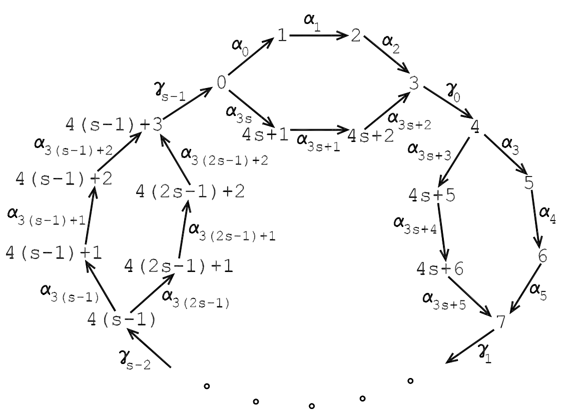
Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 478, 2019 г.

М. А. Качалова

КОЛЬЦО КОГОМОЛОГИЙ ХОХШИЛЬДА САМОИНЪЕКТИВНЫХ АЛГЕБР ДРЕВЕСНОГО ТИПА E_6. II.

§1. Введение

Настоящая работа продолжает серию статей, посвящённых исследованию когомологий Хохшильда самоинъективных базисных алгебр над алгебраически замкнутым полем, имеющих конечный тип представления. Согласно классификации Ридтманн, стабильный AR-колчан такой алгебры описывается с помощью некоторого ассоциированного дерева, которое совпадает с одной из схем Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7 или E_8 (см. [1]). Для алгебр типа A_n и D_n структура кольца когомологий Хохшильда полностью исследована и описана в [2–5] (тип A_n) и [6–11] (тип D_n). Также, в [12] получена структура кольца когомологий Хохшильда для одного из двух классов самоинъективных алгебр типа E_6. В данной статье мы изучим кольцо когомологий Хохшильда для второго класса алгебр типа E_6. А именно, пусть $\mathcal{Q}_s$ ($s \in \mathbb{N}$) – следующий колчан:



Ключевые слова: когомологии Хохшильда, самоинъективные алгебры, бимодульная резольвента.

Тогда любая алгебра типа E_6 производно эквивалентна одной из двух следующих алгебр:

1) $R_s = K\left[\mathcal{Q}_s\right]/I$, где K – поле, а I – идеал в алгебре путей $K\left[\mathcal{Q}_s\right]$ колчана $\mathcal{Q}_s$, порождённый

а) всеми путями длины 5;

б) выражениями вида:

$$\alpha_{3t+2}\alpha_{3t+1}\alpha_{3t} - \alpha_{3(t+s)+2}\alpha_{3(t+s)+1}\alpha_{3(t+s)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant s-1,$$

$$\alpha_{3t}\gamma_{t-1}\alpha_{3(t+s)-1},\ t \in [1, 2s-1] \setminus \{s\},$$

$$\alpha_0\gamma_{s-1}\alpha_{3(2s-1)+2},\ \alpha_{3s}\gamma_{s-1}\alpha_{3(s-1)+2}.$$

2) $R'_s = K\left[\mathcal{Q}_s\right]/I'$, где K – поле, I' – идеал в алгебре путей $K\left[\mathcal{Q}_s\right]$ колчана $\mathcal{Q}$, порождённый

а) всеми путями длины 5;

б) выражениями вида:

$$\alpha_{3t+2}\alpha_{3t+1}\alpha_{3t} - \alpha_{3(t+s)+2}\alpha_{3(t+s)+1}\alpha_{3(t+s)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant s-1,$$

$$\alpha_{3t}\gamma_{t-1}\alpha_{3(t+s)-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2s-1.$$

Замечание 1. Здесь и далее индексы вершин e_i лежат в $\mathbb{Z}_{8s}$, индексы стрелок α_i – в $\mathbb{Z}_{6s}$, а индексы γ_i в $\mathbb{Z}_s$.

Замечание 2. Мы будем часто опускать индексы у стрелок α_i и γ_i, поскольку значения нижних индексов ясны из контекста.

Данная статья посвящена изучению структуры кольца когомологий Хохшильда для алгебры R'_s. Для этой алгебры мы получим описание кольца когомологий Хохшильда в терминах образующих с соотношениями. Заметим, что для исследования структуры кольца когомологий мы построим бимодульную резольвенту алгебры R'_s, которая также представляет интерес как отдельный результат.

§2. Формулировка основного результата

Далее везде предполагается, что $n = 6$.

Пусть $\mathrm{HH}^t(R)$ – t-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R с коэффициентами в R. Пусть ℓ – целая часть, а r – остаток от деления t на 11, m – целая часть от деления r на 2.

Рассмотрим случай $s > 1$. Для описания кольца когомологий Хохшильда алгебры R'_s введём следующие условия на произвольную степень t:

(1) $r = 0$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$, $\ell \vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(2) $r = 0$, $\ell(n+s)+m \equiv s+1(2s)$, $\ell \vdots 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(3) $r = 1$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$, $\ell \vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(4) $r = 1$, $\ell(n+s)+m \equiv s(2s)$, $\ell \not\vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(5) $r = 2$, $\ell(n+s)+m \equiv s+1(2s)$, $\ell \not\vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;
(6) $r = 3$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$;
(7) $r = 3$, $\ell(n+s)+m \equiv s(2s)$, $\operatorname{char} K = 2$;
(8) $r = 4$, $\ell(n+s)+m \equiv s+1(2s)$, $\operatorname{char} K = 2$;

(9) $r = 4$, $\ell(n+s)+m \equiv s(2s)$, $\ell \not\vdots 2$, $\operatorname{char} K = 3$;
(10) $r = 4$, $\ell(n+s)+m \equiv 1(2s)$;

(11) $r = 5$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$, $\ell \vdots 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(12) $r = 5$, $\ell(n+s)+m \equiv s(2s)$, $\ell \not\vdots 2$, $\operatorname{char} K = 3$;
(13) $r = 6$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$, $\operatorname{char} K = 2$;

(14) $r = 6$, $\ell(n+s)+m \equiv 1(2s)$, $\ell \vdots 2$, $\operatorname{char} K = 3$;
(15) $r = 6$, $\ell(n+s)+m \equiv s(2s)$;
(16) $r = 7$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$, $\operatorname{char} K = 2$;
(17) $r = 7$, $\ell(n+s)+m \equiv s(2s)$;

(18) $r = 8$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$, $\ell \vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(19) $r = 9$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$, $\ell \vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(20) $r = 9$, $\ell(n+s)+m \equiv s(2s)$, $\ell \not\vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(21) $r = 10$, $\ell(n+s)+m \equiv s+1(2s)$, $\ell \not\vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(22) $r = 10$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$, $\ell \not\vdots 2$, $\operatorname{char} K = 3$.

Положим

$$M_0 = \frac{2s}{\text{НОД}(n+s, 2s)}, \quad M = \begin{cases} 11M_0, & \operatorname{char} K = 2 \text{ или } M_0 \vdots 4; \\ 22M_0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание 3. В параграфе 3 мы покажем, что минимальный период бимодульной резольвенты алгебры R_s' равен M.

Пусть $\{t_{1,i}, \ldots, t_{\alpha_i,i}\}$ – множество всех степеней t, удовлетворяющих условиям i-го пункта из списка выше, и таких, что $0 \leqslant t_{j,i} < M$ ($j =$

$1, \dots, \alpha_i$). Рассмотрим множество

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{22} \left\{ X^{(i)}_{t_{j,i}} \right\}_{j=1}^{\alpha_i} \cup \{T\}$$

и на кольце многочленов $K[\mathcal{X}]$ введём градуировку такую, что

$$\begin{aligned} &\deg X^{(i)}_{t_{j,i}} = t_{j,i} \text{ для всех } i = 1, \dots, 22 \text{ и } j = 1, \dots, \alpha_i; \\ &\deg T = M. \end{aligned} \tag{$\circ$}$$

Замечание 4. Далее мы будем часто использовать упрощённое обозначение $X^{(i)}$ для $X^{(i)}_{t_{j,i}}$, поскольку значения нижних индексов ясны из контекста.

Обозначение.

$$\widetilde{X}^{(i)} = \begin{cases} X^{(i)}, & \deg \widetilde{X}^{(i)} < \deg T; \\ TX^{(i)}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A} = K[\mathcal{X}]/I$, где I – идеал, порождённый однородными элементами, соответствующими следующим соотношениям:

$$X^{(3)}X^{(2)} = X^{(3)}X^{(3)} = X^{(3)}X^{(5)} = X^{(3)}X^{(7)} = 0;$$
$$X^{(3)}X^{(8)} = X^{(3)}X^{(9)} = X^{(3)}X^{(10)} = X^{(3)}X^{(11)} = 0;$$
$$X^{(3)}X^{(12)} = X^{(3)}X^{(13)} = X^{(3)}X^{(14)} = X^{(3)}X^{(16)} = 0;$$
$$X^{(3)}X^{(17)} = X^{(3)}X^{(19)} = X^{(3)}X^{(21)} = X^{(3)}X^{(21)} = 0;$$
$$X^{(3)}X^{(1)} = \widetilde{X}^{(3)}, \quad X^{(3)}X^{(4)} = \widetilde{X}^{(5)}, \quad X^{(3)}X^{(6)} = \widetilde{X}^{(10)};$$
$$X^{(3)}X^{(15)} = \widetilde{X}^{(17)}, \quad X^{(3)}X^{(18)} = \widetilde{X}^{(19)}, \quad X^{(3)}X^{(20)} = \widetilde{X}^{(21)};$$

$$X^{(4)}X^{(6)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(8)}, & \operatorname{char} K = 2, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{r1}$$

$$X^{(6)}X^{(6)} = \begin{cases} -s\widetilde{X}^{(14)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{r2}$$

$$X^{(4)}X^{(15)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(16)}, & \operatorname{char} K = 2, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{r3}$$

$$X^{(6)}X^{(18)} = \begin{cases} -s\widetilde{X}^{(2)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{r4}$$

$$X^{(15)}X^{(20)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(8)}, & \operatorname{char} K = 2, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{r5}$$

$$X^{(18)}X^{(18)} = \begin{cases} s\widetilde{X}^{(12)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{r6}$$

$$X^{(18)}X^{(20)} = \begin{cases} s\widetilde{X}^{(14)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{r7}$$

Остальные соотношения опишем в виде таблиц (номера (r1)–(r7) в ячейках таблиц означают номер соотношения, в котором описано произведение соответствующих элементов).

	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(4)}$	$X^{(6)}$	$X^{(7)}$	$X^{(8)}$	$X^{(9)}$	$X^{(11)}$
$X^{(1)}$	$\widetilde{X}^{(1)}$	$\widetilde{X}^{(2)}$	$\widetilde{X}^{(4)}$	$\widetilde{X}^{(6)}$	$\widetilde{X}^{(7)}$	$\widetilde{X}^{(8)}$	$\widetilde{X}^{(9)}$	$\widetilde{X}^{(11)}$
$X^{(2)}$		0	0	0	0	0	$-\widetilde{X}^{(10)}$	0
$X^{(4)}$			0	(r1)	$-\widetilde{X}^{(10)}$	0	$\widetilde{X}^{(11)}$	0
$X^{(6)}$				(r2)	0	0	$s\widetilde{X}^{(17)}$	0
$X^{(7)}$					0	0	0	0
$X^{(8)}$						0	0	0
$X^{(9)}$							0	0
$X^{(11)}$								0

	$X^{(12)}$	$X^{(13)}$	$X^{(14)}$	$X^{(15)}$	$X^{(16)}$	$X^{(18)}$	$X^{(20)}$	$X^{(22)}$
$X^{(1)}$	$\widetilde{X}^{(12)}$	$\widetilde{X}^{(13)}$	$\widetilde{X}^{(14)}$	$\widetilde{X}^{(15)}$	$\widetilde{X}^{(16)}$	$\widetilde{X}^{(18)}$	$\widetilde{X}^{(20)}$	$\widetilde{X}^{(22)}$
$X^{(2)}$	0	0	0	$\widetilde{X}^{(14)}$	0	0	0	$-\widetilde{X}^{(21)}$
$X^{(4)}$	$\widetilde{X}^{(14)}$	$\widetilde{X}^{(17)}$	0	(r3)	0	$\widetilde{X}^{(20)}$	0	0
$X^{(6)}$	0	$\widetilde{X}^{(19)}$	0	$-\widetilde{X}^{(20)}$	0	(r4)	0	$s\widetilde{X}^{(5)}$
$X^{(7)}$	0	0	0	$\widetilde{X}^{(19)}$	$\widetilde{X}^{(21)}$	0	0	0
$X^{(8)}$	0	$\widetilde{X}^{(21)}$	0	0	0	0	0	0
$X^{(9)}$	$\widetilde{X}^{(19)}$	0	$\widetilde{X}^{(21)}$	$-\widetilde{X}^{(22)}$	0	$s\widetilde{X}^{(3)}$	$s\widetilde{X}^{(5)}$	0
$X^{(11)}$	$\widetilde{X}^{(21)}$	0	0	0	0	$s\widetilde{X}^{(5)}$	0	0

	$X^{(12)}$	$X^{(13)}$	$X^{(14)}$	$X^{(15)}$	$X^{(16)}$	$X^{(18)}$	$X^{(20)}$	$X^{(22)}$
$X^{(12)}$	0	0	0	$-\widetilde{X}^{(2)}$	0	0	0	$-\widetilde{X}^{(10)}$
$X^{(13)}$		0	0	$\widetilde{X}^{(3)}$	$\widetilde{X}^{(5)}$	$\widetilde{X}^{(7)}$	$\widetilde{X}^{(10)}$	0
$X^{(14)}$			0	0	0	0	0	0
$X^{(15)}$				$-\widetilde{X}^{(4)}$	0	$\widetilde{X}^{(6)}$	(r5)	$\widetilde{X}^{(11)}$
$X^{(16)}$					0	$\widetilde{X}^{(8)}$	0	0
$X^{(18)}$						(r6)	(r7)	$-s\widetilde{X}^{(17)}$
$X^{(20)}$							0	0
$X^{(22)}$								0

Теорема 1. *Пусть $s > 1$, $R = R'_s$ – алгебра типа E_6. Тогда алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}$.*

Рассмотрим случай $s = 1$.

Введём множество

$$\mathcal{X}' = \begin{cases} \mathcal{X} \cup \left\{ X_0^{(23)}, X_0^{(24)} \right\}, & \operatorname{char} K \neq 3; \\ \mathcal{X} \cup \left\{ X_0^{(24)} \right\}, & \operatorname{char} K = 3; \end{cases}$$

и на кольце многочленов $K[\mathcal{X}']$ введём градуировку такую, что

$$\begin{aligned} \deg X_{t_{j,i}}^{(i)} &= t_{j,i} \text{ для всех } i = 1, \dots, 22 \text{ и } j = 1, \dots, \alpha_i; \\ \deg T &= M \ \text{(аналогично } (\circ)); \\ \deg X_0^{(23)} &= \deg X_0^{(24)} = 0. \end{aligned}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}' = K[\mathcal{X}']/I'$, где идеал I' порождён однородными элементами, соответствующими соотношениям, которые уже были описаны для случая $s > 1$, а также следующим соотношениям:

$$X^{(1)}X^{(23)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(23)}, & t_1 = 0; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$X^{(1)}X^{(24)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(24)}, & t_1 = 0; \\ \widetilde{X}^{(2)}, & t_1 > 0 \text{ and } \operatorname{char} K = 3; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$X^{(9)}X^{(24)} = -\widetilde{X}^{(10)};$$

$$X^{(15)}X^{(24)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(14)}, & \operatorname{char} K = 3; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$X^{(22)}X^{(24)} = -\widetilde{X}^{(21)};$$

$$X^{(j)}X^{(i)} = 0, \quad j \in [2, 24] \setminus \{9, 15, 22\}, \quad i \in \{23, 24\},$$

где t_1 обозначает степень элемента $X^{(1)}$.

Теорема 2. *Пусть $s = 1$, $R = R'_1$ – алгебра типа E_6. Тогда алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}'$.*

Замечание 5. Из описания колец $\mathrm{HH}^*(R)$ в теоремах 1 и 2 следует, в частности, что они коммутативны.

§3. Бимодульная резольвента

Будем строить минимальную проективную бимодульную резольвенту R в следующем виде:

$$\cdots \longrightarrow Q_3 \xrightarrow{d_2} Q_2 \xrightarrow{d_1} Q_1 \xrightarrow{d_0} Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

Пусть Λ – обёртывающая алгебра алгебры R. Тогда R–R-бимодули можно рассматривать как левые Λ-модули.

Обозначения.

(1) Через e_i, $i \in \mathbb{Z}_{8s} = \{0, 1, \ldots, 8s-1\}$, обозначаем идемпотенты алгебры $K[\mathcal{Q}_s]$, соответствующие вершинам колчана $\mathcal{Q}_s$. При этом e_{4r} и $e_{4(r+s)}$ $(0 \leqslant r < s)$ соответствуют одной и той же вершине. Также одной и той же вершине соответствуют e_{4r+3} и $e_{4(r+s)+3}$ $(0 \leqslant r < s)$.

(2) Обозначим через $P_{i,j} = R(e_i \otimes e_j)R = \Lambda(e_i \otimes e_j)$, $i, j \in \mathbb{Z}_{(n+2)s}$. Заметим, что модули $P_{i,j}$, составляют полное множество (попарно неизоморфных) неразложимых проективных Λ-модулей.

(3) Для $a \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$ через $(a)_t$ обозначим наименьший неотрицательный вычет a по модулю t (в частности, $0 \leqslant (a)_t \leqslant t-1$).

Пусть $R = R'_s$. Определим автоморфизм $\sigma\colon R \to R$, действующий следующим образом:

$$\sigma(e_i) = e_{4(n+s)+i}, \quad \sigma(\gamma_i) = \begin{cases} \gamma_{i+n}, & (i)_s = s-1; \\ -\gamma_{i+n}, & (i)_s < s-1, \end{cases}$$
$$\sigma(\alpha_i) = \begin{cases} -\alpha_{3(n+s)+i}, & (i)_3 = 0,\ (i)_{6s} < 3s; \\ \alpha_{3(n+s)+i}, & (i)_3 = 0,\ (i)_{6s} \geqslant 3s; \\ -\alpha_{3(n+s)+i}, & (i)_3 = 1; \\ -\alpha_{3(n+s)+i}, & (i)_3 = 2,\ (i)_{6s} \geqslant 3s; \\ \alpha_{3(n+s)+i}, & (i)_3 = 2,\ (i)_{6s} < 3s. \end{cases}$$

Введём вспомогательные функции $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и $h\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, действующие следующим образом:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y; \\ 0, & x \neq y, \end{cases} \qquad h(x,y) = \begin{cases} 1, & x \,\vdots\, 2,\ x < y; \\ 0, & x \not\,\vdots\, 2,\ x < y; \\ 1, & x \not\,\vdots\, 2,\ x \geqslant y; \\ 0, & x \,\vdots\, 2,\ x \geqslant y. \end{cases}$$

Введём Q_r ($r \leqslant 10$). Напомним, что для степени r через m обозначаем целую часть от деления r на 2. Положим

$$Q_{2m} = \bigoplus_{r=0}^{s-1} Q'_{2m,r}, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-1,$$
$$Q_{2m+1} = \bigoplus_{r=0}^{s-1} Q'_{2m+1,r}, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-2,$$

где

$$Q'_{2m,r} = \left(\bigoplus_{i=0}^{f(m,2)} P_{4(r+m)-1+h(m,2)+i,4r}\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{i=0}^{f(m,3)} \bigoplus_{j=0}^{1} P_{4(r+m+js+f(m,2)s+f(m,5)s)+2-h(m,3)+i(4s+1),4(r+js)+1}$$
$$\oplus \bigoplus_{i=0}^{f(m,2)} \bigoplus_{j=0}^{1} P_{4(r+m+js+f(m,1)s+f(m,4)s+f(m,5)s)+1+h(m,2)+i(4s+1),4(r+js)+2}$$
$$\oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{f(m,3)} P_{4(r+m+1)-h(m,3)+i,4r+3}\right);$$

$$Q'_{2m+1,r} = \left(\bigoplus_{i=0}^{1-f(m,4)} P_{4(r+m)+1+h(m,0)+2f(m,4)+4si,4r}\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{j=0}^{1} P_{4(r+m+1+js)-h(m,0)-2f(m,0),4(r+js)+1}$$
$$\oplus \bigoplus_{j=0}^{1} P_{4(r+m+1+js+f(m,4)s)-h(m,5)+2f(m,4),4(r+js)+2}$$
$$\oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{1-f(m,0)} P_{4(r+m+1)+1+h(m,5)-2f(m,0)+4si,4r+3}\right).$$

Опишем дифференциалы d_r для $r \leqslant 10$. Так как Q_i – прямые суммы, то их элементы можно рассматривать как векторы-столбцы, а тогда дифференциалы описываются некоторыми матрицами (которые умножаются справа на вектор-столбец). Опишем покомпонентно матрицы дифференциалов.

Замечание 6. Нумерацию строк и столбцов в матрицах дифференциалов всюду начинаем с нуля.

Обозначения.

(1) Через $w_{i\to j}$ обозначим путь из i-й вершины в j-ю.

(2) Для j-й колонки матрицы дифференциала обозначим через j_2 целую часть и через i_2 остаток деления j на s.

Введём функции $f_0\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f_1\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ и $f_2\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, действующие следующим образом:

$$f_0(x,y)=\begin{cases}1, & x<y;\\ 0 & x\geqslant y,\end{cases}\quad f_1(x,y)=\begin{cases}1, & x<y;\\ -1 & x\geqslant y,\end{cases}$$

$$f_2(x,y)=\begin{cases}1, & x=y;\\ -1 & x\neq y.\end{cases}$$

Описание d_0.

$$d_0 : Q_1 \to Q_0 \text{ – матрица размера } (6s\times 7s).$$

Если $0\leqslant j<2s$, то

$$(d_0)_{ij}=\begin{cases}w_{4(j+m)\to 4(j+m)+1}\otimes e_{4j}, & i=(j)_s;\\ -e_{4(j+m)+1}\otimes w_{4j\to 4j+1}, & i=j+s;\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Если $2s\leqslant j<4s$, то

$$(d_0)_{ij}=\begin{cases}w_{4(j+m)+1\to 4(j+m)+2}\otimes e_{4j+1}, & i=j-s;\\ -e_{4(j+m)+2}\otimes w_{4j+1\to 4j+2}, & i=j+s;\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Если $4s\leqslant j<6s$, то

$$(d_0)_{ij}=\begin{cases}w_{4(j+m)+2\to 4(j+m)+3}\otimes e_{4j+2}, & i=j-s;\\ -e_{4(j+m)+3}\otimes w_{4j+2\to 4j+3}, & i=(j)_s+5s;\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Если $6s\leqslant j<7s$, то

$$(d_0)_{ij}=\begin{cases}-e_{4(j+m+1)}\otimes w_{4j+3\to 4(j+1)}, & i=(j+1)_s;\\ w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+1)}\otimes e_{4j+3}, & i=j-s;\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Описание d_1.

$$d_1 : Q_2 \to Q_1 \text{ -- матрица размера } (7s \times 6s).$$

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m)+1+j_1 \to 4(j+m)+3} \otimes w_{4j \to 4j+j_1}, \\ \qquad i = j + 2j_1 s,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ -w_{4(j+m+s)+1+j_1 \to 4(j+m)+3} \otimes w_{4j \to 4(j+s)+j_1}, \\ \qquad i = j + (2j_1 + 1)s,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m+s+1)+1 \to 4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+1 \to 4(j+1)}, \\ \qquad i = j - s + 1,\ j < 2s; \\ w_{4(j+m+s+1)+1 \to 4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+1 \to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j + s + 1)_{2s},\ j \geqslant 2s; \\ w_{4(j+m+s)+2 \to 4(j+m+s+1)+2} \otimes e_{4(j+s)+1}, \quad i = j + s; \\ e_{4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+1 \to 4(j+s+1)+1}, \quad i=j+s+1,\ j<2s; \\ e_{4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+1 \to 4(j+s+1)+1}, \\ \qquad i = (j + s + 1)_{2s} + 2s,\ j \geqslant 2s; \\ w_{4(j+m)+3 \to 4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+1 \to 4(j+s)+2}, \quad i=j+3s; \\ w_{4(j+m+1) \to 4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+1 \to 4j+3}, \quad i=(j)_s+6s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} e_{4(j+m+1)+1} \otimes w_{4(j+s)+2 \to 4(j+1)}, \quad i = (j + 1)_{2s},\ j < 4s; \\ e_{4(j+m+1)+1} \otimes w_{4(j+s)+2 \to 4(j+1)}, \quad i = j - 4s + 1,\ j \geqslant 4s; \\ w_{4(j+m)+3 \to 4(j+m+1)+1} \otimes e_{4(j+s)+2}, \quad i = j + s; \\ w_{4(j+m+1) \to 4(j+m+1)+1} \otimes w_{4(j+s)+2 \to 4j+3}, \quad i = (j)_s + 6s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m+(1-f(i_2,s-1))s+1)+1\to 4(j+m+2)} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s; \\ w_{4(j+m+(1-f(i_2,s-1))s+1)+2\to 4(j+m+2)} \otimes \\ \qquad w_{4j+3\to 4(j+(1-f(i_2,s-1))s+1)+1}, \quad i = (j+1)_s + 2s; \\ w_{4(j+m+1)+3\to 4(j+m+2)} \otimes w_{4j+3\to 4(j+(1-f(i_2,s-1))s+1)+2}, \\ \qquad i = (j+1)_s + 4s; \\ w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+2)} \otimes e_{4j+3}, \quad i = j+s; \\ e_{4(j+m+2)} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)+3}, \quad i = (j+1)_s + 6s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_2.

$$d_2 : Q_3 \to Q_2 \text{ – матрица размера } (6s \times 8s).$$

Если $0 \leqslant j < 2s$, то

$$(d_2)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m-1)+3\to 4(j+m)+2} \otimes e_{4j}, \quad i = (j)_s; \\ -f_1(j,s)e_{4(j+m)+2} \otimes w_{4j\to 4j+1}, \quad i = j+s; \\ f_1(j,s)w_{4(j+m)+1\to 4(j+m)+2} \otimes w_{4j\to 4(j+s)+2}, \\ \qquad i = (j+s)_{2s} + 3s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$(d_2)_{ij} = \begin{cases} -f_1(j,3s)f_1(i_2,s-1)e_{4(j+m)+3} \otimes w_{4j+1\to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s; \\ w_{4(j+m)+2\to 4(j+m)+3} \otimes e_{4j+1}, \quad i = j-s; \\ -w_{4(j+m+s)+1\to 4(j+m)+3} \otimes w_{4j+1\to 4j+2}, \quad i = j+s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_2)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+1)} \otimes w_{4j+2\to 4(j+1)}, \\ \qquad\qquad i = (j+1)_s,\ j < 5s-1 \text{ или } j = 6s-1; \\ w_{4(j+m+s)+1\to 4(j+m+1)} \otimes e_{4j+2}, \quad i = j-s; \\ -e_{4(j+m+1)} \otimes w_{4j+2\to 4j+3}, \quad i = (j)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то

$$(d_2)_{ij} = \begin{cases} -w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+1)+1} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)}, \\ \qquad\qquad i = (j+1)_s,\ j < 7s-1 \text{ или } j = 8s-1; \\ -e_{4(j+m+1)+1} \otimes w_{4j+3\to 4(j+s+1)+2}, \quad i = (j+s+1)_{2s} + 3s; \\ w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+1)+1} \otimes e_{4j+3}, \quad i = (j)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_3.

$$d_3 : Q_4 \to Q_3 \text{ – матрица размера } (8s \times 9s).$$

Если $0 \leqslant j < 2s$, то

$$(d_3)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m+j_2 s)+2\to 4(j+m)+3+j_2} \otimes e_{4j}, \quad i = (j)_s; \\ -w_{4(j+m+s)+2+2j_2\to 4(j+m)+3+j_2} \otimes w_{4j\to 4j+2j_2}, \\ \qquad\qquad i = j+s+3j_2 s; \\ e_{4(j+m)+3+j_2} \otimes w_{4j\to 4(j+j_2 s)+1+j_2}, \quad i = j+(2+j_2)s; \\ w_{4(j+m)+3\to 4(j+m)+3+j_2} \otimes w_{4j\to 4(j+s)+1}, \\ \qquad\qquad i = (j+s)_{2s} + 2s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$(d_3)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+s+1)+1} \otimes e_{4j+1}, \quad i = j; \\ w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+s+1)+1} \otimes w_{4j+1\to 4j+2}, \quad i = j+2s; \\ e_{4(j+m+s+1)+1} \otimes w_{4j+1\to 4j+3}, \quad i = (j+s)_{2s} + 6s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_3)_{ij} = \begin{cases} -f_1(j, 6s-1) e_{4(j+m+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+2\to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_{2s},\ j \geqslant 5s; \\ w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+1)+j_2-3} \otimes e_{4(j+(j_2-4)s)+2}, \quad i = (j)_s + 4s; \\ w_{4(j+m+1)+1\to 4(j+m+1)+j_2-3} \otimes w_{4(j+(j_2-4)s)+2\to 4j+3}, \\ \qquad i = j+2s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то

$$(d_3)_{ij} = \begin{cases} f_1(j, 8s-1) e_{4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4j+2\to 4(j+1)}, \\ \qquad i = j - 7s + 1,\ j \geqslant 7s; \\ w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+s+1)+1+j_2-6} \otimes e_{4(j+(7-j_2)s)+2}, \quad i = (j)_s + 5s; \\ w_{4(j+m+s+1)+1\to 4(j+m+s+1)+1+j_2-6} \otimes w_{4(j+(7-j_2)s)+2\to 4j+3}, \\ \qquad i = (j+s)_{2s} + 6s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$(d_3)_{ij} = \begin{cases} f_1(j, 9s-1) w_{4(j+m+f(j,9s-1)s+1)+2 \to 4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3 \to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s; \\ f_1(j, 9s-1) e_{4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3 \to 4(j+f(j,9s-1)s+1)+1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + 2s; \\ w_{4(j+m+1)+1 \to 4(j+m+1)+3} \otimes e_{4j+3}, \quad i = j - 2s; \\ -w_{4(j+m+s+1)+1 \to 4(j+m+1)+3} \otimes e_{4j+3}, \quad i = j - s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_4.

$$d_4 : Q_5 \to Q_4 \text{ – матрица размера } (9s \times 8s).$$

Если $0 \leqslant j < 2s$, то

$$(d_4)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m-1)+3 \to 4(j+m)+1} \otimes e_{4j}, \quad i = j, \ j < s; \\ -f_1(j, s) w_{4(j+m) \to 4(j+m)+1} \otimes e_{4j}, \quad i = (j)_s + s; \\ -e_{4(j+m)+1} \otimes w_{4j \to 4(j+s)+1}, \quad i = (j+s)_{2s} + 2s; \\ e_{4(j+m)+1} \otimes w_{4j \to 4j+2}, \quad i = j + (5 - f_0(j, s))s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$(d_4)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m)+3 \to 4(j+m+1)} \otimes w_{4j+1 \to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s, \ j < 3s - 1 \text{ или } j = 4s - 1; \\ -f_1(i_2, s-1) f_1(j, 3s) e_{4(j+m+1)} \otimes w_{4j+1 \to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s + s; \\ w_{4(j+m+s)+1 \to 4(j+m+1)} \otimes e_{4j+1}, \quad i = j; \\ -w_{4(j+m+s)+2 \to 4(j+m+1)} \otimes w_{4j+1 \to 4j+2}, \\ \qquad i = j + (4 - f_0(j, 3s))s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_4)_{ij} = \begin{cases} e_{4(j+m)+3} \otimes w_{4j+2\to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s,\ j < 5s-1 \text{ или } j = 6s-1; \\ w_{4(j+m)+1\to 4(j+m)+3} \otimes e_{4j+2}, \quad i = j + (1 - f_0(j,5s))s; \\ -w_{4(j+m+s)+2\to 4(j+m)+3} \otimes e_{4j+2}, \quad i = j + (2 - f_0(j,5s))s; \\ -f_1(j,5s)e_{4(j+m)+3} \otimes w_{4j+2\to 4j+3}, \quad i = (j)_s + 8s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то

$$(d_4)_{ij} = \begin{cases} -f_1(j,7s)w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+1)+2} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s,\ j < 7s-1 \text{ или } j = 8s-1; \\ f_1(j,7s)w_{4(j+m+1)+1\to 4(j+m+1)+2} \otimes w_{4j+3\to 4(j+s+1)+1}, \\ \qquad i = (j+s+1)_{2s} + 2s; \\ -f_1(j,7s)e_{4(j+m+1)+2} \otimes w_{4j+3\to 4(j+s+1)+2}, \\ \qquad i = (j+1)_s + 7s,\ j < 7s-1 \text{ или } j = 8s-1; \\ -f_1(j,7s)e_{4(j+m+1)+2} \otimes w_{4j+3\to 4(j+s+1)+2}, \\ \qquad i = (j+1)_s + 5s,\ 7s-1 \leqslant j < 8s-1; \\ w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+1)+2} \otimes e_{4j+3}, \quad i = (j)_s + 8s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_5.

$$d_5 : Q_6 \to Q_5 \text{ -- матрица размера } (8s \times 9s).$$

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_5)_{ij} = \begin{cases} f_1(j_1,2)w_{4(j+m)+1+j_1+2f(j_1,1)\to 4(j+m+1)} \otimes w_{4j\to 4j+j_1}, \\ \qquad i = j + 2j_1 s,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ f_1(j_1,2)w_{4(j+m+s)+1+j_1+2f(j_1,1)\to 4(j+m+1)} \otimes w_{4j\to 4(j+s)+j_1}, \\ \qquad i = j + (2j_1+1)s,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_5)_{ij} = \begin{cases} -f_1(j,2s) w_{4(j+m+s+1)+1 \to 4(j+m+s+1)+j_2} \otimes \\ \qquad w_{4(j+s(2-j_2))+1 \to 4(j+1)}, \quad i = (j+s+1)_{2s}; \\ w_{4(j+m+1) \to 4(j+m+s+1)+j_2} \otimes e_{4(j+s(2-j_2))+1}, \quad i = (j)_s + 2s; \\ -w_{4(j+m)+3 \to 4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4j+1 \to 4j+2}, \ i = j+2s, \ j \geqslant 2s; \\ -e_{4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4j+1 \to 4j+3}, \quad i = j+5s, \ j \geqslant 2s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_5)_{ij} = \begin{cases} -f_1(j,4s) w_{4(j+m+1)+1 \to 4(j+m+1)+j_2-2} \otimes w_{4(j+s(j_2-3))+1 \to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_{2s}; \\ w_{4(j+m+1) \to 4(j+m+1)+j_2-2} \otimes e_{4(j+s(j_2-3))+1}, \quad i = (j)_s + 3s; \\ -w_{4(j+m)+3 \to 4(j+m+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+1 \to 4(j+s)+2}, \\ \qquad i = j+s, \ j \geqslant 4s; \\ e_{4(j+m+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+1 \to 4j+3}, \quad i = j+2s, \ j \geqslant 4s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 7s$, то

$$(d_5)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m)+3 \to 4(j+m+s+1)+2} \otimes e_{4(j+s)+2}, \quad i = j-s; \\ f_1(j,6s) e_{4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+2 \to 4j+3}, \quad i = j+s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$(d_5)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m+s+1)+1\to 4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)}, & i=j-7s+1; \\ w_{4(j+m+1)+1\to 4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)}, & i=(j+1)_{2s}; \\ -e_{4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3\to 4(j+s+1)+2}, & i=j-3s+1; \\ -e_{4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)+2}, & i=(j+1)_{2s}+4s; \\ w_{4(j+m+s+1)+2\to 4(j+m+1)+3} \otimes e_{4j+3}, & i=j-s; \\ -w_{4(j+m+1)+2\to 4(j+m+1)+3} \otimes e_{4j+3}, & i=j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$(d_5)_{ij} = \begin{cases} -e_{4(j+m+2)} \otimes w_{4j+3\to 4(j+s+1)+1}, & i=(j+s+1)_{2s}+2s; \\ w_{4(j+m+1)+2\to 4(j+m+2)} \otimes e_{4j+3}, & i=j-2s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_6.

$$d_6 : Q_7 \to Q_6 \text{ – матрица размера } (9s \times 8s).$$

Если $0 \leqslant j < 2s$, то

$$(d_6)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m)\to 4(j+m)+2} \otimes e_{4j}, & i=(j)_s; \\ -w_{4(j+m)+1\to 4(j+m)+2} \otimes w_{4j\to 4j+1}, & i=j+(j_2+1)s; \\ -e_{4(j+m)+2} \otimes w_{4j\to 4(j+s)+1}, & i=j+(4-3j_2)s; \\ e_{4(j+m)+2} \otimes w_{4j\to 4j+2}, & i=j+5s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$(d_6)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m)+1\to 4(j+m)+3} \otimes e_{4j+1}, \quad i = j + s(j_2 - 3); \\ -w_{4(j+m+s)+2\to 4(j+m)+3} \otimes e_{4j+1}, \quad i = j + s(j_2 - 2); \\ -w_{4(j+m)+2\to 4(j+m)+3} \otimes w_{4j+1\to 4j+2}, \quad i = j + 3s; \\ e_{4(j+m)+3} \otimes w_{4j+1\to 4j+3}, \quad i = (j)_s + 7s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_6)_{ij} = \begin{cases} e_{4(j+m+1)} \otimes w_{4j+2\to 4(j+1)}, \quad i = (j+1)_s,\ j \geqslant 5s; \\ w_{4(j+m)+2\to 4(j+m+1)} \otimes e_{4j+2}, \quad i = j + s; \\ -w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+1)} \otimes w_{4j+2\to 4j+3}, \quad i = j + 2s,\ j \geqslant 5s; \\ -f_1(j, 5s) e_{4(j+m+1)} \otimes w_{4j+2\to 4j+3}, \quad i = (j)_s + 8s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то

$$(d_6)_{ij} = \begin{cases} -w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+1)+1} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)}, \quad i = (j+1)_s,\ j < 7s; \\ e_{4(j+m+1)+1} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)+1}, \\ \qquad\qquad i = (j+1)_{2s} + s,\ j < 7s - 1 \text{ или } j = 8s - 1; \\ e_{4(j+m+1)+1} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)+1}, \\ \qquad\qquad i = (j+1)_{2s} + 2s,\ 7s - 1 \leqslant j < 8s - 1; \\ w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+1)+1} \otimes e_{4j+3}, \quad i = j + s,\ j < 7s; \\ -f_1(j, 7s) w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+1)+1} \otimes e_{4j+3}, \quad i = (j)_s + 8s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_7.

$$d_7 : Q_8 \to Q_7 \text{ – матрица размера } (8s \times 6s).$$

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_7)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m)+2\to 4(j+m)+3} \otimes e_{4j}, \quad i = j; \\ -w_{4(j+m+s)+2\to 4(j+m)+3} \otimes e_{4j}, \quad i = j+s; \\ e_{4(j+m)+3} \otimes w_{4j\to 4j+1}, \quad i = j+2s; \\ -e_{4(j+m)+3} \otimes w_{4j\to 4(j+s)+1}, \quad i = j+3s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_7)_{ij} = \begin{cases} -e_{4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+1\to 4(j+1)}, \quad i = (j+s+1)_{2s}; \\ w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+s+1)+2} \otimes e_{4(j+s)+1}, \quad i = j+s; \\ w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+1\to 4(j+s)+2}, \quad i = j+3s; \\ -w_{4(j+m+s+1)+1\to 4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+1\to 4j+3}, \quad i = j+5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_7)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+1)+1} \otimes e_{4(j+s)+2}, \quad i = j+s; \\ e_{4(j+m+1)+1} \otimes w_{4(j+s)+2\to 4j+3}, \quad i = (j)_{2s}+6s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_7)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m+1+sf(j,6s-1))+2\to 4(j+m+2)} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s + s; \\ -w_{4(j+m+1)+3\to 4(j+m+2)} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1+(1+f(j,6s-1))s)+1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + 2s; \\ -e_{4(j+m+2)} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1+(1+f(j,6s-1))s)+2}, \quad i = (j+1)_s + 4s; \\ -e_{4(j+m+2)} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1+sf(j,6s-1))+2}, \quad i = (j+1)_s + 5s; \\ w_{4(j+m+s+1)+1\to 4(j+m+2)} \otimes e_{4j+3}, \quad i = j+s; \\ w_{4(j+m+1)+1\to 4(j+m+2)} \otimes e_{4j+3}, \quad i = j+2s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_8.

$$d_8 : Q_9 \to Q_8 \text{ – матрица размера } (6s \times 7s).$$

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_8)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m-1)+3\to 4(j+m)+3} \otimes e_{4j}, \quad i = j; \\ -f_1(j, s-1) e_{4(j+m)+3} \otimes w_{4j\to 4(j+1)}, \quad i = (j+1)_s; \\ -w_{4(j+m)+2\to 4(j+m)+3} \otimes w_{4j\to 4j+1}, \quad i = j+s; \\ w_{4(j+m+s)+2\to 4(j+m)+3} \otimes w_{4j\to 4(j+s)+1}, \quad i = j+2s; \\ w_{4(j+m+s)+1\to 4(j+m)+3} \otimes w_{4j\to 4j+2}, \quad i = j+3s; \\ -w_{4(j+m)+1\to 4(j+m)+3} \otimes w_{4j\to 4(j+s)+2}, \quad i = j+4s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_8)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+1)} \otimes w_{4(j+s)+1\to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s,\ j < 2s-1 \text{ или } j = 3s-1; \\ w_{4(j+m+s)+2\to 4(j+m+1)} \otimes e_{4(j+s)+1}, \quad i = j; \\ -w_{4(j+m)+1\to 4(j+m+1)} \otimes w_{4(j+s)+1\to 4(j+s)+2}, \quad i = j+2s; \\ e_{4(j+m+1)} \otimes w_{4(j+s)+1\to 4j+3}, \quad i = (j)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_8)_{ij} = \begin{cases} -w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+1)+1} \otimes w_{4(j+s)+2\to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s,\ j < 4s-1 \text{ или } j = 5s-1; \\ w_{4(j+m)+1\to 4(j+m+1)+1} \otimes e_{4(j+s)+2}, \quad i = j; \\ -e_{4(j+m+1)+1} \otimes w_{4(j+s)+2\to 4(j+s+1)+2}, \quad i = (j+s+1)_{2s} + 3s; \\ -w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+1)+1} \otimes w_{4(j+s)+2\to 4j+3}, \quad i = (j)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 7s$, то

$$(d_8)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s,\ 6s-1 \leqslant j < 7s-1; \\ e_{4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4j+3\to 4(j+s+1)+1}, \quad i = (j+s+1)_{2s} + s; \\ w_{4(j+m+s+1)+1\to 4(j+m+s+1)+2} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)+2}, \\ \qquad i = (j+1)_{2s} + 3s; \\ w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+s+1)+2} \otimes e_{4j+3}, \quad i = (j)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_9.

$$d_9 : Q_{10} \to Q_9 \text{ – матрица размера } (7s \times 6s).$$

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_9)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m)+3 \to 4(j+m+1)} \otimes e_{4j}, & i = j; \\ e_{4(j+m+1)} \otimes w_{4j \to 4j+1}, & i = j+s; \\ -e_{4(j+m+1)} \otimes w_{4j \to 4(j+s)+1}, & i = j+2s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_9)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m+1) \to 4(j+m+1)+1} \otimes e_{4(j+s)+1}, & i = j; \\ e_{4(j+m+1)+1} \otimes w_{4(j+s)+1 \to 4(j+s)+2}, & i = j+2s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_9)_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+m+1)+1 \to 4(j+m+1)+2} \otimes e_{4(j+s)+2}, & i = j; \\ e_{4(j+m+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+2 \to 4j+3}, & i = (j)_{2s}+5s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_9)_{ij} = \begin{cases} f_1(j, 6s-1) e_{4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3 \to 4(j+1)}, & i = (j+1)_s; \\ w_{4(j+m+s+1)+2 \to 4(j+m+1)+3} \otimes e_{4j+3}, & i = j; \\ -w_{4(j+m+1)+2 \to 4(j+m+1)+3} \otimes e_{4j+3}, & i = j+s; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_{10}.

$$d_{10} : Q_{11} \to Q_{10} \text{ – матрица размера } (6s \times 6s).$$

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_{10})_{ij} = \begin{cases} -f_1(j, s-1)e_{4(j+m+1)} \otimes w_{4j\to 4(j+1)}, \quad i = (j+1)_s; \\ -f_1(j_1, 1)w_{4(j+m+s)+1+j_1\to 4(j+m+1)} \otimes w_{4j\to 4j+1+j_1}, \\ \qquad i = j + (2j_1+1)s,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ f_1(j_1, 2)w_{4(j+m)+j_1\to 4(j+m+1)} \otimes w_{4j\to 4(j+s)+j_1}, \\ \qquad i = j + 2j_1 s,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_{10})_{ij} = \begin{cases} f_1(i_2, s-1)f_1(j, 2s)w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+1)+1} \otimes \\ \qquad w_{4(j+s)+1\to 4(j+1)}, \quad i = (j+1)_s; \\ w_{4(j+m)+1\to 4(j+m+1)+1} \otimes e_{4(j+s)+1}, \quad i = j; \\ -e_{4(j+m+1)+1} \otimes w_{4(j+s)+1\to 4(j+s+1)+1}, \\ \qquad i = (j+s+1)_{2s} + s; \\ -w_{4(j+m)+2\to 4(j+m+1)+1} \otimes w_{4(j+s)+1\to 4(j+s)+2}, \quad i = j+2s; \\ -f_1(j, 2s)w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+1)+1} \otimes w_{4(j+s)+1\to 4j+3}, \\ \qquad i = (j)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_{10})_{ij} = \begin{cases} -f_1(i_2, s-1)f_1(j,4s)w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+1)+2}\otimes \\ \qquad w_{4(j+s)+2\to 4(j+1)}, \quad i = (j+1)_s; \\ w_{4(j+m+1)+1\to 4(j+m+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+2\to 4(j+s+1)+1}, \\ \qquad i = (j+s+1)_{2s} + s; \\ w_{4(j+m)+2\to 4(j+m+1)+2} \otimes e_{4(j+s)+2}, \quad i = j; \\ -e_{4(j+m+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+2\to 4(j+s+1)+2}, \\ \qquad i = (j+s+1)_{2s} + 3s; \\ f_1(j,4s)w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+1)+2} \otimes w_{4(j+s)+2\to 4j+3}, \\ \qquad i = (j)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_{10})_{ij} = \begin{cases} -f_1(j, 6s-1)w_{4(j+m+1)\to 4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s; \\ w_{4(j+m+1)+1\to 4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3\to 4(j+s+1)+1}, \\ \qquad i = j - 4s + 1; \\ -w_{4(j+m+s+1)+1\to 4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)+1}, \\ \qquad i = (j+1)_{2s} + s; \\ -w_{4(j+m+1)+2\to 4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3\to 4(j+s+1)+2}, \\ \qquad i = j - 2s + 1; \\ w_{4(j+m+s+1)+2\to 4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)+2}, \\ \qquad i = (j+1)_{2s} + 3s; \\ w_{4(j+m)+3\to 4(j+m+1)+3} \otimes e_{4j+3}, \quad i = j; \\ -f_1(j, 6s-1)e_{4(j+m+1)+3} \otimes w_{4j+3\to 4(j+1)+3}, \\ \qquad i = (j+1)_s + 5s; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть $R = R'_s$ – алгебра типа E_6. Тогда минимальная проективная резольвента Λ-модуля R имеет вид:*

$$\cdots \longrightarrow Q_3 \xrightarrow{d_2} Q_2 \xrightarrow{d_1} Q_1 \xrightarrow{d_0} Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0, \qquad (+)$$

где ε – отображение умножения ($\varepsilon(a \otimes b) = ab$); Q_r ($r \leqslant 10$) и d_r ($r \leqslant 10$) описаны выше; далее $Q_{11\ell+r}$, где $\ell \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant r \leqslant 10$, получается из Q_r заменой каждого прямого слагаемого $P_{i,j}$ на $P_{\sigma^\ell(i),j}$ соответственно (здесь $\sigma(i) = j$, если $\sigma(e_i) = e_j$), а дифференциал $d_{11\ell+r}$ получается из d_r применением σ^ℓ ко всем левым компонентам тензоров из соответствующей матрицы.

Для доказательства того, что члены резольвенты Q_i имеют указанный вид, введём $P_i = Re_i$ – проективные накрытия простых R-модулей S_i, соответствующих вершинам колчана $\mathcal{Q}_s$. Найдём минимальные проективные резольвенты простых R-модулей S_i.

Обозначение. Для R-модуля M через $\Omega^m(M)$ обозначим его m-ую сизигию.

Замечание 7. В дальнейшем гомоморфизм умножения справа на путь w также обозначаем через w.

Лемма 4. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{4r} имеет вид*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow P_{4(r+3)+3} &\xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{smallmatrix}\right)} P_{4(r+3)+2} \oplus P_{4(r+s+3)+2} \xrightarrow{(\alpha^2\ \alpha^2)} \\ \longrightarrow P_{4(r+3)} &\xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\gamma\alpha^2\\ \gamma\alpha^2\end{smallmatrix}\right)} P_{4(r+2)+1} \oplus P_{4(r+s+2)+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha\gamma & 0\\ -\alpha & \alpha\end{smallmatrix}\right)} \\ \longrightarrow P_{4(r+1)+3} \oplus P_{4(r+2)} &\xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \gamma\alpha\\ -\alpha & 0\end{smallmatrix}\right)} P_{4(r+1)+2} \oplus P_{4(r+s+1)+2} \xrightarrow{(\alpha^2\gamma\ \alpha^2\gamma)} \\ \longrightarrow P_{4r+3} &\xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^2\\ -\alpha^2\end{smallmatrix}\right)} P_{4r+1} \oplus P_{4(r+s)+1} \xrightarrow{(\alpha\ \alpha)} P_{4r} \longrightarrow S_{4r} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

При этом $\Omega^9(S_{4r}) \simeq S_{4(r+4)+3}$.

Лемма 5. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{4r+1} имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{4r+2} \xrightarrow{\alpha} P_{4r+1} \longrightarrow S_{4r+1} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^2(S_{4r+1}) \simeq S_{4(r+1)+2}$.

Лемма 6. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{4r+2} имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{4(r+s+4)+1} \xrightarrow{\alpha} P_{4(r+4)} \xrightarrow{\gamma\alpha} P_{4(r+3)+2} \xrightarrow{\alpha^2\gamma} P_{4(r+2)+3} \xrightarrow{\binom{\alpha^2}{-\alpha}}$$
$$\longrightarrow P_{4(r+2)+1} \oplus P_{4(r+s+2)+2} \xrightarrow{(\alpha\ \alpha^2)} P_{4(r+2)} \xrightarrow{\gamma\alpha^2}$$
$$\longrightarrow P_{4(r+s+1)+1} \xrightarrow{\alpha\gamma} P_{4r+3} \xrightarrow{\alpha} P_{4r+2} \longrightarrow S_{4r+2} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^9(S_{4r+2}) \simeq S_{4(r+s+5)+1}$.

Лемма 7. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{4r+3} имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{4(r+1)} \xrightarrow{\gamma} P_{4r+3} \longrightarrow S_{4r+3} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^2(S_{4r+3}) \simeq S_{4(r+2)}$.

Доказательство. Доказательства лемм состоят из прямой проверки точности указанных последовательностей и не представляют труда. □

Нам потребуется лемма Хаппеля (см. [13]), уточнённая в [3]:

Лемма 8 (Happel)**.** *Пусть*

$$\cdots \to Q_m \to Q_{m-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to R \to 0$$

– минимальная проективная бимодульная резольвента R. Тогда

$$Q_m \cong \bigoplus_{i,j} P_{i,j}^{\dim \operatorname{Ext}_R^m(S_j,S_i)}.$$

Доказательство теоремы 3. То, что элементы Q_i имеют указанный вид, непосредственно следует из лемм 4 – 7 и леммы Хаппеля.

Как доказано в [14], для доказательства точности последовательности (+) в членах Q_m ($m \leqslant 11$) достаточно показать, что $d_m d_{m+1} = 0$. Это соотношение проверяется прямыми вычислениями произведений соответствующих матриц.

Из точности в члене Q_{11} следует, что $\Omega^{11}({}_\Lambda R) \simeq {}_1R_\sigma$, где $\Omega^{11}({}_\Lambda R) = \mathrm{Im} d_{10}$ – 11-я сизигия модуля R, а ${}_1R_\sigma$ – скрученный бимодуль. Следовательно, в членах Q_t ($t > 11$) точность также имеет место. □

Напомним, что для R-бимодуля M *скрученным бимодулем* назовем линейное пространство M, на котором левое и правое действия алгебры R (обозначаемые звездочкой) заданы следующим образом:

$$r * m * s = \lambda(r) \cdot m \cdot \mu(s) \text{ для } r, s \in R \text{ и } m \in M,$$

где λ, μ – некоторые автоморфизмы алгебры R. Такой скрученный бимодуль обозначаем через ${}_{\lambda}M_{\mu}$.

Следствие 9. *Имеет место изоморфизм* $\Omega^{11}({}_{\Lambda}R) \simeq {}_{1}R_{\sigma}$.

Предложение 10. *Автоморфизм σ имеет конечный порядок, причём*

(1) *если* $\operatorname{char} K = 2$, *то порядок σ равен* $\frac{2s}{\text{НОД}(n+s,2s)}$;

(2) *если* $\operatorname{char} K \neq 2$, *то порядок σ равен* $\frac{2s}{\text{НОД}(n+s,2s)}$, *если* $\frac{2s}{\text{НОД}(n+s,2s)}$ *делится на 4, и* $\frac{4s}{\text{НОД}(n+s,2s)}$ *в противном случае.*

Предложение 11. *Минимальный период бимодульной резольвенты R равен* $11 \operatorname{ord} \sigma$.

§4. Аддитивная структура алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Предложение 12 (Размерности групп гомоморфизмов, $s > 1$)**.** *Пусть $s > 1$ и $R = R'_s$ – алгебра типа E_6. Далее, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ – целая часть, а r – остаток от деления t на* 11.

(1) *Если $r = 0$, то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 6s, & \ell(n+s) + m \equiv 0(2s) \text{ или} \\ & \quad \ell(n+s) + m \equiv 1(2s); \\ 2s, & \ell(n+s) + m \equiv s(2s) \text{ или} \\ & \quad \ell(n+s) + m \equiv s+1(2s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) *Если $r = 1$, то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 7s, & \ell(n+s) + m \equiv 0(2s); \\ 5s, & \ell(n+s) + m \equiv s(2s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) *Если* $r \in \{2,8\}$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 3s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s) \text{ или} \\ & \ell(n+s)+m \equiv s+1(2s); \\ s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s) \text{ или} \\ & \ell(n+s)+m \equiv 1(2s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(4) *Если* $r \in \{3,5,7\}$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 8s, & \ell n+m \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(5) *Если* $r = 4$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 2s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s); \\ 6s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s); \\ 5s, & \ell(n+s)+m \equiv 1(2s); \\ 7s, & \ell(n+s)+m \equiv s+1(2s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(6) *Если* $r = 6$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 7s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s); \\ 5s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s); \\ 6s, & \ell(n+s)+m \equiv 1(2s); \\ 2s, & \ell(n+s)+m \equiv s+1(2s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(7) *Если* $r = 9$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 5s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s); \\ 7s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(8) *Если* $r = 10$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 2s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s) \text{ или} \\ & \ell(n+s)+m \equiv 1(2s); \\ 6s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s) \text{ или} \\ & \ell(n+s)+m \equiv s+1(2s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Размерность $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(P_{i,j}, R)$ равна количеству линейно независимых ненулевых путей колчана $\mathcal{Q}_s$, ведущих из j-ой вершины в i-ую, и доказательство состоит в последовательном рассмотрении случаев $r = 0$, $r = 1$ и т. д. □

Предложение 13 (Размерности групп гомоморфизмов, $s = 1$)**.** *Пусть* $R = R'_1$ *– алгебра типа* E_6. *Далее,* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ *– целая часть, а* r *– остаток от деления* t *на* 11.

(1) *Если* $r \in \{0, 3, 5, 7, 10\}$, *то* $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = 8$.

(2) *Если* $r = 1$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 7, & \ell \;\vdots\; 2; \\ 5 & \ell \;\not\vdots\; 2. \end{cases}$$

(3) *Если* $r = 2$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 2, & \ell \;\vdots\; 2; \\ 6 & \ell \;\not\vdots\; 2. \end{cases}$$

(4) *Если* $r = 4$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 9, & \ell \;\vdots\; 2; \\ 11 & \ell \;\not\vdots\; 2. \end{cases}$$

(5) *Если* $r = 6$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 11, & \ell \;\vdots\; 2; \\ 9 & \ell \;\not\vdots\; 2. \end{cases}$$

(6) *Если* $r=8$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 6, & \ell \,\vdots\, 2; \\ 2 & \ell \not\vdots\, 2. \end{cases}$$

(7) *Если* $r=9$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 5, & \ell \,\vdots\, 2; \\ 7 & \ell \not\vdots\, 2. \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 12. □

Предложение 14 (Размерности групп кограниц)**.** *Пусть* $R = R'_s$ *– алгебра типа* E_6*, и пусть*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_0, R) \xrightarrow{\delta^0} \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \xrightarrow{\delta^1} \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \xrightarrow{\delta^2} \dots \qquad (\times)$$

комплекс, полученный применением функтора $\operatorname{Hom}_\Lambda(-, R)$ *к минимальной проективной бимодульной резольвенте* $(+)$ *алгебры* R.

Рассмотрим группы кограниц $\operatorname{Im}\delta^t$ *комплекса* $(\times)$*. Пусть* ℓ *– целая часть, а* r *– остаток от деления* t *на* 11*,* m *– целая часть от деления* r *на* 2*. Тогда*:

(1) *Если* $r=0$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^t = \begin{cases} 6s-1, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s),\ \ell \,\vdots\, 2 \text{ или } \operatorname{char} K = 2; \\ 6s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s),\ \ell \not\vdots\, 2,\ \operatorname{char} K \neq 2; \\ 2s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) *Если* $r=1$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^t = \begin{cases} s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s); \\ 3s-1, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s),\ \ell \not\vdots\, 2 \text{ или } \operatorname{char} K = 2; \\ 3s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s),\ \ell \,\vdots\, 2,\ \operatorname{char} K \neq 2; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) *Если* $r = 2$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^t = \begin{cases} 3s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s); \\ s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s); \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(4) *Если* $r = 3$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^t = \begin{cases} 5s-1, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s); \\ 7s-1, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s),\ \operatorname{char} K = 2; \\ 7s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s),\ \operatorname{char} K \neq 2; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(5) *Если* $r = 4$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^t = \begin{cases} 2s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s); \\ 6s-1, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s),\ \ell \not\vdots\, 2,\ \operatorname{char} K = 3; \\ 6s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s),\ \ell \vdots\, 2 \textit{ или } \operatorname{char} K \neq 3; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(6) *Если* $r = 5$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^t = \begin{cases} 6s-1, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s),\ \ell \vdots\, 2,\ \operatorname{char} K = 3; \\ 6s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s),\ \ell \not\vdots\, 2 \textit{ или } \operatorname{char} K \neq 3; \\ 2s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s); \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(7) *Если* $r = 6$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^t = \begin{cases} 7s-1, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s),\ \operatorname{char} K = 2; \\ 7s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s),\ \operatorname{char} K \neq 2; \\ 5s-1, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s); \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(8) *Если* $r = 7$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s); \\ 3s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(9) *Если* $r = 8$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} 3s-1, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s),\ \ell \,\vdots\, 2 \text{ или } \mathrm{char}\, K = 2; \\ 3s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s),\ \ell \,\not\vdots\, 2,\ \mathrm{char}\, K \neq 2; \\ s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(10) *Если* $r = 9$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} 2s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s); \\ 6s-1, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s),\ \ell \,\not\vdots\, 2 \text{ или } \mathrm{char}\, K = 2; \\ 6s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s),\ \ell \,\vdots\, 2,\ \mathrm{char}\, K \neq 2; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(11) *Если* $r = 10$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^t = \begin{cases} 2s-1, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s),\ \ell \,\not\vdots\, 2,\ \mathrm{char}\, K = 3; \\ 2s, & \ell(n+s)+m \equiv 0(2s),\ \ell \,\vdots\, 2 \text{ или } \mathrm{char}\, K \neq 3; \\ 6s, & \ell(n+s)+m \equiv s(2s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство техническое и состоит в построении матриц образа, исходя из описания матриц дифференциалов, и последующем вычислении ранга матрицы образа. □

Теорема 15 (Аддитивная структура, $s > 1$)**.** *Пусть* $s > 1$ *и* $R = R'_s$ *– алгебра типа* E_6. *Далее,* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ *– целая часть, а* r *– остаток от деления* t *на* 11, m *– целая часть от деления* r *на* 2. *Тогда* $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 1$, *если выполнено одно из следующих условий*:

(1) $r \in \{0,1,8,9\}$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$, $\ell \;\vdots\; 2$ *или* $\operatorname{char} K = 2$;

(2) $r = 0$, $\ell(n+s)+m \equiv s+1(2s)$, $\ell \;\vdots\; 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(3) $r \in \{1,9\}$, $\ell(n+s)+m \equiv s(2s)$, $\ell \;\not\vdots\; 2$ *или* $\operatorname{char} K = 2$;

(4) $r \in \{2,10\}$, $\ell(n+s)+m \equiv s+1(2s)$, $\ell \;\not\vdots\; 2$ *или* $\operatorname{char} K = 2$;
(5) $r = 3$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$;
(6) $r = 3$, $\ell(n+s)+m \equiv s(2s)$, $\operatorname{char} K = 2$;

(7) $r \in \{4,5\}$, $\ell(n+s)+m \equiv s(2s)$, $\ell \;\not\vdots\; 2$, $\operatorname{char} K = 3$;
(8) $r = 4$, $\ell(n+s)+m \equiv 1(2s)$;
(9) $r = 4$, $\ell(n+s)+m \equiv s+1(2s)$, $\operatorname{char} K = 2$;

(10) $r = 5$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$, $\ell \;\vdots\; 2$, $\operatorname{char} K = 3$;
(11) $r \in \{6,7\}$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$, $\operatorname{char} K = 2$;
(12) $r \in \{6,7\}$, $\ell(n+s)+m \equiv s(2s)$;

(13) $r = 6$, $\ell(n+s)+m \equiv 1(2s)$, $\ell \;\vdots\; 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(14) $r = 10$, $\ell(n+s)+m \equiv 0(2s)$, $\ell \;\not\vdots\; 2$, $\operatorname{char} K = 3$.
Во всех остальных случаях $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 0$.

Доказательство. Так как $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = \dim_K \mathrm{Ker}\delta^t - \dim_K \mathrm{Im}\delta^{t-1}$, а $\dim_K \mathrm{Ker}\delta^t = \dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_t, R) - \dim_K \mathrm{Im}\delta^t$, утверждения теоремы легко выводится из предложений 12 – 14. □

Теорема 16 (Аддитивная структура, $s = 1$). *Пусть $R = R'_1$ – алгебра типа E_6. Далее, $t \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, ℓ – целая часть, а r – остаток от деления t на 11.*
(*а*) $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 3$, *если* $t = 0$.
(*б*) $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 2$, *если выполнено одно из следующих условий*:

(1) $r \in \{0,10\}$, $t > 0$, $\ell + m \;\vdots\; 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(2) $r \in \{4,6\}$, $\ell + m \;\not\vdots\; 2$, $\operatorname{char} K = 3$.
(*в*) $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 1$, *если выполнено одно из следующих условий*:

(1) $r \in \{0,10\}$, $t > 0$, $\ell + m \;\vdots\; 2$, $\operatorname{char} K \neq 3$;
(2) $r \in \{1,9\}$;

(3) $r \in \{2,8\}$, $\ell + m \;\vdots\; 2$;

(4) $r = 3$, $\ell + m \;\vdots\; 2$ *или* $\operatorname{char} K = 2$;

(5) $r \in \{4, 6\}$, $\ell + m \,\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 2$;

(6) $r \in \{4, 6\}$, $\ell + m \not\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K \neq 3$;
(7) $r = 5$, $\operatorname{char} K = 3$;

(8) $r = 7$, $\ell + m \not\vdots\, 2$ *или* $\operatorname{char} K = 2$.
(г) *Во всех остальных случаях* $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 0$.

§5. Образующие алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Для $s > 1$ введём множество образующих $Y_t^{(1)}$, $Y_t^{(2)}$, $\dots Y_t^{(22)}$, таких что $\deg Y_t^{(i)} = t$, $0 \leqslant t < 11 \operatorname{ord} \sigma$ и t удовлетворяет условиям (i)-го пункта (см. список в §2). Для $s = 1$ введём множество образующих $Y_t^{(1)}$, $Y_t^{(2)}$, $\dots Y_t^{(24)}$, таких что $\deg Y_t^{(i)} = t$, $0 \leqslant t < 11 \operatorname{ord} \sigma$ и t удовлетворяет условиям (i)-го пункта списков (см. §2). Для образующей $Q_t \to R$ опишем отображение $Q_t \to Q_0$ в виде матрицы. Соответствующая образующая будет композицией этого отображения с отображением умножения $Q_t \to Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} R$.

Обозначение. Для степени t элемента из множества образующих представим t в виде $t = 11\ell + r$ $(0 \leqslant r \leqslant 10)$. Введём функцию κ: $\{w \in K[\mathcal{Q}_s]\} \to \mathbb{Z}$, которая возвращает коэффициент от $\sigma(w)$; при этом $\kappa^\ell(w)$ возвращает коэффициент от $\sigma^\ell(w)$.

(1) $Y_t^{(1)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)}) e_{4j} \otimes e_{4j}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{4(j+s)+1} \otimes e_{4(j+s)+1}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{4(j+s)+2} \otimes e_{4(j+s)+2}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)})e_{4j+3} \otimes e_{4j+3}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) $Y_t^{(2)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = \kappa^\ell(\alpha_0)w_{0\to 4} \otimes e_0.$$

(3) $Y_t^{(3)}$ – матрица размера $(6s \times 7s)$ с двумя ненулевыми элементами:

$$y_{0,0} = w_{0\to 1} \otimes e_0 \text{ и } y_{0,s} = w_{0\to 4s+1} \otimes e_0.$$

(4) $Y_t^{(4)}$ – матрица размера $(6s \times 7s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4j\to 4(j+s)+1} \otimes e_{4j}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 5s - 1$, то $y_{ij} = 0$.

Если $5s - 1 \leqslant j < 6s - 1$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)})w_{4j+2\to 4j+3} \otimes e_{4j+2}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $6s - 1 \leqslant j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.

(5) $Y_t^{(5)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = \kappa^\ell(\alpha_0)w_{0\to 3} \otimes e_0.$$

(6) $Y_t^{(6)}$ – матрица размера $(6s \times 8s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4j\to 4j+2} \otimes e_{4j}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 3s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $3s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)})w_{4j+1\to 4j+3} \otimes e_{4j+1}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa^\ell(\alpha_{3(j+m+1)})w_{4j+2\to 4(j+1)} \otimes e_{4j+2}, \\ \qquad\qquad i = j - s,\ j < 5s - 1 \text{ или } j = 6s - 1; \\ 0, \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4j+3\to 4(j+1)+1} \otimes e_{4j+3}, \\ \qquad\qquad i = 5s + (j)_s,\ j < 7s - 1 \text{ или } j = 8s - 1; \\ 0, \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(7) $Y_t^{(7)}$ – матрица размера $(6s \times 8s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4j\to 4(j+s)+2} \otimes e_{4j}, & i = (j)_s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4j+1\to 4j+3} \otimes e_{4j+1}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4j+2\to 4(j+1)} \otimes e_{4j+2}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

(8) $Y_t^{(8)}$ – матрица размера $(6s \times 9s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = w_{0\to 3} \otimes e_0.$$

(9) $Y_t^{(9)}$ – матрица размера $(6s \times 9s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)})e_{4j} \otimes e_{4j}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{4j+1} \otimes e_{4j+1}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 5s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{4(j+s)+2} \otimes e_{4(j+s)+2}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{4j+2} \otimes e_{4j+2}, & i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)})e_{4j+3} \otimes e_{4j+3}, & i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(10) $Y_t^{(10)}$ – матрица размера $(6s \times 9s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,s} = \kappa^\ell(\alpha_6)w_{0\to 4} \otimes e_0.$$

(11) $Y_t^{(11)}$ – матрица размера $(6s \times 8s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4j\to 4j+1} \otimes e_{4j}, & i = (j)_s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m+1)})w_{4j+1\to 4(j+1)} \otimes e_{4j+1}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)})w_{4j+2\to 4j+3} \otimes e_{4j+2}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} f_1(j, 7s)w_{4j+3\to 4(j+1)+2} \otimes e_{4j+3}, & i = 5s + (j)_s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(12) $Y_t^{(12)}$ – матрица размера $(6s \times 8s)$ с двумя ненулевыми элементами:

$$y_{3s,4s} = \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)})w_{4j+2\to 4j+3} \otimes e_{4j+2};$$
$$y_{4s,5s} = \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)})w_{4j+2\to 4j+3} \otimes e_{4j+2}.$$

(13) $Y_t^{(13)}$ – матрица размера $(6s \times 9s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{4(j+s)+1} \otimes e_{4(j+s)+1}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 3s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $3s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{4j+1} \otimes e_{4j+1}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 5s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $5s \leqslant j < 7s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{4(j+s)+2} \otimes e_{4(j+s)+2}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $7s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4j+3\to 4(j+1)} \otimes e_{4j+3}, & i = j-3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(14) $Y_t^{(14)}$ – матрица размера $(6s \times 9s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{5s,7s} = \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)}) w_{4j+3\to 4(j+1)+3} \otimes e_{4j+3}.$$

(15) $Y_t^{(15)}$ – матрица размера $(6s \times 9s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)}) e_{4j} \otimes e_{4j}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $2s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4j+1\to 4j+2} \otimes e_{4j+1}, & i = j-s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 4s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $4s \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+s)+1\to 4(j+s)+2} \otimes e_{4(j+s)+1}, & i = j-2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)}) e_{4j+3} \otimes e_{4j+3}, & i = j-2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(16) $Y_t^{(16)}$ – матрица размера $(6s \times 8s)$ с двумя ненулевыми элементами:

$$y_{0,0} = w_{0\to 2} \otimes e_0 \text{ и } y_{s,2s} = w_{1\to 3} \otimes e_1.$$

(17) $Y_t^{(17)}$ – матрица размера $(6s \times 8s)$ с двумя ненулевыми элементами:

$$y_{0,0} = w_{0\to 4s+2} \otimes e_0 \text{ и } y_{0,s} = w_{0\to 2} \otimes e_0.$$

(18) $Y_t^{(18)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+s)+1\to 4(j+s)+2} \otimes e_{4(j+s)+1}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa^\ell(\alpha_{3(j+m+1)}) w_{4j+3\to 4(j+1)} \otimes e_{4j+3}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(19) $Y_t^{(19)}$ – матрица размера $(6s \times 7s)$ с двумя ненулевыми элементами:

$$y_{s,s} = \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m+1)}) w_{4(j+s)+1\to 4(j+1)} \otimes e_{4(j+s)+1};$$
$$y_{2s,2s} = \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m+1)}) w_{4(j+s)+1\to 4(j+1)} \otimes e_{4(j+s)+1}.$$

(20) $Y_t^{(20)}$ – матрица размера $(6s \times 7s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)}) w_{4j\to 4j+3} \otimes e_{4j}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa^\ell(\alpha_{3(j+m+1)}) w_{4(j+s)+1\to 4(j+1)} \otimes e_{4(j+s)+1}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 3s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $3s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4(j+s)+2\to 4(j+s+1)+1} \otimes e_{4(j+s)+2}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $6s \leqslant j < 7s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{4j+3\to 4(j+1)+2} \otimes e_{4j+3}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(21) $Y_t^{(21)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = -\kappa^\ell(\alpha_{15}) w_{0\to 4} \otimes e_0.$$

(22) $Y_t^{(22)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} \kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)}) e_{4j} \otimes e_{4j}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 5s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -\kappa^\ell(\alpha_{3(j+m)}) e_{4j+3} \otimes e_{4j+3}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(23) $Y_t^{(23)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = w_{0\to 4} \otimes e_0.$$

(24) $Y_t^{(24)}$ – матрица размера $(6s \times 6s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{5,5} = w_{3\to 7} \otimes e_3.$$

§6. Произведения в $\mathrm{HH}^*(R)$

Пусть $Q_\bullet \to R$ – минимальная проективная бимодульная резольвента алгебры R, построенная в параграфе 3. Любой коцикл $f \in \mathrm{Ker}\delta^s$ поднимается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\varphi_i : Q_{s+i} \to Q_i\}_{i\geqslant 0}$. Гомоморфизм φ_i назовём *i-м сдвигом* коцикла f и будем обозначать через $\Omega^i(f)$. Для коциклов $f_1 \in \mathrm{Ker}\delta^{s_1}$ и $f_2 \in \mathrm{Ker}\delta^{s_2}$ имеем

$$\mathrm{cl} f_2 \cdot \mathrm{cl} f_1 = \mathrm{cl}(\Omega^0(f_2)\Omega^{s_2}(f_1)). \qquad (*)$$

Описания Ω-сдвигов образующих элементов $Y_t^{(i)}$ громоздкие и не включены в данную статью. С ними можно ознакомиться в препринте [15]. Из описания элементов $Y_t^{(i)}$ и их Ω-сдвигов мы можем найти произведения элементов, пользуясь формулой (∗). Произведения всех элементов, кроме $Y^{(5)}$, $Y^{(10)}$, $Y^{(17)}$, $Y^{(19)}$ и $Y^{(21)}$, находятся путём прямых вычислений (более подробно см. [15]). Завершает описание произведений следующая лемма.

Лемма 17.

(а) *Пусть* $Y^{(5)}$ *– произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы* $Y^{(3)}$ *и* $Y^{(4)}$ *такие, что* $Y^{(5)} = Y^{(3)}Y^{(4)}$.

(б) *Пусть* $Y^{(10)}$ *– произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы* $Y^{(3)}$ *и* $Y^{(6)}$ *такие, что* $Y^{(10)} = Y^{(3)}Y^{(6)}$.

(в) *Пусть* $Y^{(17)}$ *– произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы* $Y^{(3)}$ *и* $Y^{(15)}$ *такие, что* $Y^{(17)} = Y^{(3)}Y^{(15)}$.

(г) *Пусть* $Y^{(19)}$ *– произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы* $Y^{(3)}$ *и* $Y^{(18)}$ *такие, что* $Y^{(19)} = Y^{(3)}Y^{(18)}$.

(д) *Пусть* $Y^{(21)}$ *– произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы* $Y^{(3)}$ *и* $Y^{(20)}$ *такие, что* $Y^{(21)} = Y^{(3)}Y^{(20)}$.

Доказательство. Степень 1 есть степень типа 3, для любого s. Остается использовать соотношения для типа (3). □

Используя образующие $Y^{(i)}$ в качестве элементов $X^{(i)}$, введённых в §3, получаем искомое описание структуры кольца когомологий Хохшильда.

Список литературы

1. C. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv., 1980, v. 55, 199–224.
2. K. Erdmann, T. Holm, *Twisted bimodules и Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* — Forum Math., 1999, v. 11, 177–201.
3. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **321** (2005), 36–66.
4. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **330** (2006), 173–200.

5. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 210–246.
6. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **343** (2007), 121–182.
7. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **365** (2009), 63–121.
8. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. III. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **386** (2011), 100–128.
9. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 48–99.
10. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 100–118.
11. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. V. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **394** (2011), 140–173.
12. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебр типа* E_6. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **423** (2014), 205–243.
13. D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras.* — Lect. Notes Math., 1989, 1404, 108–126.
14. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 61–70.
15. M. Kachalova, *Hochschild cohomology ring for self-injective algebras of tree class* E_6. II. — https://arxiv.org/abs/1810.03950

Kachalova M. A. Hochschild cohomology ring for self-injective algebras of tree class E_6. II.

In the second part we describe in terms of generators and relations the Hochschild cohomology ring for self-injective algebras of finite representation type which have the tree class E_6.

ООО Яндекс.Технологии,
ул. Льва Толстого 16,
119021 Москва, Россия
E-mail: mashakachalova@mail.ru

Поступило 4 февраля 2019 г.