Взяв в качестве третьего столбца векторное произведение первых двух, деленное на l, (причем первая координата, по построению равна a_3), мы получаем матрицу, подобную ортогональной с множителем l. Числа x_3, y_3 рациональны по построению, и их квадраты – целые числа. Таким образом, мы нашли матрицу, состоящую из попарно ортогональных векторов длины l, и соответственно, восстановили куб.

Поскольку δ определено с точностью до единиц кольца $\mathbb{Z}(i)$, то существуют четыре куба с заданным ребром. Геометрически это соответствует поворотам куба вокруг фиксированного ребра на 90^o, 180^o, 270^o.

Итак, если координаты ребра взаимно просты в совокупности (и их сумма квадратов есть квадрат), существует ровно четыре решения нашей задачи.

Если наибольший общий делитель координат ребра равен d, количество решений может быть больше. Этот вопрос мы обсудим позже.

§3. Построение тетраэдра по его ребру

Мы будем решать эквивалентную задачу – построение куба по диагонали его грани (понятно, что если $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, – попарно ортогональные векторы длины l, то $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{a}_1 + \vec{a}_3$, $\vec{a}_2 + \vec{a}_3$ определяют ребра тетраэдра).

Итак, пусть $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ – целочисленный вектор, определяющий диагональ грани куба. Необходимое условие, как было сказано выше, состоит в том, что $\vec{b}^2 = 2l^2$. Покажем, что этого и достаточно для восстановления искомого куба.

Обозначим три попарно ортогональных вектора куба, исходящих из одной вершины, через $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, причем $\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$, и тройка $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ – левая. Рассмотрим вектор $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, равный разности $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Тогда векторы $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$ попарно ортогональны и образуют правую тройку. При этом $\vec{v}^2 = \vec{b}^2 = 2l^2$, $\vec{z}^2 = l^2$.

Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{b_1}{l\sqrt{2}}, & \frac{b_2}{l\sqrt{2}}, & \frac{b_3}{l\sqrt{2}} \\ \frac{v_1}{l\sqrt{2}}, & \frac{v_2}{l\sqrt{2}}, & \frac{v_3}{l\sqrt{2}} \\ \frac{z_1}{l}, & \frac{z_2}{l}, & \frac{z_3}{l} \end{pmatrix}.$$

Это строго ортогональная матрица. Соответственно, как и в предыдущем пункте, имеем равенства

$$\Big(\frac{v_1}{l\sqrt{2}} + i\frac{z_1}{l}\Big)\Big(\frac{v_1}{l\sqrt{2}} - i\frac{z_1}{l}\Big) = 1 - \frac{b_1^2}{2l^2} = \frac{b_2^2 + b_3^2}{2l^2},$$

$$\Big(\frac{v_1}{l\sqrt{2}} + i\frac{z_1}{l}\Big)\Big(\frac{v_2}{l\sqrt{2}} - i\frac{z_2}{l}\Big) = -\frac{b_1 b_2}{2l^2} - i\frac{b_3}{l\sqrt{2}}.$$

Отсюда, рассматривая кольцо $\mathbb{Z}(\sqrt{2}i) = \mathbb{Z}(\sqrt{-2})$, получаем

$$\begin{cases} (v_1 + z_1\sqrt{-2})(v_1 - z_1\sqrt{-2}) = b_2^2 + b_3^2 \\ (v_1 + z_1\sqrt{-2})(v_2 - z_2\sqrt{-2}) = -b_1 b_2 - l b_3\sqrt{-2}, \end{cases} \tag{3.1}$$

откуда $v_1 + z_1\sqrt{-2}$ – общий делитель чисел $b_2^2 + b_3^2$, $b_1 b_2 + l b_3\sqrt{-2}$.

Снова обратимся к случаю, когда координаты b_1, b_2, b_3 взаимно просты в совокупности. Напомним, что кольцо $\mathbb{Z}(\sqrt{-2})$ является эвклидовым (как и кольцо Гаусса), и наибольший общий делитель чисел из этого кольца может быть найден посредством алгоритма Эвклида.

Теорема 3. *Если b_1, b_2, b_3 взаимно просты в совокупности, то наибольший общий делитель δ чисел $b_2^2 + b_3^2$, $b_1 b_2 + l b_3\sqrt{-2}$ имеет норму $b_2^2 + b_3^2$.*

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 2.

Как и ранее, находим остальные координаты векторов $\vec{v}$ и $\vec{z}$, а затем $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{v})$ и $\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{v})$. Полученные вектора являются целочисленными. В самом деле, из (3.1) следует, что $v_1^2 \equiv b_2^2 + b_3^2 \equiv b_1^2(\mod 2)$, т.е. v_1 и b_1 имеют одинаковую четность; это справедливо и для других координат.

Единицами в $\mathbb{Z}(\sqrt{-2})$ являются ± 1. Поэтому при взаимной простоте (b_1, b_2, b_3) можно восстановить ровно два куба с данной диагональю грани. Геометрически это соответствует повороту куба вокруг такой диагонали на 180^o. Равным образом, можно восстановить и два тетраэдра с данным ребром, что геометрически менее наглядно.

Случай, когда координаты вектора $\vec{b}$ не взаимно просты, будет исследован ниже.

§4. Восстановление куба по его диагонали

Пусть $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ – целочисленный вектор, определяющий диагональ куба. Как уже было сказано, требование, чтобы $\vec{c}^2 = 3l^2$, необходимо для существования такого куба. Покажем, что этого и достаточно. Здесь приходится преодолевать некоторые технические трудности.

Итак, пусть векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ определяют ребра искомого куба, причем $\vec{c} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$, и тройка $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ – правая. Будем искать вектора $\vec{v} = \vec{c} - 3\vec{x}$ и $\vec{w} = \vec{y} - \vec{z}$. Ясно, что векторы $\vec{c}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ попарно ортогональны, и тройка $(\vec{c}, \vec{v}, \vec{w})$ – правая (в самом деле, $[\vec{c}, \vec{v}] = -3[\vec{x}, \vec{v}] = -3[\vec{x}, \vec{c}] = -3l(\vec{z} - \vec{y})$). При этом $\vec{c}^2 = 3l^2$, $\vec{v}^2 = 6l^2$, $\vec{w}^2 = 2l^2$. Таким образом, координаты векторов $\frac{\vec{c}}{l\sqrt{3}}$, $\frac{\vec{v}}{l\sqrt{6}}$, $\frac{\vec{w}}{l\sqrt{2}}$ образуют строго ортогональную матрицу. После выкладок, аналогичных проделанным в предыдущих случаях, получаем равенство в кольце $\mathbb{Z}(\sqrt{-3})$:

$$\begin{cases} (v_1 + w_1\sqrt{-3})(v_1 - w_1\sqrt{-3}) = 2(c_2^2 + c_3^2) \\ (v_1 + w_1\sqrt{-3})(v_2 - w_2\sqrt{-3}) = -2(c_1c_2 + lc_3\sqrt{-3}). \end{cases} \tag{4.1}$$

Кольцо $\mathbb{Z}(\sqrt{-3})$ не является эвклидовым и даже целозамкнутым. Но эвклидовым является кольцо $\mathbb{Z}(\rho)$, где $\rho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ – корень третьей степени из 1.

Из равенства $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 3l^2$ следует (при нечетном l), что c_1, c_2, c_3 – числа нечетные. Поэтому правые части в равенствах (4.1) делятся на 4 в кольце $\mathbb{Z}(\rho)$ (и не делятся на 8).

Рассмотрим случай, когда координаты вектора $\vec{c}$ взаимно просты в совокупности. Пусть $\rho \in \mathbb{Z}(\rho)$ – наибольший общий делитель чисел $\frac{c_2^2+c_3^2}{2}$, $\frac{c_1c_2+lc_3\sqrt{-3}}{2} = \frac{c_1c_2+lc_3}{2} + lc_3\rho$.

Теорема 4. *В случае взаимно простых c_1, c_2, c_3 наибольший общий делитель чисел $\frac{c_2^2+c_3^2}{2}$, $\frac{c_1c_2+lc_3\sqrt{-3}}{2}$ имеет норму $\frac{c_2^2+c_3^2}{2}$.*

Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.

Таким образом, число $v_1 + w_1\sqrt{-3}$ может отличаться от числа 2δ лишь единицей в кольце $\mathbb{Z}(\rho)$. Заметим также, что число 2δ уже содержится в $\mathbb{Z}(\sqrt{-3})$. Построение по данному δ координат векторов $\vec{v}$, $\vec{w}$ проводится стандартно.

И хотя в $\mathbb{Z}(\rho)$ шесть обратимых элементов $(\pm 1, \pm\rho, \pm\rho^2)$, по данной диагонали можно восстановить только один куб. Докажем это.

Вектор $\vec{x}$ в наших обозначениях равен $\frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{v})$. Поэтому координаты вектора $\vec{c}-\vec{v}$ должны делиться на 3. Из (4.1) следует, что

$$v_1v_2 \equiv -2c_1c_2 \equiv c_1c_2 \pmod 3.$$

Аналогично,

$$v_1v_3 \equiv c_1c_3 \pmod 3, \quad v_2v_3 \equiv c_2c_3 \pmod 3.$$

Поскольку сумма квадратов $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ делится на 3, то все они не кратны 3. Но из этих сравнений вытекает, что либо

$$c_1 - v_1 \equiv c_2 - v_2 \equiv c_3 - v_3 (\mod 3),$$

либо

$$c_1 + v_1 \equiv c_2 + v_2 \equiv c_3 + v_3 (\mod 3).$$

Во втором случае нужно заменить δ на $-\delta$. Что касается умножения δ на ρ или ρ^2, это приводит к циклической перестановке векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. Геометрически это очевидно – вращая куб вокруг диагонали, можно циклически переставить вершины, равноотстоящие от концов этой диагонали. Разумеется, это можно проверить и прямым вычислением, которое мы опускаем.

§5. Число решений

До сих пор мы рассматривали случаи, когда координаты заданых ребра или диагонали были взаимно просты в совокупности.

Пусть теперь ребро куба имеет координаты (da_1, da_2, da_3), ребро тетраэдра – (db_1, db_2, db_3), диагональ куба – (dc_1, dc_2, dc_3), где d – наибольший общий делитель координат. Соответственно, и число l заменяется на dl.

Формулы (2.1) записываются теперь в виде

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1) &= d^2(a_2^2 + a_3^2),\\ (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) &= d^2(-a_1a_2 - ia_3l).\end{aligned} \tag{5.1}$$

Если снова обозначить через δ наибольший общий делитель гауссовых чисел $(a_2^2 + a_3^2, -a_1a_2 - ia_3l)$, то имеем $x_1 + iy_1 = \delta\gamma$, где γ – гауссово число с нормой d^2. Следовательно, любое решение зависит от числа $\gamma = q + ri$, где $q^2 + r^2 = d^2$, $q, r \in \mathbb{Z}$. При этом, умножение на γ на единицу кольца $\mathbb{Z}(i)$ компенсируется умножением δ на сопряженную единицу. Резюмируя вышеизложенное, получаем, что число кубов с данным ребром равно числу целых решений уравнения $x^2 + y^2 = d^2$, где d – наибольший общий делитель координат.

Формулы (3.1) записываются теперь в виде

$$\begin{aligned} &(v_1 + z_1\sqrt{-2})(v_1 - z_1\sqrt{-2}) = d^2(b_2^2 + b_3^2), \\ &(v_1 + z_1\sqrt{-2})(v_2 - z_2\sqrt{-2}) = d^2(-b_1 b_2 - l b_3\sqrt{-2}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Повторяя те же соображения, приходим к выводу, что число тетраэдров с заданным ребром равно числу целочисленных решений уравнения $x^2 + 2y^2 = d^2$, где d – нод координат вектора $\vec{b}$.

В случае, когда куб восстанавливается по его диагонали, ответ несколько иной. Именно, число кубов с заданной диагональю равно **половине** числа решений уравнения $x^2 + 3y^2 = d^2$, где d – наибольший **нечетный** делитель координат ребра.

Список литературы

1. Р. О. Кузьмин, Д. К. Фаддеев, *Алгебра и арифметика комплексных чисел*, Учпедгиз, Л., 1939.

Lur'e B. B. The reconstruction of Platonic solid from its rib.

We consider the problem of reconstruction of Platonic solid with integer coordinates of vertices when its edge (or the diagonal of the cube) is given. We find the necessary and sufficient conditions of existence of such polyhedrons as well as the algorithm of construction and the number of solutions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `lurje@pdmi.ras.ru`

Поступило 1 мая 2019 г.