Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 478, 2019 г.

Ли Лу

Gr-ИНЪЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ И gr-ПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ НАД G-ГРАДУИРОВАННЫМИ КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

§1. Введение

В последнее время отмечается значительный интерес к кольцам и другим алгебраическим структурам, снабжённым градуировкой. Это объясняется тем, что кольца из многих важных классов колец, например, кольца многочленов, матричные кольца, групповые кольца, допускают естественную градуировку.

В теории градуированных колец вводятся стандартные градуированные аналоги понятий классической теории колец, которые принято обозначать приставкой "gr-". Например, gr-артинов (gr-нётеров) модуль – это градуированный модуль с условием минимальности (максимальности) для градуированных подмодулей.

Естественный и важный вопрос в теории градуированных колец состоит в том, чтобы найти градуированные аналоги некоторых классических теорем. Например, Ч. и М. Парк в своей работе [9] доказали теорему Крулля о главном идеале, теорему Крулля–Акизуки и теорему Мори–Нагата в градуированном случае.

Хорошо известно, что разложение инъективных модулей над нётеровыми кольцами и разложение проективных модулей над артиновыми кольцами являются одними из наиболее красивых и важных результатов в коммутативной алгебре. Наша цель – доказать аналогичные результаты для градуированных колец. Это важно для нас, чтобы понять структуру модулей над градуированными кольцами.

В нашей статье после предоставления некоторых необходимых определений и предварительных результатов в разделе 2 мы получили в разделе 3 структурную теорему для gr-инъективных модулей над gr-нётеровыми G-градуированными коммутативными кольцами:

Ключевые слова: градуированные коммутативные кольца, gr-инъективные модули, gr-проективные модули.

Работа выполнена при поддержке **Китайского стипендиального совета**.

Главная теорема 1. (Теорема 3.14) *Пусть R является gr-нётеровым G-градуированным коммутативным кольцом. Справедливы следующие утверждения*:

- (1) *Если $0 \neq E$ является gr-инъективным модулем, то E является прямой суммой неразложимых gr-инъективных модулей.*
- (2) *Если $0 \neq E$ является неразложимым gr-инъективным модулем, то $\mathrm{End}_{Gr(R)}(E)$ является локальным кольцом.*
- (3) *Если $0 \neq E$ является неразложимым gr-инъективным модулем, то $E = E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}(g))$, где $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^{gr}(R)$ и $g \in G$.*
- (4) *Пусть $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}^{gr}(R)$, $g, h \in G$ и $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$,тогда $E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}(g)) \neq E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{q}}(h))$.*

В разделе 4 мы получили структурную теорему для gr-конечнопорожденных gr-проективных модулей над gr-артиновыми G-градуированными коммутативными кольцами:

Главная теорема 2. (Теорема 4.3) *Пусть R является gr-артиновым G-градуированным коммутативным кольцом. Справедливы следующие утверждения:*

- (1) *R является конечным произведением gr-артиновых gr-локальных колец:*
$$R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n. \tag{1.1}$$
$\mathrm{End}_{Gr(R)}(P_i) = (P_i)_e$ *является локальным кольцом. Если $R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m$, где P_i и N_j являются gr-артиновыми gr-локальными кольцами, то $m = n$, и существует такая биекция $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, что $N_i \cong P_{\pi(i)}$. Здесь $P_1, P_2, \ldots, P_n$ являются попарно неизоморфными gr-неразложимыми прямыми слагаемыми модуля R.*
- (2) *$J^{gr}(P_i)$ является единственным gr-максимальным подмодулем модуля P_i, и $S_i = \frac{P_i}{J^{gr}(P_i)}$ является gr-простым модулем.*
- (3) *Если S является gr-простым R-модулем, тогда существует такие P_i и $g \in G$, что $S = \frac{P_i}{J^{gr}(P_i)}(g)$.*
- (4) *Если $0 \neq P$ является gr-конечнопорожденным gr-проективным модулем, то P является конечной прямой суммой неразложимых gr-проективный модулей.*

- (5) *Если* $0 \neq P$ *является неразложимым* gr*-проективным модулем, то существуют такие* P_i *и* $g \in G$*, что* $P \cong P_i(g)$.
- (6) *Если* $i \neq j$*, то* $\frac{P_i}{J^{gr}(P_i)} \neq \frac{P_j}{J^{gr}(P_j)}$.

Дополнительную информацию о градуированных кольцах можно получить в [1, 5–10, 12].

§2. Основные определения и свойства

2.1. Градуированные кольца, градуированные модули и градуированные гомоморфизмы. Абелева группа G называется *линейно упорядоченной*, если между элементами установлено отношение линейного порядка $\leq$, подчиненное требованию: если $a \leq b$, то $ca \leq cb$. В нашей статье G всегда является линейно упорядоченной абелевой группой.

Определение 2.1. *Коммутативное кольцо* R *называется* G*-градуированным, если* $R = \bigoplus\limits_{g \in G} R_g$*, где* $\{R_g : g \in G\}$ *является семейством аддитивных подгрупп кольца* R*, таких, что* $R_g R_h \subset R_{gh}$ *для всех* $g, h \in G$*. Элементы множества* $h(R) = \bigcup_{g \in G} R_g$ *называются однородными, ненулевой элемент* $r \in R_g$ *называется однородным элементом степени* g*; обозначение:* $deg(r) = g$*. Градуированное кольцо, каждый ненулевой однородный элемент которого обратим, называется градуированным полем. Однородный элемент* a *называется однородным делителем нуля, если существует ненулевое однородное* b *такое, что* $ab = 0$*.* Gr*-областью целостности называется градуированное коммутативное кольцо без однородного делителей нуля.*

Замечание. ([7], предложение 5.2.16) **Gr-область целостности всегда является областью целостности. Gr-поле не всегда является полем!**

Пример 2.1. *Пусть* k *является полем,* $R = k[x, x^{-1}]$ *является* $\mathbb{Z}$*-градуированным кольцом с градуировкой* $R_n = kx^n, n \in \mathbb{Z}$*. Тогда* R *является* gr*-полем, но не является полем.*

Предложение 2.2 ([7], предложение 1.1.1)**.** *Для градуированного кольца* $R = \bigoplus\limits_{g \in G} R_g$ *справедливы следующие утверждения*:

- (1) $1 \in R_e$;
- (2) *если* $r \in R_g$*, то* $r^{-1} \in R_{g^{-1}}$.

Определение 2.3. *Модуль M над R называется G-градуированным, если $M = \bigoplus\limits_{g\in G} M_g$, где $\{M_g : g \in G\}$ является семейством аддитивных подгрупп абелевой группы $(M,+)$, таких, что $R_g M_h \subset M_{gh}$ для всех $g,h \in G$. Элементы множества $h(M) = \bigcup\limits_{g\in G} M_g$ называются однородными; ненулевые элементы в M_g называются однородными степени g. Подмодуль N градуированного модуля M является градуированным, если $N = \bigoplus\limits_{g\in G} N_g$, где $N_g = N \cap M_g$. Градуировка модуля M индуцирует градуировку на фактор-модуле M/N по градуированному подмодулю N:*

$$(M/N)_g = \{m + N | m \in M_g\}. \tag{2.2}$$

Градуированный подмодуль I модуля R называется градуированным идеалом (или gr-идеалом). Обозначим через $Mod(R)$ категорию R-модулей, а через $Gr(R)$ категорию градуированных R-модулей, объектами которой являются градуированные R-модули, а морфизмами являются гомоморфизмы, сохраняющие градуировку, т.е.

$$\mathrm{Hom}_{Gr(R)}(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N) : f(M_g) \subseteq N_g\}. \tag{2.3}$$

Очевидно, что $Gr(R)$ является абелевой категорией (см. [7], Раздел 2.2).

Определение 2.4. *Если $M = \bigoplus\limits_{g\in G} M_g$ является градуированным R-модулем и $g \in G$, то обозначим через $M(g)$ модуль M, рассматриваемый с градуировкой $M(g)_h = M_{gh}, h \in G$. Градуированный R-модуль $M(g)$ называется g-сдвигом модуля M.*

Определение 2.5. *Градуированный модуль F называется gr-свободным, если он обладает базисом, состоящим из однородных элементов, т.е. если для некоторого множества $\mathcal{I}$, $g_i \in G$ при $i \in \mathcal{I}$, и $F \cong \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} R(g_i)$. Если $\mathcal{I}$ является конечным множеством, то F называется gr-конечнопорождённым свободным модулем.*

Предложение 2.6 ([13], Предложение 2.6.14)**.** *Каждый градуированный R-модуль M изоморфен фактор-модулю некоторого gr-свободного модуля.*

Определение 2.7. *M называется gr-конечнопорождённым модулем, если существует точная последовательность*

$$F \to M \to 0, \tag{2.4}$$

где F является gr-конечнопорождённым свободным модулем.

2.2. Gr**-идеалы.**

Определение 2.8. *Gr-идеал $\mathfrak{p}$ градуированного кольца R называется gr-простым идеалом, если для любых двух однородных элементов x, y из $xy \in \mathfrak{p}$ следует либо $x \in \mathfrak{p}$, либо $y \in \mathfrak{p}$. Через $\mathrm{Spec}^{gr}(R)$ обозначаем множество всех gr-простых идеалов кольца R. Gr-идеал $\mathfrak{m}$ называется gr-максимальным идеалом, если не существует gr-идеал I такой, что $\mathfrak{m} \subsetneqq I \subsetneqq R$. Через $\mathrm{Max}^{gr}(R)$ обозначаем множество всех gr-максимальных идеалов кольца R.*

Предложение 2.9 ([7], предложение 5.2.16)**.** *В градуированном кольце R идеал $\mathfrak{p}$ является gr-простым идеалом тогда и только тогда, когда он одновременно является простым идеалом* (*обычным*) *и градуированном идеалом.*

Определение 2.10. *Gr-высота gr-простого идеала $\mathfrak{p}$ является супремумом длин цепочек gr-простых идеалов, содержащихся в $\mathfrak{p}$. Обозначаем gr-высоту $\mathfrak{p}$ через $h\text{-}ht(\mathfrak{p})$. Gr-размерность Крулля градуированного кольца R является максимумом длины по множеству всех цепочек gr-простых идеалов R. Обозначаем gr-размерность Крулля R через $h\text{-}\dim(R)$.*

Определение 2.11. *В градуированном кольце R однородный элемент $x \in h(R)$ называется gr-нильпотентом, если $x^n = 0$ для некоторого $n > 0$. Идеал $\mathrm{Nil}^{gr}(R)$ всех gr-нильпотентов градуированного кольца R называется gr-нильрадикалом.*

Предложение 2.12. *Gr-нильрадикал градуированного кольца R совпадает с пересечением всех его gr-простых идеалов.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [4], предложение 2.12). В градуированном случае можно повторить это доказательство. $\square$

Предложение 2.13 ([7], предложение 5.2.16)**.** *Gr-нильрадикал $\mathrm{Nil}^{gr}(R)$ градуированного кольца R совпадает с нильрадикалом $\mathrm{Nil}(R)$.*

Определение 2.14. *В градуированном кольце R однородный элемент $u \in R_e$ называется gr-идемпотентом, если $u^2 = u$.*

Предложение 2.15. *Пусть R является градуированным кольцом. Если $R = \bigoplus_{a\in A} I_a$, где I_a является gr-идеалом для любого $a \in A$, то справедливы следующие утверждения:*

- (1) *A является конечным множеством.*
- (2) *Пусть $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, тогда для каждого $a \in A$ существует $u_a \in I_a$ такое, что*
  - (i) $I_a = Ru_a$;
  - (ii) $1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$;
  - (iii) $u_a u_b = u_a \delta_{ab}$, *где δ_{ij} – символ Кронекера.*

Обратно, если существуют gr-идемпотенты $u_1, u_2, \cdots, u_n$ такие, что $1 = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ и $u_a u_b = u_a \delta_{ab}$, то $R = \bigoplus_{a=1}^{n} Ru_a$.

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [2], предложения 7.2, 7.3, 7.5). В градуированном случае можно повторить эти доказательства. Нам нужно еще доказать только то, что $u_a \in R_e$ для каждого $a \in A$.

Пусть $u_a = x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_s}$, где $i_1, i_2, \cdots, i_s \in G$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$, и x_{i_s} является однородным элементом степени i_s. Пусть $x_{i_1} \neq 0$. Раз $u_a u_a = u_a$, сравниваем коэффициент и получаем, что $u_a = x_{i_1} \in R_e$. □

2.3. *Gr*-кольцо частных и *gr*-модуль частных.

Определение 2.16. *Gr-мультипликативной системой в градуированном кольце R называется подмножество S в $h(R)$, содержащее 1, не содержащее нуля и замкнутое по умножению (в кольце R). Градуировка кольца R индуцирует градуировку на кольце частных $S^{-1}R$ по gr-мультипликативной системе S: $(S^{-1}R)_g = \{\frac{r}{s} \in S^{-1}R | r \in R_h, s \in S \cap R_k, g = hk^{-1}\}$.*

Пусть $M = \oplus_{g\in G} M_g$ – градуированный R-модуль. Градуировка модуля M индуцирует градуировку на модуле частных $S^{-1}M$ по gr-мультипликативной системе

$$S : (S^{-1}M)_g = \Big\{\frac{m}{s} \in S^{-1}M | m \in M_h, s \in S \cap R_k, g = hk^{-1}\Big\}.$$

Пример 2.2. *Пусть $R = F[x]$ является кольцом многочленов над полем F.*

- *Если рассматриваем R как обычное кольцо, $S = R - 0$, тогда $S^{-1}R = F(x)$.*

- *Если рассматриваем* R *как* $\mathbb{Z}$*-градуированное кольцо* $R = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} Fx^n$, $S = h(R) - 0$, *тогда* $S^{-1}R = F[x, x^{-1}]$.

Определение 2.17. *Градуированное кольцо* R *gr-локально, если* R *имеет единственный gr-максимальный идеал.*

Пример 2.3. *Пусть* R *является градуированной областью целостности,* $S = h(R) - 0$, *тогда* $S^{-1}R$ *называется gr-полем частных* R*(обозначение:* $\mathrm{Frac}^{gr}(R)$*).*

Пример 2.4. *Пусть* R *является градуированным кольцом,* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^{gr}(R)$, *тогда* $S = h(R) - \mathfrak{p}$ *является gr-мультипликативной системой и* $R_{(\mathfrak{p})} := S^{-1}R$ *является gr-локальным кольцом,* $\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}$ *является единственным gr-максимальным идеалом* $R_{(\mathfrak{p})}$. *Определяем* $\kappa_{(\mathfrak{p})} = \frac{R_{(\mathfrak{p})}}{\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}}$.

2.4. Gr-проективные модули и gr-инъективные модули.

Определение 2.18. *Градуированный* R*-модуль gr-проективен, если он проективен как объект в категории* $Gr(R)$.

Предложение 2.19 ([7, раздел 2.2])**.** *Пусть* P *является градуированным* R*-модулем, следующие условия эквивалентны:*

- (1) P *gr-проективен.*
- (2) *Существует такой gr-модуль* K, *что прямая сумма* $F = P \oplus K$ *gr-свободна.*

Предложение 2.20. *Пусть* P *является градуированным* R*-модулем, следующие условия эквивалентны:*

- (1) P *gr-проективен.*
- (2) *Существует такое множество* $\{x_i \in h(P) : i \in \mathcal{I}\}$ *и существует такое множество* $\{f_i \in \mathrm{Hom}_{Gr(R)}(P, R) : i \in \mathcal{I}\}$, *что* $\{i \in I \mid f_i(x) \neq 0\}$ *является конечным множеством для любого* $x \in P$ *и* $x = \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) x_i$.

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [11], предложение 3.10). В градуированном случае можно повторить это доказательство. □

Определение 2.21. *Градуированный* R*-модуль* M *gr-инъективен, если он инъективен как объект в категории* $Gr(R)$.

Предложение 2.22 (Критерий Бэра для градуированных модулей, [7], предложение 2.4.8)**.** *Пусть Q является градуированным R-модулем, следующие условия эквивалентны:*

- 1) *Q gr-инъективен.*
- 2) *Для любого градуированного идеала I кольца R, пусть i : $I \to R$ каноническое вложение, тогда*

$$\mathrm{Hom}_{Gr(R)}(R, Q) \to \mathrm{Hom}_{Gr(R)}(I, Q) \to 0 \tag{2.5}$$

  точна.

Пример 2.5. *Пусть R является градуированной областью целостности, тогда $F = \mathrm{Frac}^{gr}(R)$ gr-инъективен.*

Доказательство. Возьмем любой gr-идеал $I \neq 0$, и пусть $f : I \to F$ является gr-гомоморфизмом, нам нужно найти такой gr-гомоморфизм $g : R \to F$, что $g|_I = f$.

Пусть $0 \neq a \in h(I)$, существует такое $x_a \in h(F)$, что $ax_a = f(a)$. Для любых $a, b \in h(I) - 0$, мы имеем $f(ab) = af(b) = bf(a)$, то есть $abx_a = abx_b$, так что $x_a = x_b$, значит $x = x_a$ не зависит от выбора $a \in h(I) - 0$. Теперь пусть $g(r) = rx$ для $r \in R$, тогда $g|_I = f$. $\square$

Определение 2.23. *Градуированный подмодуль N градуированного модуля M называется gr-существенным, если для любого градуированного подмодуля N' равенство $N \cap N' = 0$ влечет $N' = 0$.*

Определение 2.24 ([13], предложение 33)**.** *Пусть $M \subset E$ являются градуированными R-модулями. Следующие условия равносильны*:

- (1) *E является максимальным gr-существенным расширением M.*
- (2) *E является gr-существенным расширением M и E является gr-инъективным модулем.*
- (3) *E является минимальным gr-инъективным модулем, содержащим M.*

При выполнении эквивалентных условий (1)–(3) *модуль E называется gr-инъективной оболочкой модуля M и обозначается через $E^{gr}(M)$.*

Пример 2.6. *Пусть R является градуированной областью целостности, тогда $F = \mathrm{Frac}^{gr}(R)$ является gr-инъективной оболочкой R.*

Доказательство. Мы уже доказали, что F gr-инъективен (см. пример 2.5). Очевидно, что $R \subset F$ является gr-существенным расширением. $\square$

2.5. Gr**-простой модуль,** gr**-радикал Джекобсона,** gr**-полупростой модуль.**

Определение 2.25.

- (1) *Градуированный модуль* M*, имеющий ровно два градуированных подмодуля* 0 *и* M*, называется* gr*-простым модулем.*
- (2) *Градуированный подмодуль* N *градуированного модуля* M *называется* gr*-минимальным (*gr*-максимальным), если* N *является минимальным ненулевым (максимальным собственным) элементом множества градуированных подмодулей* M*.*

Предложение 2.26 ([7], предложение 2.7.1)**.** *Пусть* M *является* gr*-простым модулем. Тогда*

- (1) *Для всех* $g \in G$*,* R_e*-модуль* M_g *либо нулевой, либо простой.*
- (2) *Если* $M_g \neq 0$*, то* $M \cong (R/I)(g^{-1})$ *для некоторого* gr*-максимального идеала* I *кольца* R*.*

Определение 2.27. *Градуированный подмодуль* N *градуированного модуля* M *называется* gr*-малым, если для любого градуированного подмодуля* N' *равенство* $N + N' = M$ *влечет* $N' = M$*.*

Определение 2.28 ([7], раздел 2.9)**.** *Сумма всех малых* gr*-подмодулей* $J^{gr}(M)$ *совпадает с пересечением всех* gr*-максимальных подмодулей.* $J^{gr}(M)$ *называется* gr*-радикалом Джекобсона.*

Предложение 2.29 ([7], предложение 2.9.1; [2], предложение 9.13, предложение 9.14)**.** *Для градуированного кольца* $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ *справедливы следующие утверждения*:

- (1) *Если* $f \in \mathrm{Hom}_{Gr(R)}(M, N)$*, то* $f(J^{gr}(M)) \subset J^{gr}(N)$*.*
- (2) *(Лемма Накаямы)* $J^{gr}(R) \cdot M \subset J^{gr}(M)$*.*
- (3) *Если* M *является* gr*-конечнопорождённым модулем, то* $J^{gr}(M)$ *является* gr*-малым.*
- (4) *Верно* $h(J^{gr}(R)) = \bigcup_{g\in G} \{r \in R_g |$ *для всех* $s \in R_{g^{-1}}$*,* $1 - rs$ *обратим*$\}$*.*

Предложение 2.30. *Для градуированного кольца* $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$*, если* P gr*-проективен, то* $J^{gr}(R) \cdot P = J^{gr}(P)$*.*

Доказательство. По предложению 2.20, существует такое множество

$$\{x_i \in h(P) : i \in \mathcal{I}\}$$

и существует такое множество $\{f_i \in \mathrm{Hom}_{Gr(R)}(P,R) : i \in \mathcal{I}\}$, что для любого $x \in P$ $\{i \in \mathcal{I} : f_i(x) \neq 0\}$ является конечным множеством и $x = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} f_i(x)x_i$. По предложению 2.29 (1) мы имеем $f_i(J^{gr}(P)) \subset J^{gr}(R)$, так что для любого $u \in J^{gr}(P)$ $u = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} f_i(u)x_i \in J^{gr}(R)\cdot P$. □

Определение 2.31. *Пусть R является градуированным кольцом, P, M являются градуированными R-модулями и P gr-проективен. Если $f : P \to M$ является эпиморфизмом в категории $Gr(R)$ и $Kerf$ является gr-малым подмодулем модуля P, тогда P называется gr-проективным накрытием модуля M и обозначается через $P^{gr}(M)$.*

Предложение 2.32. *Gr-проективное накрытие если существует, то единственно с точностью до изоморфизма (в категории $Gr(R)$).*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [2], лемма 17.12). В градуированном случае можно повторить это доказательство. □

Определение 2.33. *Градуированный модуль M называется gr-полупростым, если M изоморфен прямой сумме gr-простых модулей.*

Предложение 2.34. *Пусть M является градуированным R-модулем, следующие условия эквивалентны*:

- 1) *M является gr-полупростым.*
- 2) *Для каждого gr-подмодуля N существует дополнение P, такое что $M = N \oplus P$.*
- 3) *M можно разложить в прямую сумму gr-простых подмодулей M.*
- 4) *Любая точная последовательность вида $0 \to N \to M \to S \to 0$ в категории $Gr(R)$ расщепляется.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [2], теорема 9.6). В градуированном случае можно повторить это доказательство. □

2.6. Gr-неразложимый модуль.

Определение 2.35. *Градуированный модуль M называется gr-неразложимым, если он ненулевой и его нельзя разложить в прямую сумму двух ненулевых градуированных модулей.*

Предложение 2.36. *Пусть R является градуированным кольцом, следующие условия эквивалентны:*

- (1) *R не имеет gr-идемпотента $u \neq 0, 1$.*
- (2) *R как градуированный R-модуль gr-неразложим.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $R = A \oplus B$. По предложению 2.15, существует gr-идемпотент u такой, что $A = Ru$. Раз $u = 0$ или $u = 1$, мы имеем $A = 0$ или $A = R$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть u является gr-идемпотентом, тогда мы имеем $u(1-u) = 0$ и $1 = u + (1-u)$. По предложению 2.15, $R = Ru \oplus R(1-u)$. Раз R как G-градуированный R-модуль gr-неразложим, мы имеем $Ru = 0$ или $R(1-u) = 0$.

Если $Ru = 0$, то $u = 0$.

Если $R(1-u) = 0$, то $Ru = R$, $R(1-u) = Ru(1-u) = 0$, так что $(1-u)1 = 1 - u = 0$. □

Предложение 2.37. *Пусть M является градуированным R-модуль и $S = \mathrm{End}_{Gr(R)}(M)$, следующие условия эквивалентны:*

- 1) *Кольцо S неразложимо.*
- 2) *M как градуированный R-модуль gr-неразложим.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [2], предложение 5.10). В градуированном случае можно повторить это доказательство. □

2.7. Gr-нётеров модуль и gr-артинов модуль.

Определение 2.38. *Gr-нётеровым модулем называется градуированный R-модуль M, в котором всякая последовательность gr-подмодулей $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n \subset \cdots$ стабилизируется, то есть $N_n = N_{n+1} = \cdots$, начиная с некоторого n. Если R как градуированный R-модуль gr-нётеров, то называем R gr-нётеровым кольцом.*

Определение 2.39. *Gr-артиновым модулем называется градуированный R-модуль M, в котором всякая последовательность gr-подмодулей $N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_n \supset \cdots$ стабилизируется, то есть $N_n = N_{n+1} = \cdots$, начиная с некоторого n. Если R как градуированный R-модуль gr-артинов, то называем R gr-артиновым кольцом.*

Определение 2.40. *Пусть M является градуированным R-модулем. Мы говорим, что gr-длина цепочки его gr-подмодулей вида $N_1 \subsetneqq N_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq N_n$ равна n. Gr-длина модуля M является наибольшей gr-длиной* *цепочки среди всех цепочек его gr-подмодулей. Если наибольшей gr-длины цепочки не существует, то gr-длина M равна бесконечности. Очевидно, что градуированный модуль имеет конечную gr-длину тогда и только тогда, когда он является gr-артиновым и gr-нётеровым.*

Предложение 2.41. (Лемма Фитинга в градуированном случае) *Пусть M является градуированным R-модулем и имеет конечную gr-длину. Справедливы следующие утверждения:*

- (1) *Пусть $f \in \mathrm{End}_{Gr(R)}(M)$, тогда f является мономорфизмом $\Leftrightarrow$ f является эпиморфизмом $\Leftrightarrow$ f является изоморфизмом $\Leftrightarrow$ f не является нильпотентным.*
- (2) *Пусть $f \in \mathrm{End}_{Gr(R)}(M)$, тогда существует $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ такое, что для любого $n > n_0$, $M = \mathrm{Im} f^n \oplus \mathrm{Ker} f^n$.*
- (3) *Если M gr-неразложим, то $\mathrm{End}_{Gr(R)}(M)$ является локальным кольцом.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [2], лемма 11.6, предложение 11.7, предложение 11.8, лемма 12.8). В градуированном случае можно повторить эти доказательства. □

Предложение 2.42. (Теорема Крулля–Ремака–Шмидта в градуированном случае) *Пусть M является градуированным R-модулем и имеет конечную gr-длину, тогда M является конечной прямой суммой gr-неразложимых модулей. Если $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_m$, где M_i и N_j являются gr-неразложимыми модулями, тогда $m = n$, и существует такая биекция $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, что $N_i \cong M_{\pi(i)}$.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [2], теорема 12.9). В градуированном случае можно повторить это доказательство. □

Предложение 2.43. ([12], лемма 2.3) *Справедливы следующие утверждения*:

- (1) *градуированное кольцо R gr-нётерово тогда и только тогда, когда в любом непустом множестве gr-идеалов R существует максимальный элемент;*
- (2) *градуированное кольцо R gr-нётерово тогда и только тогда, когда любой gr-идеал конечно порождён;*

- (3) *градуированное кольцо R gr-нётерово тогда и только тогда, когда любой gr-простой идеал конечно порождён.*

Предложение 2.44. *Пусть R является gr-нётеровым градуированным коммутативным кольцом, тогда нильрадикал $\mathrm{Nil}(R)$ нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Nil}(R) = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, здесь $x_i \in h(R)$, ${x_i}^{n_i} = 0$. Пусть $m = n_1+n_2+\ldots+n_k$, тогда мы имеем $(\mathrm{Nil}(R))^m = 0$. □

Определение 2.45. *Градуированное кольцо R называется gr-полупростым, если оно gr-полупросто как градуированный модуль над самим собой.*

Предложение 2.46. ([7], предложение 2.10.10) *Пусть R является градуированным коммутативным кольцом, следующие условия эквивалентны:*

- (1) *R является gr-полупростым кольцом.*
- (2) *Каждый градуированный R-модуль gr-проективен.*
- (3) *Каждый градуированный R-модуль gr-инъективен.*
- (4) *R изоморфно конечному прямому произведению gr-полей.*
- (5) *R является gr-артиновым кольцом, и $J^{gr}(R) = 0$.*

Предложение 2.47. *Пусть R является gr-артиновым градуированным коммутативным кольцом. Справедливы следующие утверждения:*

- (1) *Если R является gr-областью целостности, то R является gr-полем.*
- (2) $\mathrm{Spec}^{gr}(R) = \mathrm{Max}^{gr}(R)$.
- (3) $h\text{-}\dim(R) = 0$.
- (4) *R имеет только конечное число gr-максимальных идеалов.*
- (5) *Пусть $J = J^{gr}(R)$, тогда существует такое $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, что $J^m = 0$.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [3], предложения 8.1, 8.3, 8.4). В градуированном случае можно повторить эти доказательства. □

Предложение 2.48. *Градуированное коммутативное кольцо R является gr-артиновым тогда и только тогда, когда R является gr-нётеровым, $J^{gr}(R)$ является нильпотентным gr-идеалом и $\frac{R}{J^{gr}(R)}$ gr-полупросто.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [2], теорема 15.20). В градуированном случае можно повторить это доказательство. $\square$

§3. Структурная теорема для gr-инъективных модулей над gr-нётеровыми G-градуированными коммутативными кольцами

3.1. Gr-ассоциированные простые идеалы.

Определение 3.1. *Пусть R является gr-нётеровым кольцом, а M является градуированным модулем над R. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^{gr}(R)$ называется ассоциированным с M (обозначение: $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R^{gr}(M)$), если $\mathfrak{p} = Ann(x)$ для некоторого $x \in h(M)$. Очевидно, если $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^{gr}(R)$, то*

$$\mathrm{Ass}^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}\}.$$

Предложение 3.2. *Множество gr-ассоциированных простых непусто, $\bigcup\limits_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_R^{gr}(M)} h(\mathfrak{p}) - \{0\}$ является множеством gr-делителей нуля на M.*

Доказательство. Легко показать, что максимальные элементы в семействе gr-идеалов вида $Ann(x)$ являются gr-простыми идеалами, их множество и будет $\mathrm{Ass}^{gr}(M)$, $\bigcup\limits_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_R^{gr}(M)} h(\mathfrak{p}) - \{0\}$ – это в точности делители нуля на M. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть $0 \to L \to M \to N \to 0$ является точной последовательностью, тогда $\mathrm{Ass}^{gr}(L) \subset \mathrm{Ass}^{gr}(M) \subset \mathrm{Ass}^{gr}(L) \cup \mathrm{Ass}^{gr}(N)$.*

Доказательство. Первое включение очевидно. Теперь пусть $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}^{gr}(M) - \mathrm{Ass}^{gr}(L)$, $\mathfrak{p} = Ann_R(x)$. Имеем $Rx \cap L = 0$, поскольку любой ненулевой элемент из пересечения имел бы $\mathfrak{p}$ своим аннулятором, как следует из gr-простоты $\mathfrak{p}$. Значит, Rx изоморфно gr-подмодулю модуля N, так что $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R^{gr}(N)$. $\square$

Предложение 3.4. *Для gr-конечнопорожденного модуля M существует конечная цепочка gr-подмодулей $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$, где $M_{i+1}/M_i \cong (R/\mathfrak{p}_i)(g_i)$ для некоторых gr-простых идеалов $\mathfrak{p}_i$ и некоторых $g_i \in G$.*

Доказательство. Возьмем

$$\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Ass}_R^{gr}(M), \mathfrak{p}_1 = Ann(x)$$

и $Rx \cong \frac{R}{Ann(x)}(g_1)$, где $g_1 = \deg(x)$. Пусть $M_1 = Rx$. Если $M_1 \neq M$, для $\frac{M}{M_1}$ повторяем этот процесс, получаем последовательность gr-модулей $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$. По gr-нётеровости предложение доказано. □

Предложение 3.5. *Для gr-конечнопорожденного модуля M, $\mathrm{Ass}^{gr}(M)$ является конечным множеством.*

Доказательство. Действительно, ассоциированные простые содержатся среди $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ предыдущего предложения. □

3.2. Gr-инъективные модули над gr-нётеровым кольцом.

Определение 3.6. *Градуированный подмодуль N градуированного модуля M называется gr-неприводимым, если он не является пересечением двух не совпадающих с ним градуированных подмодулей.*

Gr-неприводимое разложение модуля N – это представление $N = N_1 \cap \cdots \cap N_r$, где все N_i gr-неприводимы. Оно называется несократимым, если в этом представлении нельзя ничего опустить.

Очевидно, что если R является gr-нётеровым кольцом и M является gr-конечнопорожденным, то существует несократимое gr-неприводимое разложение модуля N.

Предложение 3.7. *Пусть Q является gr-инъективным R-модулем, следующие условия эквивалентны:*

- (1) *Q gr-неразложим.*
- (2) *Q является gr-инъективной оболочкой любого ненулевого градуированного подмодуля.*
- (3) *Пусть U является любым ненулевым градуированным подмодулем Q, тогда 0 является неприводимым gr-подмодулем U.*
- (4) *Существует такой ненулевой градуированный подмодуль $U \subset Q$, что 0 является неприводимым gr-подмодулем U и $Q = E^{gr}(U)$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть U является ненулевым градуированным подмодулем модуля Q, тогда $0 \neq E^{gr}(U) \subset Q$, так что $E^{gr}(U)$

является прямым слагаемым Q, но Q gr-неразложим, мы получаем $E^{gr}(U) = Q$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $0 \neq A \subset U$, $0 \neq B \subset U$, Q является gr-инъективной оболочкой A, так что A является gr-существенным подмодулем Q, $A \cap B \neq 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Возьмем $U = Q$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Предположим что $Q = A \oplus B$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Ввиду того что U является gr-существенный подмодуль Q, мы имеем $U \cap A \neq 0$ и $U \cap B \neq 0$. По условию (4) 0 является неприводимым gr-подмодулем U, мы получаем $(U \cap A) \cap (U \cap B) \neq 0$, но $A \cap B = 0$ – это противоречие. $\square$

Предложение 3.8. *Пусть R является градуированным кольцом. Следующие условия эквивалентны:*

- (1) *R является gr-нётеровым кольцом.*
- (2) *Прямая сумма gr-инъективных R-модулей является gr-инъективным модулем.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [2], предложение 18.13). В градуированном случае можно повторить это доказательство. $\square$

Предложение 3.9.

- *Пусть R является gr-областью целостности, тогда* (0) *является gr-неприводимым идеалом.*
- *Пусть R является градуированным кольцом, тогда $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^{gr}(R)$ gr-неприводим и $E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})$ является gr-неразложимым gr-инъективным модулем.*

Доказательство. Мы знаем что $E^{gr}(R) = \mathrm{Frac}^{gr}(R) = F = \oplus_{g \in G} F_g$ (см. пример 2.6). Здесь $\mathrm{End}_{Gr(R)}(F) = F_e$ является полем. Так что F является gr-неразложимым модулем. Так что (0) является gr-неприводимым идеалом. $\square$

Лемма 3.10. *Пусть R является gr-нётеровым G-градуированным коммутативным кольцом, если $0 \neq E$ является gr-неразложимым gr-инъективным модулем, то существует такой $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^{gr}(R)$ и $g \in G$, что $E = E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}(g))$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}^{gr}(E)$, тогда существуют $x \in h(E)$ и $g \in G$, такие, что $Rx \cong \frac{R}{\mathfrak{p}}(g)$ и $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^{gr}(R)$. По предложению 3.7 мы имеем $E = E^{gr}(Rx)$. Лемма доказана. $\square$

Предложение 3.11. *Пусть R является gr-нётеровым G-градуированным коммутативным кольцом. Справедливы следующие утверждения:*

- (1) *Если $0 \neq E$ является gr-инъективным модулем, то E имеет gr-неразложимый gr-инъективный подмодуль.*
- (2) *Если $0 \neq E$ является gr-инъективным модулем, E_1, E_2 являются gr-неразложимыми gr-инъективными подмодулями и E_1 gr-неразложим, тогда либо $E_1 \cap E_2 = 0$, либо $E_1 \subset E_2$.*
- (3) *Пусть $E = \sum\limits_{i \in S} E_i$, где E_i является gr-неразложимым gr-инъективным модулем, тогда существует такое $X \subset S$, что $E = \bigoplus\limits_{i \in X} E_i$.*

Доказательство. (1) Возьмем такие $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}^{gr}(E)$, $g \in G$ и $x \in h(E)$, что $Rx \cong \frac{R}{\mathfrak{p}}(g)$, и тогда $E_0 = E^{gr}(Rx)$ является gr-неразложимым gr-инъективным подмодулем.

(2) Если $N = E_1 \cap E_2 \neq 0$, ввиду того, что E_1 gr-неразложим, мы имеем $E_1 = E^{gr}(N) \subset E_2$.

(3) Пусть $\Gamma = \{X \subset S | \sum\limits_{i \in X} E_i$ является прямой суммой$\}$. Для $i \in S$, мы имеем $\{i\} \in \Gamma$, так что Γ непусто. Возьмем любую цепь $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots \subset \Gamma$, и пусть $X = \bigcup X_k$. Для любого $i \in X$, пусть $E'_i = \sum\limits_{j \in X, j \neq i} E_j$. Предположим что $E'_i \cap E_i \neq 0$, $0 \neq x \in h(E'_i \cap E_i)$, тогда существуют k и $j_1, \ldots, j_n \in X_k - \{i\}$ такие, что $i \in X_k$ $x \in E_{j_1} + E_{j_2} + \ldots + E_{j_n}$, но $\sum\limits_{j \in X_k} E_j$ является прямой суммой, и получаем противоречие. Так что мы получили $E'_i \cap E_i = 0$, то есть $\sum\limits_{i \in X} E_i$ является прямой суммой. По лемме Цорна Γ имеет максимальный элемент X. По предложению 3.8 $\sum\limits_{i \in X} E_i = \bigoplus\limits_{i \in X} E_i$ является gr-инъективным подмодулем E. Пусть $E = (\bigoplus\limits_{i \in X} E_i) \oplus M$, по (1) и (2) мы имеем $M = 0$, то есть $E = \bigoplus\limits_{i \in X} E_i$. $\square$

Лемма 3.12. *Пусть R является gr-нётеровым G-градуированным коммутативным кольцом, если $0 \neq E$ является gr-инъективным модулем, то E является прямой суммой gr-неразложимых gr-инъективных модулей.*

Доказательство. Пусть $\{E_i | i \in S\}$ – множество всех gr-неразложимых gr-инъективных подмодулей E, и пусть $E' = \sum\limits_{i \in S} E_i$. По предложению 3.8 и предложению 3.11 (3), E' является gr-инъективным подмодулем, так что $E = E' \oplus M$. По предложению 3.11 (1), мы имеем $M = 0$, то есть E является прямой суммой gr-неразложимых gr-инъективных модулей. □

Лемма 3.13. *Пусть R является gr-нётеровым G-градуированным коммутативным кольцом. Если $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^{gr}(R)$, то $\mathrm{Ass}^{gr}(E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})) = \{\mathfrak{p}\}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}^{gr}(E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}))$, $\mathfrak{q} = Ann_R(x)$, где $0 \neq x \in h(E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}))$. По определению gr-инъективной оболочки $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ является gr-существенным подмодулем $E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})$, поэтому существует такое $r \in h(R)$, что $0 \neq rx \in \frac{R}{\mathfrak{p}}$. Очевидно, что $r \notin \mathfrak{p}$ и $r \notin \mathfrak{q}$, и мы имеем $Ann(rx) = \mathfrak{p} \supset Ann(x) = \mathfrak{p}$. Для любого $p \in \mathfrak{p}$, $prx = 0 \Rightarrow pr \in \mathfrak{q}$, но $r \notin \mathfrak{q}$, так что $p \in \mathfrak{q}$, то есть $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. □

Следующая теорема является одним из главных результатов нашей работы.

Теорема 3.14. *Пусть R является gr-нётеровым G-градуированным коммутативным кольцом. Справедливы следующие утверждения:*

- (1) *Если $0 \neq E$ – gr-инъективный модуль, то E является прямой суммой неразложимых gr-инъективных модулей.*
- (2) *Если $0 \neq E$ является неразложимым gr-инъективным модулем, то $\mathrm{End}_{Gr(R)}(E)$ – локальное кольцо.*
- (3) *Если $0 \neq E$ является неразложимым gr-инъективным модулем, то $E = E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}(g))$, где $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^{gr}(R)$ и $g \in G$.*
- (4) *Пусть $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}^{gr}(R)$, $g, h \in G$ и $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$,тогда $E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}(g)) \neq E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{q}}(h))$.*

Доказательство. (1) Это лемма 3.12.

(2) Пусть $f \in \mathrm{End}_{Gr(R)}(E)$, если f является мономорфизмом, то $f(E) \subset E$ является gr-инъективным модулем, так что $f(E) = E$, то есть мы уже доказали, что f является мономорфизмом $\Leftrightarrow$ f является изоморфизмом. Теперь пусть $f_1, f_2 \in \mathrm{End}_{Gr(R)}(E)$, f_1, f_2 необратимые, $\mathrm{Ker} f_1 \neq 0, \mathrm{Ker} f_2 \neq 0$, по предложению 3.7, $0 \neq \mathrm{Ker} f_1 \cap \mathrm{Ker} f_2 \subset$

$\mathrm{Ker}(f_1+f_2)$, так что f_1+f_2 необратимо, то есть $\mathrm{End}_{Gr(R)}(E)$ является локальным кольцом.

(3) Это лемма 3.10.

(4) Это лемма 3.13. □

§4. Структурная теорема для gr-конечнопорожденных gr-проективных модулей над gr-артиновыми G-градуированными коммутативными кольцами

Лемма 4.1. *Пусть $(R,\mathfrak{m})$ является gr-артиновым gr-локальным G-градуированным коммутативным кольцом, тогда $(R_e,\mathfrak{m}_e)$ является артиновым локальным кольцом.*

Доказательство. $\mathrm{Nil}(R)=J^{gr}(R)=\mathfrak{m}$, то есть однородный элемент R либо нильпотентный, либо обратим. Идеал $\mathfrak{m}_e=\mathfrak{m}\cap R_e$ одновременно является множеством нильпотентен и множеством необратимых элементов R_e, так что $(R_e,\mathfrak{m}_e)$ является артиновым локальным кольцом. □

Лемма 4.2. *Пусть R – G-градуированное коммутативное кольцо. R является gr-артиновым тогда и только тогда, когда R gr-нётерово и h-$\dim(R)=0$.*

Доказательство. Пусть R является gr-артиновым кольцом, по предложению 2.48 R является gr-нётеровым, а по предложению 2.47 h-$\dim(R)=0$.

Теперь пусть R является gr-нетеровым кольцом и h-$\dim(R)=0$, по предложению 2.44 $J^{gr}(R)=\mathrm{Nil}(R)$ является нильпотентным gr-идеалом. Ввиду предложения 2.48, еще нужно доказать, что $\frac{R}{J^{gr}(R)}$ gr-полупросто. R имеет только конечное число gr-максимальных идеалов $\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2,\cdots,\mathfrak{m}_s$. Мы знаем, что $(J^{gr}(R))^k=0$, так что $\mathfrak{m}_1^k\mathfrak{m}_2^k\dots\mathfrak{m}_s^k=0$. Мы получаем

$$R=\frac{R}{\mathfrak{m}_1^k\mathfrak{m}_2^k\dots\mathfrak{m}_s^k}\cong\frac{R}{\mathfrak{m}_1^k}\times\frac{R}{\mathfrak{m}_2^k}\times\dots\times\frac{R}{\mathfrak{m}_s^k}. \tag{4.6}$$

Так что R – конечное произведение gr-нетеровых gr-локальных колец gr-размерности 0, то есть $\frac{R}{J^{gr}(R)}$ gr-полупросто. □

Следующая теорема является одним из главных результатов нашей работы.

Теорема 4.3. *Пусть R является gr-артиновым G-градуированным коммутативным кольцом. Справедливы следующие утверждения:*

- (1) *R является конечным произведением gr-артиновых gr-локальных колец:*

$$R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n. \tag{4.7}$$

  $\mathrm{End}_{Gr(R)}(P_i) = (P_i)_e$ *является локальным кольцом. Если $R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m$, где P_i и N_j являются gr-артиновыми gr-локальными кольцами, то $m = n$, и существует такая биекция $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, что $N_i \cong P_{\pi(i)}$. Здесь $P_1, P_2, \ldots, P_n$ являются попарно неизоморфными gr-неразложимыми прямыми слагаемыми модуля R.*
- (2) *$J^{gr}(P_i)$ является единственным gr-максимальным подмодулем модуля P_i, и $S_i = \frac{P_i}{J^{gr}(P_i)}$ является gr-простым модулем.*
- (3) *Если S является gr-простым R-модулем, то существуют такие P_i и $g \in G$, что $S = \frac{P_i}{J^{gr}(P_i)}(g)$.*
- (4) *Если $0 \neq P$ является gr-конечнопорожденным gr-проективным модулем, то P является конечной прямой суммой неразложимых gr-проективный модулей.*
- (5) *Если $0 \neq P$ является неразложимым gr-проективным модулем, то существуют такие P_i и $g \in G$, что $P \cong P_i(g)$.*
- (6) *Если $i \neq j$, то $\frac{P_i}{J^{gr}(P_i)} \neq \frac{P_j}{J^{gr}(P_j)}$.*

Доказательство. (1) В лемме 4.2 мы уже доказали, что R является конечным произведением gr-артиновых gr-локальных колец

$$R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n. \tag{4.8}$$

Мы знаем, что $\mathrm{End}_{Gr(R)}(P_i) = (P_i)_e$. По лемме 4.1 $(P_i)_e$ является локальным кольцом. По лемме 2.37 P_i является gr-неразложимым R-подмодулем. Мы можем использовать теорему Крулля–Ремака–Шмидта в градуированном случае (см. предложение 2.42), и мы получили единственность.

(2) Заметим, что P_i является gr-артиновым gr-локальным кольцом, по предложению 2.48 пункт (2) справедлив.

(3) Это просто другой вариант предложения 2.26 (2).

(4) P имеет конечную gr-длину, по теореме Крулля–Ремака–Шмидта в градуированном случае (см. предложение 2.42), пункт (4) справедлив.

(5) P является прямым слагаемым $R(g_1) \oplus R(g_2) \oplus \cdots \oplus R(g_s)$, по теореме Крулля–Ремака–Шмидта в градуированном случае (см. предложение 2.42), существуют такие P_i и $g \in G$, что $P \cong P_i(g)$.

(6) P_i является gr-проективным накрытием $\frac{P_i}{J^{gr}(P_i)}$, по предложению 2.32 мы знаем, что gr-проективное накрытие единственно. □

Пример 4.1. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле, $R = k[x, x^{-1}]$ – $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо с градуировкой $R_n = kx^n, n \in \mathbb{Z}$. Тогда R является gr-полем. R не является полем, но является областью главных идеалов, так что все проективные модули свободны. Мы еще знаем, что* $\mathrm{Spec}(R) = \{(0)\} \cup \bigcup_{c \in k^*} \{(x - c)\}$.

- *Gr-неразложимые gr-проективные R-модули: $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.*
- *Gr-неразложимые gr-инъективные R-модули: $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.*
- *Неразложимые проективные R-модули: R.*
- *Неразложимые инъективные R-модули: $k(x)$ и $\frac{k[x,x^{-1},(x-c)^{-1}]}{k[x,x^{-1}]}$, где $c \in k^*$.*

Благодарность. Работа выполнена при поддержке **Китайского стипендиального совета**.

Автор хотел бы поблагодарить профессора Генералова Александра Ивановича за его внимательное прочтение полного текста и за его ценные комментарии.

Список литературы

1. D. D. Anderson and D. F. Anderson, *Divisibility properties of graded domains.* — Canad. J. Math. **34**, No. 1 (1982), 196–215.
2. F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules.* Springer Science & Business Media (2012).
3. M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Westview Press (2018).
4. D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer-Verlag (1995).
5. S. Goto, K. Yamagishi, *Finite generation of Noetherian graded rings.* — Proceedings of the American Mathematical Society, **89**, No. 1 (1983), 41–44.
6. W. Heinzer, M. Roitman, *The homogeneous spectrum of a graded commutative ring.* — Proc. Amer. Math. Soc. **130**, No. 6 (2001), 1573–1580.
7. C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen, *Methods of Graded Rings*, Springer (2004).
8. C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen, *Graded Ring Theory*, Elsevier (2011).

9. C. Park, M. Park, *Integral closure of a graded Noetherian domain.* — J. the Korean Math. Soc., **48**, No. 3 (2011), 449–464.
10. L. J. Ratliff, D. E. Rush, *Two notes on homogeneous prime ideals in graded Noetherian rings.* — J. Algebra, **264**, No. 1 (2003), 211–230.
11. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Springer (1988).
12. D. E. Rush, *Noetherian properties in monoid rings.* — J. Pure and Applied Algebra, **185**, No. 1–3 (2003), 259–278.
13. И. Н. Балаба, *Кольца частных градуированных ассоциативных колец.* I. — Фундаментальная и прикладная математика, **17**, No. 2 (2012), 3–74.

Lu L. Gr-injective modules and gr-projective modules over G-graded commutative rings.

It is well known that the decomposition of injective modules over noetherian rings and the decomposition of projective modules over artinian rings are among the most beautiful and important results in commutative algebra. Our aim is to prove similar results for graded rings. It is important for us to understand the structure of the modules over the graded rings. In this paper, we study the structure theorem for gr-injective modules over gr-noetherian G-graded commutative rings and the structure theorem for gr-projective modules over gr-artinian G-graded commutative rings.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1,
119991 Москва, Россия
E-mail: lu.li.bo1990@gmail.com

Поступило 29 апреля 2019 г.