Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 478, 2019 г.

Е. А. Егорченкова

ВЕРБАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ НАД БЕСКОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Введение

Пусть $w \in F_n$ – нетривиальное слово от n переменных и пусть G – группа. Тогда вербальное отображение

$$\widetilde{w} : G^n \to G$$

определяется формулой $\widetilde{w}((g_1, \dots, g_n)) = w(g_1, \dots, g_n)$. Исследование вербальных отображений довольно популярно в последние 10–15 лет, особенно в случае, когда $G = \mathcal{G}(K)$ – группа K-точек простой (или полупростой) алгебраической группы $\mathcal{G}$, определенной над полем K (см. ссылки, например, в [10–13]). Одним из основных вопросов здесь является описание образа $\operatorname{Im} \widetilde{w}$ отображения $\widetilde{w}$ и, в особенности, указание случаев, когда это отображение сюръективно. Отправной точкой этого исследования является теорема Бореля [1]:
вербальное отображение $\widetilde{w} : \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}$ простой алгебраической группы $\mathcal{G}$ доминантно.
В частности, отсюда следует, что $\operatorname{Im} \widetilde{w} = \mathcal{G}$, если $w = w_1 w_2$, где $w_1 \in F_k, w_2 \in F_l, k + l = n$ – произведение двух слов от независимых переменных (действительно, так как $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2$ – доминантные вербальные отображения, их образы содержат непустые открытые подмножества $X_1 \subset \operatorname{Im} \widetilde{w}_1,\ X_2 \subset \operatorname{Im} \widetilde{w}_2$ и, следовательно, $\operatorname{Im} \widetilde{w} = \operatorname{Im} \widetilde{w}_1 \operatorname{Im} \widetilde{w}_2 \supset X_1 X_2 = \mathcal{G}$; см. [2, I, §1, предложение 1.3]). В случае, когда K не является алгебраически замкнутым, мы не можем гарантировать, что $\operatorname{Im} \widetilde{w}_1 \operatorname{Im} \widetilde{w}_2 = \mathcal{G}(K)$. Поэтому мы рассматриваем *w-ширину* $G = \mathcal{G}(K)$, а именно, такое минимальное число $k \in \mathbb{N}$, что $\operatorname{Im} \widetilde{w} = G$ для всех $w = w_1 w_2 \cdots w_l$, являющихся произведением независимых нетривиальных слов $w_1, \dots, w_l$, где $l \geqslant k$. Важный результат в этом направлении

Ключевые слова: вербальные отображения, группы Шевалле, простые алгебраические групы.

Исследование проводились при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 19-01-00297.)

был получен в [15] для случая, когда $\mathcal{G}$ – простая односвязная алгебраическая группа, определенная и расщепимая над бесконечным полем. Было доказано, что

любой нецентральный элемент G принадлежит $\operatorname{Im}\widetilde{w}$, *где* $w = w_1 w_2 w_3 w_4$ *– произведение четырех нетривиальных слов с независимыми переменными*

(так как элемент из центра можно представить как произведение двух нецентральных элементов, этот результат подразумевает, что w-ширина $G \leqslant 8$). Также, в [15] было доказано, что

любой нецентральный элемент $G = \mathrm{SL}_m(K)$ (*при* $m \geqslant 3$) *принадлежит* $\operatorname{Im}\widetilde{w}$, *где* $w = w_1 w_2 w_3$ *– произведение трех нетривиальных слов с независимыми переменными*

и

если $K = \mathbb{R}$ *– поле вещественных чисел или локальное поле, то любой нецентральный элемент* $G = \mathcal{G}(K)$ *принадлежит* $\operatorname{Im}\widetilde{w}$, *где* $w = w_1 w_2$ *– произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными.*

В [6] результат из [15] был улучшен. А именно, было доказано, что если $\mathcal{G}$ – простая односвязная алгебраическая группа, определенная и расщепимая над бесконечным полем K, и $\mathcal{G}$ не является группой типов B_2, G_2, то

любой нецентральный элемент $g \in G = \mathcal{G}(K)$ *принадлежит образу* $\operatorname{Im}\widetilde{w}$ *вербального отображения* $\widetilde{w}$, *если* $w = w_1 w_2 w_3$, *где* w_1, w_2, w_3 *– нетривиальные слова с независимыми переменными.*

В этой статье мы рассматриваем группы $\mathcal{G}$ типов B_2, G_2, определенные и расщепимые над бесконечным полем K. Для расщепимой группы $\mathcal{G}$ имеется разложение Брюа

$$\mathcal{G} = \bigcup_{w \in W} \mathcal{B}\mathfrak{n}_w\mathcal{B},$$

где $\mathcal{B}$ – K-определенная подгруппа Бореля группы $\mathcal{G}$ и $\mathfrak{n}_w$ – фиксированный прообраз элемента w группы Вейля W в $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ – нормализаторе соответствующего максимального K-расщепимого тора из $\mathcal{G}$. Положим $\mathfrak{n}_0 := n_{w_0}$, где w_0 – элемент максимальной длины группы Вейля. Большая клетка $\mathcal{B}\,\mathfrak{n}_0\,\mathcal{B}$ – это открытое по Зарисскому подмножество $\mathcal{G}$, и другие клетки Брюа лежат в замыкании большой клетки (некоторые вопросы, касающиеся больших клеток, см. например, в [14]). Также у нас есть разложение Брюа группы Шевалле $G = \mathcal{G}(K)$:

$$G = \bigcup_{w \in W} B\, \mathfrak{n}_w\, B,$$

где $B = \mathcal{B}(K)$ и $\mathfrak{n}_w$ – фиксированный прообраз элемента группы Вейля в $N_G(T)$ – нормализаторе $T = \mathcal{T}(K)$ (в частности, мы предполагаем ниже $\mathfrak{n}_0 \in N_G(T)$). Основным результатом статьи является следующая теорема (теорема 16 ниже).

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{G}$ – группа типов B_2 или G_2. Тогда*

$$B\, \mathfrak{n}_0\, B \subset \operatorname{Im} \widetilde{w},$$

где $w = w_1 w_2 w_3$ – произведение трех нетривиальных слов с независимыми переменными.

В этой статье мы также исследуем вопрос, когда некоторые классы "больших элементов" принадлежат образу вербального отображения $\widetilde{w}$, где $w = w_1 w_2$ – произведение двух слов с независимыми переменными.

Напомним, что элемент $g \in G$ называется *расщепимым* над K, если g сопряжен с некоторым элементом из B. В частности, любой расщепимый полупростой элемент сопряжен с элементом из группы T.

Здесь мы доказываем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $w = w_1 w_2$ – произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными. Тогда*

i. *любой регулярный расщепимый полупростой элемент из G принадлежит $\operatorname{Im} \widetilde{w}$, если G – группа типов A_r, C_r, G_2 или K – совершенное поле, у которого $\dim K \leqslant 1$;*

ii. *любой регулярный унипотентный элемент из G принадлежит $\operatorname{Im} \widetilde{w}$, если G – группа типа A_r или K – совершенное поле, характеристика которого не является плохим простым числом для G и $\dim K \leqslant 1$.*

(Здесь $\dim K$ – когомологическая размерность K; см. [18].) Ниже мы разделим теорему 2 на две части: теорема 7 и теорема 10.

Для групп над полями характеристики ноль мы получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть K – поле характеристики ноль, а $\mathcal{H}$ – простая алгебраическая группа, определенная над полем K. Предположим, что $\mathcal{H}$ – изотропная (но необязательно расщепимая) группа над полем K. Пусть, далее, $H = \mathcal{H}(K)$ и $w = w_1 w_2 \in F_n$ – произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными. Тогда любой унипотентный элемент поля K лежит в образе вербального отображения $\widetilde{w} : H^n \to H$.*

Обозначения и терминология.

Здесь мы используем следующие обозначения.

$\mathcal{G}$ – простая односвязная алгебраическая группа, определенная и расщепимая над бесконечным полем K и $G = \mathcal{G}(K)$;

$\operatorname{char} K$ – характеристика K;

R – система корней, соответствующая $\mathcal{G}$ (здесь мы нумеруем корни в соответствии с [3]);

$\mathcal{T}$ – фиксированный максимальный тор $\mathcal{G}$ и $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ – его нормализатор в $\mathcal{G}$;

$T = \mathcal{T}(K)$ и $N_G(T)$ – нормализатор подгруппы T в G;

$\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})/\mathcal{T} = W \approx W(R)$, где $W(R)$ – группа Вейля системы корней (так как K – бесконечное поле, $N_G(T)/T \approx W$);

$\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{U}$ – фиксированная K-подгруппа Бореля, соответствующая $\mathcal{T}$, и $\mathcal{U}$ – унипотентный радикал $\mathcal{B}$;

для $\alpha \in R$ мы обозначим соответствующую корневую подгруппу $\mathcal{X}_\alpha \leqslant U$;

$B = \mathcal{B}(K), U = \mathcal{U}(K), X_\alpha = \mathcal{X}_\alpha(K)$.

Здесь мы рассматриваем топологию Зарисского на $\mathcal{G}$ и, следовательно, “открытое множество” и “замкнутое множество” означает открытое и замкнутое множество по Зарисскому.

Мы отождествляем $\mathcal{G}$ с группой $\mathcal{G}(\overline{K})$, где $\overline{K}$ – алгебраическое замыкание K.

Элемент $g \in G$ называется регулярным, если он регулярен в $\mathcal{G}$.

Для слова w мы будем обозначать через $\widetilde{w}$ вербальное отображение $\widetilde{w} : \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}$, а также $\widetilde{w} : G^n \to G$.

§1. Регулярные классы сопряженных элементов группы G

1.1. Сечение регулярных классов сопряженных элементов простой односвязной алгебраической группы.

Пусть $R = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_r \rangle$ – фиксированная система корней, соответствующая $\mathcal{T}$. Для корня $\alpha \in R$ обозначим через w_α отражение из группы Вейля W, соответствующее α. Для корня α обозначим через $\mathfrak{n}_\alpha$ любой элемент из $\mathcal{N}_\mathcal{G}(\mathcal{T})$, соответствующий отражению $w_\alpha \in W$.

Напомним, что элемент Кокстера $w_c \in W$ – это произведение

$$w_c = \prod_{i=1}^{r} w_{\alpha_i} = w_{\alpha_{i_1}} w_{\alpha_{i_2}} \cdots w_{\alpha_{i_r}}. \tag{1}$$

Произведение в (1) может быть взято в любом порядке (см. [3, VI, §1]). Мы обозначаем через $\mathfrak{n}_c = \prod\limits_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\alpha_i}$ и также называем элемент $\mathfrak{n}_c$ элементом Кокстера группы $\mathcal{N}_\mathcal{G}(\mathcal{T})$. Мы можем и будем далее полагать, что $\mathfrak{n}_{\alpha_i}, \mathfrak{n}_c \in N_G(T)$, и будем также называть $\mathfrak{n}_c$ элементом Кокстера группы $N_G(T)$.

Заметим, что для любого $t \in \mathcal{T}$ (соответственно, $t \in T$) элемент $t\mathfrak{n}_c$ также является элементом Кокстера из $\mathcal{N}_\mathcal{G}(\mathcal{T})$ (соответственно, $N_G(T)$).

Для любого фиксированного элемента Кокстера $\mathfrak{n}_c$ обозначим

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c} = \mathcal{X}_{\beta_1} \mathcal{X}_{\beta_2} \cdots \mathcal{X}_{\beta_r}, \tag{2}$$

где

$$\beta_k = w_{\alpha_{i_r}} w_{\alpha_{i_{r-1}}} \cdots w_{\alpha_{i_{k+1}}}(\alpha_k)$$

(напомним, что β_k – положительные корни; см. [3, VI, §1, предложение 33]). Тогда множество

$$\mathfrak{n}_c \mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c}$$

является сечением регулярных классов сопряженности из $\mathcal{G}$ (см. [18]), то есть, любой класс сопряженных регулярных элементов $\mathcal{C}$ из $\mathcal{G}$ пересекается с $\mathfrak{n}_c \mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c}$ только в одной точке. Любая перестановка отражений w_{α_i} в (1) также дает нам элемент Кокстера из W. Поэтому, если мы зафиксируем элемент Кокстера w_c, то w_c^{-1} также будет элементом Кокстера из W (так как w_c^{-1} – произведение отражений w_{α_i} в обратном порядке). Также, если мы зафиксируем элемент Кокстера $\mathfrak{n}_c \in N_G(T)$, то любой элемент вида $t\mathfrak{n}_c$ или $t\mathfrak{n}_c^{-1}$ – элемент Кокстера для любого $t \in T$ и, следовательно, множества $t\mathfrak{n}_c \mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c}$, $t\mathfrak{n}_c^{-1} \mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c^{-1}}$ также являются сечениями регулярных классов сопряженности из $\mathcal{G}$.

1.2. Подмножества $\mathfrak{n}_c M_{\mathfrak{n}_c}$ группы G.

Отметим, что множество $\mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c}$ в (2) – замкнутая K-определенная подгруппа $\mathcal{G}$ и, следовательно, $\mathfrak{n}_c\mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c}$ – замкнутое K-определенное множество $\mathcal{G}$. Более того,

$$\mathfrak{n}_c M_{\mathfrak{n}_c} := \mathfrak{n}_c\mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c}(K) = \mathfrak{n}_c X_{\beta_1} X_{\beta_2} \cdots X_{\beta_r}.$$

Ниже мы используем следующий результат.

Предложение 4. *Пусть $S_1, S_2 \subset G$ – два G-инвариантных подмножества относительно действия группы G на G сопряжениями. Предположим, что*

$$S_1 \cap \mathfrak{n}_c M_{\mathfrak{n}_c} \neq \emptyset,\ \ S_2 \cap \mathfrak{n}_c M_{\mathfrak{n}_c} \neq \emptyset \tag{$*$}$$

для любого элемента Коксafтера $\mathfrak{n}_c \in N_G(T)$. Тогда множество S_1S_2 содержит все регулярные расщепимые полупростые элементы группы G.

Доказательство. Пусть $t \in T$. Так как $t\mathfrak{n}_c^{-1}$ – также элемент Коксafтера из $N_G(T)$, условие $(*)$ подразумевает, что существуют элементы

$$g_1 = t\mathfrak{n}_c^{-1}u_1 \in S_1, \quad g_2 = \mathfrak{n}_c u_2 \in S_2 \quad \text{для некоторых} \quad u_1, u_2 \in U.$$

Так как S_1, S_2 – G-инвариантные множества, имеем $g_1' = u_1 t\mathfrak{n}_c^{-1} \in S_1$ и, следовательно,

$$g_1'g_2 = (u_1 t\mathfrak{n}_c^{-1})(\mathfrak{n}_c u_2) = t\,\underbrace{(t^{-1}u_1 t)u_2}_{:=u\in U} = tu \in S_1S_2. \tag{3}$$

Далее, если t – регулярный элемент из T, мы можем найти такой элемент $v \in U$, что $vtv^{-1} = tu$ (см., например, [7]). Таким образом из (3) следует, что $t = v^{-1}(tu)v \in S_1S_2$. $\square$

1.3. Специальные элементы Коксafтера.

Пусть $U^* = \langle X_\alpha \mid \alpha \in R^+,\ \ ht(\alpha) > 1\rangle$ (здесь $ht(\alpha)$ – высота α в соответствии с системой простых корней). Тогда $U = X_{\alpha_1}X_{\alpha_2}\cdots X_{\alpha_r}U^*$. Следовательно, любой элемент $u \in U$ можно представить в виде

$$u = u_1u_2\cdots u_r u^*, \ \text{ где } \ u_i \in X_{\alpha_i}, u^* \in U^*. \tag{4}$$

Пусть $u_i \in X_{\alpha_i}, u' \in U$ – фиксированные элементы и пусть $R \neq A_1$, A_2. Тогда существует такой элемент Коксafтера $w_c \in W$, что для любого его прообраза $\mathfrak{n}_c \in N_G(T)$ и любого $u' \in U$ существует элемент $v \in U$, удовлетворяющий равенству

$$[u'\mathfrak{n}_c, v] = u_1u_2\cdots u_r u^* \tag{5}$$

для некоторого $u^* \in U^*$ (см. [9, теорема 2.1]). Мы будем называть такой элемент Кокстера $w_c \in W$ и любой его прообраз $\mathfrak{n}_c \in N_G(T)$ *специальным элементом Кокстера.* Нам понадобится следующая разновидность формулы (5).

Предложение 5. *Пусть $R \neq A_1, A_2$, и пусть $\mathfrak{n}_c$ – специальный элемент Кокстера. Далее, пусть $u', u'' \in U$, $u_i \in X_{\alpha_i}$ – фиксированные элементы. Тогда существуют такие элементы $v \in U, u^* \in U^*$, что*

$$(u'\mathfrak{n}_c)(v\mathfrak{n}_c^{-1}u''v^{-1}) = u_1u_2\cdots u_ru^*.$$

Доказательство. Положим $y = u'u''$. Тогда

$$y \equiv y_1y_2\cdots y_r (\operatorname{mod} U^*) \quad \text{для некоторых} \quad y_i \in X_{\alpha_i}. \tag{6}$$

Тогда из (5) мы можем найти такие элементы $v \in U, u^{*\prime} \in U^*$, что

$$[u'\mathfrak{n}_c, v] = (u_1y_1^{-1})(u_2y_2^{-1})\cdots(u_ry_r^{-1})u^{*\prime}. \tag{7}$$

Далее

$$\begin{aligned}(u'\mathfrak{n}_c)v(\mathfrak{n}_c^{-1}u'')v^{-1} &= \underbrace{(u'\mathfrak{n}_c)v(\mathfrak{n}_c^{-1}u'^{-1})v^{-1}}_{=[u'\mathfrak{n}_c,v]}(v\underbrace{u'u''}_{=y}v^{-1})\\ &\overset{(7)}{=} (u_1y_1^{-1})(u_2y_2^{-1})\cdots(u_ry_r^{-1})u^{*\prime}(\underbrace{vyv^{-1}}_{\equiv y \mod U^*})\\ &\overset{(6)}{=} u_1u_2\cdots u_ru^* \text{для некоторого} \quad u^* \in U^*. \qquad \square\end{aligned}$$

1.4. Регулярные полупростые элементы, лежащие в образе вербального отображения.

Решающим моментом в доказательстве теоремы [15], упомянутой во введении, является существование регулярных полупростых элементов в образах любого вербального отображения в случае бесконечного поля K. Здесь мы воспользуемся следующим фактом.

Предложение 6. *Пусть $\widetilde{w} : G^n \to G$ – нетривиальное вербальное отображение. Тогда можно найти бесконечное множество регулярных полупростых элементов, содержащихся в множестве*

$$\operatorname{Im} \widetilde{w} \cap B\,\mathfrak{n}_0\,B.$$

Доказательство. Множество $\widetilde{w}(\mathcal{G})$ содержит открытое непустое подмножество $\mathcal{O} \subset \mathcal{G}$ в соответствии с теоремой А. Бореля ([1]). Множество $\mathcal{B}\mathfrak{n}_0\mathcal{B}$ также открыто и непусто в $\mathcal{G}$ (см. [17, 8.3.11]). Следовательно, $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap B\mathfrak{n}_0\mathcal{B}$ – также открытое непустое подмножество $\mathcal{G}$. Далее, множество $\mathcal{S}_r$ полупростых регулярных элементов, содержащихся в группе $\mathcal{G}$, содержит открытое непустое подмножество O'' ([2, 12.1, 12.3]). Таким образом множество $\mathcal{O}''' = \mathcal{O}' \cap \mathcal{O}''$ открыто и не пусто в $\mathcal{G}$. Множество G плотно в $\mathcal{G}$ ([2, 18.3]), и, следовательно, множество $G \cap \mathcal{O}'''$ бесконечно и любой его элемент является регулярным и полупростым в G и также принадлежит пересечению $\operatorname{Im} \widetilde{w} \cap B\mathfrak{n}_0 B$ (так как $G \cap \mathcal{B}\mathfrak{n}_0\mathcal{B} = B\mathfrak{n}_0 B$). □

§2. Произведение двух независимых вербальных отображений G

Пусть $\widetilde{w}_1 : G^k \to G, \widetilde{w}_2 : G^l \to G$ – два вербальных отображения с независимыми переменными, где $k+l = n$ и пусть $\widetilde{w} = \widetilde{w_1 w_2} : G^n \to G$ – вербальное отображение, соответствующее произведению $w_1 w_2$. Тогда

$$\operatorname{Im} \widetilde{w} = \operatorname{Im} \widetilde{w}_1 \operatorname{Im} \widetilde{w}_2.$$

2.1. Регулярные расщепимые полупростые элементы.

В [15] было доказано, что в образе вербального отображения $\operatorname{Im} \widetilde{w} = \operatorname{Im} \widetilde{w}_1 \operatorname{Im} \widetilde{w}_2$ можно найти регулярные расщепимые элементы из G. Тогда разложение Гаусса с заданной полупростой частью (см. [5,7]) дает нам результат, упомянутый во введении: любой нецентральный элемент из G принадлежит образу вербального отображения, соответствующего произведению четырех независимых слов.

Здесь мы докажем следующий результат.

Теорема 7. *Пусть выполнено одно из условий:*

a. $R = A_r,\ B_2(= C_2),\ C_r,\ r > 2,\ G_2$;

b. K *– совершенное поле и* $\dim K < 1$.

Тогда для любого регулярного элемента $t \in T$

$$tU \subset \operatorname{Im} \widetilde{w}.$$

Доказательство. У нас есть регулярные полупростые элементы:

$$g_1 \in \operatorname{Im} \widetilde{w}_1, g_2 \in \operatorname{Im} \widetilde{w}_2 \tag{8}$$

(см. предложение 6).

a. Случай 1. $R = A_r$. Здесь $G = \mathrm{SL}_{r+1}(K)$. Пусть S_1, S_2 – классы подобия g_1, g_2. Так как образ любого вербального отображения $\mathrm{Aut}(G)$-инвариантен (здесь $\mathrm{Aut}(G)$ – группа автоморфизмов G; см. [12, 1.1]), имеем $S_1 \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1, S_2 \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2$. Следовательно,

$$S_1 S_2 \subset \mathrm{Im}\,\widetilde{w}.$$

Заметим, что класс подобия регулярных элементов пересекается с множеством $\mathfrak{n}_c M_{\mathfrak{n}_c}$ для любого элемента Коксетера $\mathfrak{n}_c \in N_G(T)$. Это следует из теории рациональных форм линейного оператора. Таким образом получаем условие $(*)$ предложения 4, и, следовательно, множество $S_1 S_2 \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ содержит все регулярные расщепимые полупростые элементы из G. Далее, если $t \in T$ – регулярный полупростой элемент, то для любого $u \in U$ существует такой элемент $v \in U$, что $[t^{-1}, v] = u$ (см. [7]). Таким образом,

$$vtv^{-1} = t(t^{-1}vtv^{-1}) = t[t^{-1}, v] = tu \in \mathrm{Im}\,\widetilde{w}.$$

Случай 2. $R = C_r, r \geqslant 2$. Здесь $R = \langle \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, 2\epsilon_r \rangle$ в обозначениях [3]. Для корня $\alpha \in R$ и $s \in K^*$ символом $h_\alpha(s)$ будем обозначать соответствующий корневой элемент группы T (см. [19, лемма 19]).

Лемма 8.

$$T = \langle h_{2\epsilon_1}(s_1), h_{2\epsilon_2}(s_2), \dots, h_{2\epsilon_r}(s_r) \ \mid\ s_1, \dots, s_r \in K^* \rangle.$$

Доказательство. Так как группа $\mathcal{G}$ односвязна, то

$$T = \langle h_{\epsilon_1 - \epsilon_2}(l_1), \dots, h_{\epsilon_{r-1} - \epsilon_r}(l_{r-1}), h_{2\epsilon_r}(l_r) \ \mid\ l_1, \dots, l_r \in K^* \rangle$$

(см. [19, лемма 28].)

Следовательно, достаточно показать, что $h_{\epsilon_1 - \epsilon_2}(s) = h_{2\epsilon_1}(s) h_{2\epsilon_2}(s^{-1})$. Легко проверить, что для фундаментальных весов $\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2$ действия $h_{\epsilon_1 - \epsilon_2}(s)$ и $h_{2\epsilon_1}(s) h_{2\epsilon_2}(s^{-1})$ на соответствующие весовые векторы одинаковы (см. [19, лемма 19.c.]) и, следовательно, эти операторы эквивалентны для любого линейного представления. Таким образом получаем утверждение леммы. □

Далее, пусть $\Gamma_i = \langle X_{\pm 2\epsilon_i} \rangle$. Так как $\mathcal{G}$ – односвязная группа, а $2\epsilon_r$ – корень из системы простых корней, группа $\langle \mathcal{X}_{\pm 2\epsilon_r} \rangle$ также односвязна (см. [19, лемма 28]). Тогда $\Gamma_r \approx \mathrm{SL}_2(K)$ и, следовательно, $\Gamma_i \approx \mathrm{SL}_2(K)$ для любого i, потому что все группы Γ_i сопряжены в G. Из того, что любая группа Γ_j коммутирует с любой группой Γ_i (при $j \neq i$) имеем естественный гомоморфизм

$$\phi : \Gamma := \prod_{i=1}^{r} \Gamma_i \to G.$$

Легко проверить (см. [19], лемма 28), что ограничение ϕ на центр Γ является мономорфизмом. Таким образом, ϕ – мономорфизм. Следовательно, отождествляя $\phi(\Gamma) := \Gamma$, мы получаем

$$\Gamma = \prod_{i=1}^{n} \Gamma_i \leqslant G.$$

Пусть $T_i := \langle h_{2\epsilon_i}(s) \mid s \in K^* \rangle$. Тогда $T = \prod_{i=1}^{n} T_i$ по лемме 8 и любой регулярный элемент $t \in T$ можно представить в виде произведения $\prod_{i=1}^{n} t_i$, где $t_i \in T_i$ – регулярный элемент из $\Gamma_i \approx \mathrm{SL}_2(K)$ (действительно, если какой-либо элемент t_i нерегулярен в Γ_i, то t_i и t коммутируют с унипотентными элементами из группы $X_{2\epsilon_i}$). Теперь, если мы рассмотрим ограничение $\widetilde{w}_1', \widetilde{w}_2'$ отображений $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2$ на Γ, мы получим, используя результат предыдущего случая, $t = \prod_{i=1}^{n} t_i \in \operatorname{Im} \widetilde{w}_1' \operatorname{Im} \widetilde{w}_2'$ и, следовательно, $t \in \operatorname{Im} \widetilde{w}_1 \operatorname{Im} \widetilde{w}_2$. Так как t – регулярный элемент из G, то $tU \subset \operatorname{Im} \widetilde{w}$.

Случай 3. $R = G_2$. Здесь $R = \langle \alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = -2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \rangle$ (см. [3]). Положим $\beta := -2\epsilon_2 + \epsilon_1 + \epsilon_3$.

Лемма 9.

$$T = \langle h_\beta(s_1), h_{\alpha_2}(s_2) \mid s_1, s_2 \in K^* \rangle.$$

Доказательство. Так как группа $\mathcal{G}$ односвязна, группа

$$T = \langle h_{\alpha_1}(l_1), h_{\alpha_2}(l_2) \mid l_1, l_2 \in K^* \rangle.$$

Тогда условие следует из равенства $h_{\alpha_1}(s) = h_\beta(s) h_{\alpha_2}(s^{-1})$, которое можно проверить прямым вычислением. $\square$

Положим $\Gamma := \langle X_{\pm\alpha_2}, X_{\pm\beta} \rangle$. Пусть $\mathrm{char} K \neq 3$, и пусть

$$z = h_\beta(\varsigma_3) h_{\alpha_2}(\varsigma_3^{-1}),$$

где $\varsigma_3 \in \overline{K}^*$ – фиксированный не единичный корень $\sqrt[3]{1}$, а $\overline{K}$ – алгебраическое замыкание K. Тогда $z \in Z(\langle \mathcal{X}_{\pm\alpha_2}, \mathcal{X}_{\pm\beta} \rangle)$ и $z \neq 1$ (это следует из прямого вычисления действия z – сопряжения на $\mathcal{X}_{\alpha_1}, \mathcal{X}_{\beta}, \mathcal{X}_{\alpha_2}$). Поэтому $\langle \mathcal{X}_{\pm\alpha_2}, \mathcal{X}_{\pm\beta} \rangle$ – односвязная группа, а значит, $\Gamma \approx \mathrm{SL}_3(K)$. Из того, что $\Gamma \leqslant G$, мы можем рассмотреть ограничения $\widetilde{w}_1', \widetilde{w}_2'$ отображений $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2$ на Γ и воспользоваться случаем, когда $G = \mathrm{SL}_m(K)$. Так мы можем получить любой регулярный элемент $t \in T$ в $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ (лемма 9) и, следовательно, $tU \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}$.

b. При условии b. на поле K пересечение $\mathcal{C} \cap G$ любого полупростого класса сопряженности $\mathcal{C}$ из $\mathcal{G}$ – это единственный класс сопряженности в G (см. [18, 10.3]), и, следовательно, полупростые регулярные классы сопряженности из G пересекаются с множествами $\mathfrak{n}_c M_{\mathfrak{n}_c}$ для любого элемента Кокстера $\mathfrak{n}_c \in N_G(T)$. Пусть S_1, S_2 – классы сопряженности регулярных полупростых элементов $g_1 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1, g_2 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2$. Таким образом мы получаем условие $(*)$ предложения 4 для S_1, S_2 и, следовательно, $t \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ для любого регулярного полупростого элемента $t \in T$. Тогда, $tU \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}$. □

2.2. Регулярные унипотентные элементы.

Теорема 10. *Положим $R = A_r$ или K – такое совершенное поле, что $p = \mathrm{char}\, K$ не является плохим простым числом для R и $\dim K < 1$. Тогда*

$$g \in \mathrm{Im}\, \widetilde{w}$$

для любого регулярного унипотентного элемента $g \in G$.

Доказательство. Пусть $R \neq A_1, A_2$. Можно найти такие элементы $g_1 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1, g_2 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2$, что

$$g_1 = u'\mathfrak{n}_c,\ g_2 = \mathfrak{n}_c^{-1}u'' \quad \text{для некоторых} \quad u', u'' \in U, \tag{9}$$

где $\mathfrak{n}_c$ – специальный элемент Кокстера (действительно, в случае $R{=}A_r$ это следует из теории рациональных форм, а в остальных случаях мы можем воспользоваться тем же аргументом, что и в доказательстве теоремы 7). Пусть S_1, S_2 – классы подобия (в случае $R = A_r$) или сопряженности (в остальных случаях) g_1, g_2 в G.

Далее, пусть $u \in U$ – регулярный элемент. Тогда

$$u = u_1 u_2 \cdots u_r u^* \quad \text{для некоторых} \quad u_i \in U_{\alpha_i}, u_i \neq 1, u^* \in U^*. \tag{10}$$

По предложению 5 и (9), (10) получаем

$$g_1 v g_2 v^{-1} \equiv u_1 u_2 \cdots u_r \bmod U^* \quad \text{для некоторого} \quad v \in U. \tag{11}$$

Так как $u_i \neq 1$ для любого i, элемент $g_1 v g_2 v^{-1} \in U$ является регулярным унипотентным элементом. Из (11) следует, что существует такой элемент $\widetilde{u} \in U$, для которого

$$\widetilde{u}(g_1 v g_2 v^{-1})\widetilde{u}^{-1} = u. \tag{12}$$

Действительно, (12) легко проверяется для случая $G = \mathrm{SL}_n(K)$. Для случая, когда K – совершенное поле, у которого $\operatorname{char} K$ не является плохим простым числом для R и $\dim K < 1$, это доказано в [9, лемма 1.2].

Следовательно,

$$u \in (\underbrace{\widetilde{u} g_1 \widetilde{u}^{-1}}_{\in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1})(\underbrace{\widetilde{u} v g_2 v^{-1} \widetilde{u}^{-1}}_{\in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2}) \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1 \,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2 = \mathrm{Im}\ \widetilde{w}.$$

Если $R = A_r$, то любые регулярные унипотентные элементы находятся в одном и том же классе подобия из G и, следовательно, любой регулярный унипотентный элемент принадлежит $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$. В случаях, когда $R \neq A_r$, результат теоремы следует из следующего факта.

Лемма 11. *Пусть K – такое совершенное поле, что $p = \operatorname{char} K$ не является плохим простым числом для R и $\dim K < 1$. Тогда для любых двух регулярных унипотентных элементов $u, u' \in G$ существует такой автоморфизм $f \in \mathrm{Aut}(G)$, что $f(u) = u'$.*

Доказательство. При условии на поле получаем, что

$$t\gamma u \gamma^{-1} t^{-1} = u' \text{ для некоторых } \gamma \in G \text{ и } t \in \mathcal{T} \tag{13}$$

([8], лемма 4.4). Пусть $\mathcal{G}_{\mathrm{ad}}$ – присоединенная группа, соответствующая группе $\mathcal{G}$, и пусть $\theta : \mathcal{G} \to \mathcal{G}_{\mathrm{ad}}$ – естественный морфизм. Мы можем так выбрать элемент t в (13), что

$$\theta(t) \in \mathcal{G}_{\mathrm{ad}}(K) \tag{14}$$

(см. доказательство леммы 4.4 в [8]). Заметим, что для любого $\alpha \in R$ образ $\theta(X_\alpha)$ – это соответствующая корневая подгруппа $\mathcal{G}_{\mathrm{ad}}(K)$ и, следовательно,

$$\theta(t)\theta(X_\alpha)\theta(t^{-1}) = \theta(X_\alpha)$$

ввиду (14). Таким образом,

$$tX_\alpha t^{-1} \equiv X_\alpha (\operatorname{mod} Z(\mathcal{G})).$$

Но элементы из групп X_α и $tX_\alpha t^{-1}$ унипотентны. Следовательно,

$$tX_\alpha t^{-1} = X_\alpha.$$

Таким образом, элемент $t \in \mathcal{T}$ стабилизирует любую корневую подгруппу X_α из G и, следовательно, сопряжение t индуцирует автоморфизм на G. $\square$

Пусть $R = A_1$. Тогда $G = \mathrm{SL}_2(K)$. Так как образ вербального отображения инвариантен относительно любого автоморфизма группы, на которой оно определено, мы можем положить

$$g_1 = \begin{pmatrix} a & -s_1 \\ s_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1,\ g_2 = \begin{pmatrix} 0 & s_2^{-1} \\ -s_2 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2, \tag{15}$$

где $a = tr\, g_1$, $b = tr\, g_2$ и $s_1, s_2 \in K^*$. Более того, в (15) мы можем взять любую пару $s_1, s_2 \in K^*$, так как класс подобия нецентрального элемента из $\mathrm{SL}_2(K)$ определяется его следом. В частности, мы можем взять $s_1 = s_2 = 1$. Тогда из (15) получаем

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1 \,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2. \tag{16}$$

Так как у нас бесконечное число классов подобия в $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_i$ (потому что K – бесконечное поле), мы можем считать, что $a - b \neq 0$ в (16) (действительно, мы можем зафиксировать элемент $g_1 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1$ и изменить класс подобия $g_2 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2$). Таким образом получаем нетривиальный унипотентный элемент в $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1 \,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2$. Так как все нетривиальные унипотентные элементы из $\mathrm{SL}_2(K)$ принадлежат одному и тому же классу подобия, мы получаем утверждение теоремы.

Пусть $R = \langle \alpha = \epsilon_1 - \epsilon_2, \beta = \epsilon_2 - \epsilon_3 \rangle = A_2$. Тогда $G = \mathrm{SL}_3(K)$ и мы можем взять следующие рациональные формы элементов $g_1 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1$, $g_2 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2$:

$$g_1 \in \mathfrak{n}_{w_\beta} \mathfrak{n}_{w_\alpha} X_\alpha X_{w_\alpha(\beta)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_\alpha X_{\alpha+\beta},$$

$$g_2 \in \mathfrak{n}_{w_\alpha} \mathfrak{n}_{w_\beta} X_\beta X_{w_\beta(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_\beta X_{\alpha+\beta}.$$

Следовательно,

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы можем считать $a_1, b_1 \neq 0$. Действительно, для элементов Кокстера

$$\mathfrak{n}_c = \mathfrak{n}_{w_\alpha}\mathfrak{n}_{w_\beta}, \quad \mathfrak{n}'_c = \mathfrak{n}_{w_\beta}\mathfrak{n}_{w_\alpha}$$

множества $\mathfrak{n}_c\mathrm{M}_{\mathfrak{n}_c}, \mathfrak{n}'_c\mathrm{M}_{\mathfrak{n}'_c}$ – сечения регулярных элементов из $\mathcal{G}$. Поэтому замыкания множеств Υ_1, Υ_2 всех регулярных классов, пересекающихся с множествами $\mathfrak{n}_c\mathcal{X}_{\alpha+\beta}, \mathfrak{n}'_c\mathcal{X}_{\alpha+\beta}$ соответственно, являются собственными замкнутыми подмножествами $\mathcal{G}$. Следовательно, среди регулярных классов подобия $\mathcal{G}(K) = G$ можно найти такой класс подобия C_1, что $C_1 \cap \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1 \neq \varnothing$ и $C_1 \cap \mathfrak{n}_c\mathcal{X}_{\alpha+\beta} = \varnothing$ и такой класс подобия C_2, что $C_2 \cap \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2 \neq \varnothing$ и $C_2 \cap \mathfrak{n}'_c\mathcal{X}_{\alpha+\beta} = \varnothing$. Элементы $g_1 \in C_1$, $g_2 \in C_2$ – в точности те, для которых $a_1, b_1 \neq 0$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} g_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} g_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 + b_2 + a_1 b_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=u} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}.$$

Так как $a_1, b_1 \neq 0$, элемент u регулярен. Из того, что любой регулярный унипотентный элемент из $G = \mathrm{SL}_3(K)$ подобен элементу u, мы получаем наше утверждение. $\square$

Следствие 12. *Любой унипотентный элемент группы* $\mathrm{SL}_m(K)$ *содержится в* $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$.

Доказательство. Из теории нормальной Жордановой формы следует, что любой унипотентный элемент u подобен произведению $\prod_{i=1}^{d} u_i$, где u_i – регулярный унипотентный элемент подгруппы $\Gamma_i \approx \mathrm{SL}_{n_i}(K)$. При этом, все группы Γ_i коммутируют между собой, и следовательно, $\Gamma = \prod_{i=1}^{d} \Gamma_i$ – это подгруппа группы G. Ограничивая $\widetilde{w}$ на подгруппу Γ и применяя теорему 10, получаем $u \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}$. $\square$

2.3. Случай $\mathrm{char}\, K = 0$**.**

В случае, когда характеристика поля K равна нулю, используя теорему Морозова–Джекобсона, результат предыдущего следствия можно получить для более общего случая.

Теорема 13. *Пусть $\mathcal{H}$ – простая изотропная (но необязательно расщепимая) алгебраическая группа, определенная над полем K характеристики ноль, и пусть $H = \mathcal{H}(K)$. Пусть, далее, $\widetilde{w} : H^n \to H$ – вербальное отображение, где $w = w_1 w_2$ – произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными. Тогда любой унипотентный элемент группы H содержится в* $\operatorname{Im} \widetilde{w}$.

Доказательство. Следующая форма теоремы Морозова–Джекобсона хорошо известна, однако, поскольку мы затрудняемся указать точную ссылку именно на такую формулировку, мы приведем здесь доказательство данного утверждения.

Предложение 14. Морозов–Джекобсон. *Для любого унипотентного элемента $u \in H$ существует подгруппа $\Gamma \leqslant H$ такая, что $\Gamma \approx \mathrm{SL}_2(K)$ или $\Gamma \approx PSL_2(K)$ и $u \in \Gamma$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{H}$ – это K-определенная алгебраическая группа, то можно считать, что $\mathcal{H} \leqslant \mathrm{GL}_n(\overline{K})$ для некоторого n и $\mathcal{H}(K) = \mathcal{H} \cap \mathrm{GL}_n(K)$ (напомним, что мы отождествляем здесь алгебраические группы с группами точек над замыканиями полей определения). Вложение K-группы $\mathcal{H}$ в K-группу $\mathrm{GL}_n(\overline{K})$ индуцирует вложение алгебры Ли $L(\mathcal{H})$ группы $\mathcal{H}$ в алгебру Ли $L(\mathrm{GL}_n(\overline{K}))$. Таким образом, мы отождествляем алгебру $L(\mathcal{H})$ с подалгеброй Ли $\mathrm{M}_n(\overline{K})$. Алгебра

$$L_K(\mathcal{H}) := L(\mathcal{H})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} = L(\mathcal{H}) \cap \mathrm{M}_n(K)$$

является K-структурой алгебры $L(\mathcal{H})$ ([17], 11.1.6), а значит, $L(\mathcal{H}) \approx L_K(\mathcal{H}) \otimes_K \overline{K}$. Поэтому $L_K(\mathcal{H})$ – простая алгебра Ли над K (так как $L(\mathcal{H})$ – простая алгебра Ли).

Далее, любой унипотентный элемент группы $\mathcal{H}$ представляется в виде $\exp \nu$, где $\exp(\nu) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{\nu^i}{i!}$ и $\nu \in L(\mathcal{H}) \leqslant \mathrm{M}_n(\overline{K})$ – нильпотентный элемент. (Любой унипотентный элемент $u \in \mathcal{H}$ содержится в унипотентном радикале $R_u(\mathfrak{B})$ некоторой борелевской подгруппы $\mathfrak{B} \leqslant \mathcal{H}$. Поэтому u содержится в группе, порожденной корневыми элементами u_α, где α пробегает множество положительных корней, соответствующих $\mathfrak{B}$. При этом, $u_\alpha = \exp(\nu_\alpha)$ для подходящего корневого нильпотентного элемента $\nu_\alpha \in L(\mathcal{H})$ (см. [19, §4]). Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа для $R_u(\mathfrak{B})$, получаем, что и любой унипонетный элемент представим в виде $\exp \nu$.)

Далее, пусть $\mathcal{U} \subset \mathrm{GL}_n(\overline{K})$ – множество всех унипотентных матриц, а $\mathcal{N} \subset \mathrm{M}_n(\overline{K})$ – множество всех нильпотентных матриц, и пусть $\log : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$ – отображение, определенное формулой

$$\log(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(x-1)^i}{i}.$$

Пусть $\nu \in \mathcal{N}_{\mathrm{tr}}$, где $\mathcal{N}_{\mathrm{tr}}$ – множество всех верхних треугольных нильпотентных матриц. Тогда $\exp(\nu) \in \mathcal{U}_{\mathrm{tr}}$, где $\mathcal{U}_{\mathrm{tr}}$ – множество всех верхних унипотентных треугольных матриц. Поскольку отображения

$$\exp : \mathcal{N}_{\mathrm{tr}} \to \mathcal{U}_{\mathrm{tr}}, \quad \log : \mathcal{U}_{\mathrm{tr}} \to \mathcal{N}_{\mathrm{tr}}$$

биективны (см. [16, I, §7, теорема 2]), имеем $\nu = \log u$. Поскольку любой нильпотентный элемент $\mathrm{M}_n(\overline{K})$ сопряжен с некоторым элементом из $\mathcal{N}_{\mathrm{tr}}$, то для любого $\nu \in \mathcal{N}$ имеем $\log(\exp(\nu)) = \nu$. С другой стороны, $\exp(\log(v)) = v$ для любого $v \in \mathcal{U}$, а значит, отображения

$$\exp : \mathcal{N} \to \mathcal{U}, \quad \log : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$$

биективны.

Для унипотентного элемента $u \in \mathcal{H}(K)$ существует единственный нильпотентный элемент $\nu \in \mathcal{N}$ такой, что $\exp(\nu) = u$. Поскольку $\nu = \log(u) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(u-1)^i}{i}$, то $\nu \in \mathrm{M}_n(K)$. С другой стороны, как было показано выше, $u = \exp \nu'$ для некоторого $\nu' \in L(\mathcal{H})$. Ввиду единственности элемента ν, получаем $\nu = \nu' \in L(\mathcal{H}) \cap \mathrm{M}_n(K) = L_K(\mathcal{H})$. Из теоремы Морозова–Джекобсона (см. [4], §11) следует, что существует подалгебра Ли $\mathfrak{l}_3 \leqslant L_K(\mathcal{H})$, изоморфная алгебре $sl_2(K)$ и содержащая нильпотентный элемент ν. Тогда группа Γ, порожденная экспонентами нильпотентных элементов подалгебры $\mathfrak{l}_3$, содержит элемент u и содержится в группе $\mathcal{H}(K)$. Кроме того, группа, порожденная нильпотентными элементами трехмерной алгебры $\mathfrak{l}_3 \leqslant \mathrm{M}_n(K)$, изоморфна либо группе $\mathrm{SL}_2(K)$ либо $\mathrm{PSL}_2(K)$ (см. [19], §4). □

Теорема 13 теперь, очевидно, вытекает из следствия 12 и теоремы Морозова–Джекобсона. □

Замечание 15. *Теорему* 13*, по-видимому, можно распространить и на поля, характеристика которых достаточно велика для группы* $\mathcal{H}$*.*

§3. Группы типа B_2, G_2 (Теорема 1)

Пусть $\widetilde{w}_1 : G^k \to G$, $\widetilde{w}_2 : G^l \to G$, $\widetilde{w}_3 : G^q \to G$ – три вербальных отображения с независимыми переменными, где $k+l+q=n$, и пусть $\widetilde{w} = \widetilde{w_1 w_2 w_3} : G^n \to G$ – вербальное отображение, соответствующее произведению $w_1 w_2 w_3$. Тогда

$$\operatorname{Im}\widetilde{w} = \operatorname{Im}\widetilde{w}_1 \operatorname{Im}\widetilde{w}_2 \operatorname{Im}\widetilde{w}_3.$$

Теорема 16. *Пусть $\mathcal{G}$ – группа типов B_2 или G_2. Тогда*

$$B\mathfrak{n}_0 B \subset \operatorname{Im}\widetilde{w}_1 \operatorname{Im}\widetilde{w}_2 \operatorname{Im}\widetilde{w}_3.$$

Доказательство. Мы воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 17. *Для любых $a, b \in T$ существуют такие элементы $s, t \in T$, что*

$$at = bs^2$$

и t регулярен.

Доказательство. Для любого корня $\alpha \in R$ пусть $\alpha : \mathcal{T} \to \overline{K}^*$ – соответствующий характер и пусть $\mathcal{T}_\alpha = \operatorname{Ker}\alpha$. Тогда подмножество

$$\mathcal{T}_R = \bigcup_{\alpha \in R} \mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}$$

является собственным замкнутым подмножеством $\mathcal{T}$ и, следовательно, множество $\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_R$ – непустое открытое подмножество $\mathcal{T}$. Заметим, что $T = \mathcal{T}(K)$ – плотное подмножество $\mathcal{T}$ ([2], 18.3). Тогда множество T^2 также плотно в $\mathcal{T}$ (действительно, у нас есть непрерывная изогения $i^2 : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, где $i^2(x) = x^2$, и, следовательно, $i^2(T) = T^2$ плотно в $\mathcal{T}$). Таким образом $a^{-1}bT^2$ также плотно в $\mathcal{T}$. Тогда существует такой элемент $t = a^{-1}bs^2 \in a^{-1}bT^2$, что $t \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_R$, и, следовательно, t регулярен. Умножая t на a, получаем

$$at = bs^2. \qquad \square$$

Теперь мы можем доказать теорему. В случае $R = B_2, G_2$ элемент $w_0 \in W$ является произведением двух отражений $w_\alpha w_\beta$, которые соответствуют ортогональным корням таким, что $\alpha + \beta \notin R$. Для любого прообраза $\mathfrak{n}_0 \in N_G(T)$ имеем

$$\mathfrak{n}_0(t) = t^{-1} \quad \text{для любого} \quad t \in T. \tag{17}$$

Далее мы можем зафиксировать элемент $\mathfrak{n}_0$. По предложению 6 получаем, что

$$g_1 = \mathfrak{n}_0 a u_1 \in \operatorname{Im} \widetilde{w}_1 \quad \text{для некоторых} \quad u_1 \in U, a \in T. \tag{18}$$

Теперь пусть $g_0 \in B\mathfrak{n}_0 B$. Мы можем считать, что $g_0 = \mathfrak{n}_0 b u_0$ для некоторых $b \in T, u_0 \in U$. Пусть элементы $t, s \in T$ таковы, что элементы $a, b, s, t \in T$ удовлетворяют условию леммы 17. Так как

$$\begin{aligned} s^{-1} g_0 s &= s^{-1}(\mathfrak{n}_0 b u_0) s = s^{-1}(\mathfrak{n}_0) s b s^{-1} u_0 s \\ &= \mathfrak{n}_0 \underbrace{(\mathfrak{n}_0^{-1} s^{-1} \mathfrak{n}_0 s)}_{= s^2 \ (17)} b s^{-1} u_0 s = \mathfrak{n}_0 b s^2 (s^{-1} u_0 s), \end{aligned}$$

мы также можем считать $g_0 := \mathfrak{n}_0 b s^2 u_0$. По теореме 7, а. имеем

$$t u' \in \operatorname{Im} \widetilde{w}_2 \operatorname{Im} \widetilde{w}_3 \quad \text{для любого} \quad u' \in U. \tag{19}$$

Так как t – регулярный элемент, мы можем считать, что $u' = t^{-1} u_1^{-1} t u_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \underbrace{\operatorname{Im} \widetilde{w}_1}_{\ni g_1 \ (18)} \underbrace{\operatorname{Im} \widetilde{w}_2 \operatorname{Im} \widetilde{w}_3}_{\ni t u' \ (19)} \ni g_1 t u' &= (\mathfrak{n}_0 a u_1)(t t^{-1} u_1^{-1} t u_0) \\ &= \mathfrak{n}_0 \underbrace{at}_{:= bs^2} u_0 = \mathfrak{n}_0 b s^2 u_0 = g_0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B\mathfrak{n}_0 B \subset \operatorname{Im} \widetilde{w} = \operatorname{Im} \widetilde{w}_1 \operatorname{Im} \widetilde{w}_2 \operatorname{Im} \widetilde{w}_3. \qquad \square$$

Список литературы

1. A. Borel, *On free subgroups of semisimple groups.*— Enseign. Math. **29** (1983), 151–164.
2. A. Borel, *Linear Algebraic groups*, 2nd enl.ed., Graduate texts in mathematics **126**. Springer-Verlag New York Inc. 1991.
3. N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique. Groupes et Algèbres de Lie*, Chap. IV, V, VI, 2ème édition. Masson, Paris 1981.
4. N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique. Groupes et Algèbres de Lie*, Chap. 7, 8. Springer 2006.
5. V. Chernousov, E. W. Ellers, N. Gordeev, *Gauss decomposition with prescribed semisimple part: short proof.*— J. Algebra **229**, no. 1 (2000), 314–332.
6. E. Egorchenkova, N. Gordeev, *Products of three word maps on simple algebraic groups.*— Archiv der Math. **112**, no. 2 (2019), 113–122.
7. E. W. Ellers, N. Gordeev, *On the conjectures of J. Thompson and O. Ore.*— Trans. Amer. Math. Soc. **350**, no. 9 (1998), 3657–3671.

8. E. W. Ellers, N. Gordeev, *Intersection of conjugacy classes with Bruhat cells in Chevalley groups.*— Pacific J. Math. **214** (2) (2004), 245–261.
9. E. W. Ellers, N. Gordeev, *Commutators with some special elements in Chevalley groups.*— Зап. научн. семин. ПОМИ **413** (2013), 93-105.
10. Н. Л. Гордеев, Б. Э. Кунявский, Е. Б. Плоткин, *Вербальные отображения и вербальные отображения с константами простых алгебраических групп.*— Докл. Акад. Наук **471**, No. 2 (2016), 136–138.
11. N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, *Word maps, word maps with constants and representation varieties of one-relator groups.*— J. Algebra **500** (2018), 390–424.
12. N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, *Word maps on perfect algebraic groups.*— Intern. J. Algebra Comput. **28**, No. 8 (2018), 1487–1515.
13. Н. Л. Гордеев, Б. Э. Кунявский, Е. Б. Плоткин, *Геометрия вербальных отображений в простых алгебраических группах над специальными полями.*— Успехи Мат. Наук **73**, no. 5(443) (2018), 3–52.
14. N. L. Gordeev, U. Rehmann, *Big elements in irreducible linear groups.*— Archiv der Math. **103**, No. 3 (2014), 201–210.
15. C. Y. Hui, M. Larsen, A. Shalev, *The Waring problem for Lie groups and Chevalley groups.*— Israel J. Math. **210** (2015), 81–100.
16. Ж.-П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли*,Мир, М., 1969.
17. T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, 2nd edition. Progress in Mathematics 9. Birkhäuser Boston, Boston MA, 1998.
18. R. Steinberg, *Regular elements of semisimple algebraic groups.*— Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **25** (1965), 49–80.
19. R. Steinberg, *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975.

Egorchenkova E. A. Word maps of Chevalley groups over infinite fields.

Let G be a simply connected Chevalley group over an infinite field K and let $\widetilde{w} : G^n \to G$ be a word map that corresponds to a non-trivial word w. It has been proved in: (Israel J. Math. **210** (2015), 81-100) that if $w = w_1w_2w_3w_4$ is a product of any four words on independent variables, then every non-central element of the group G is contained in the image of $\widetilde{w}$. A similar result for a word $w = w_1w_2w_3$ that is a product of three independent words was obtained in: (Archiv der Math. **112** (2019), no. 2, 113-122) under the condition that the group G is not of types B_2, G_2. In this paper we prove that for groups of types B_2, G_2 all elements of big Bruhat cell $B\,\mathfrak{n}_{w_0}\,B$ are contained in the image of a word map $\widetilde{w}$ where $w = w_1w_2w_3$ is a product of three independent words. For groups of types A_r, C_r, G_2 (respectively, for groups of type A_r) or groups over a perfect field K (respectively, over a perfect field K such that $\mathrm{char} K$ is not a bad prime for G) that has $\dim K \leqslant 1$ (here $\dim K$ is cohomological dimension of K) it has been proved here that all split regular semisimple elements (respectively, all regular unipotent elements) of the group G are contained in the image $\widetilde{w}$ where $w = w_1 w_2$ is a product of two independent words. Also, for any isotropic (but not necessary split) simple algebraic group $\mathcal{G}$ over a field K of characteristic zero we show that for a word map $\widetilde{w} : \mathcal{G}(K)^n \to \mathcal{G}(K)$, where $w = w_1 w_2$ is a product of two independent words, all unipotent elements are contained in $\operatorname{Im} \widetilde{w}$.

Государственный Педагогический
Университет им. А. И. Герцена,
Мойка 48, 191186 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: e-egorchenkova92@mail.ru

Поступило 30 апреля 2019 г.